Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

С. Мейнтанис, Я. Ю. Никитин,[1] А. В.Чирина

КРИТЕРИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ ПРОТИВ АЛЬТЕРНАТИВ, СОДЕРЖАЩИХ КЛАСС RNBUE, НА ОСНОВЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Введение

Проверка экспоненциальности выборки принадлежит к числу важнейших статистических задач в анализе данных типа времени жизни. Некоторые из известных критериев экспоненциальности состоятельны для произвольных альтернатив, это так называемые омнибус-тесты, см., например, [15, 21, 10, 12] и [13]. Недостатками подобных критериев обычно являются сложное асимптотическое распределение и невысокая мощность (или эффективность) для большинства употребительных альтернатив.

Поэтому разработано множество критериев экспоненциальности, состоятельных лишь против альтернатив из определенных классов, примерами которых могут служить классы распределений времени жизни с возрастающими и убывающими функциями интенсивности отказа (IFR и DFR), классы "новое-лучше-старого" и "новое-хуже-старого" (NBU и WBU) и многие другие, например IFRA, NBUT, IMRL, NWUE, HNBUE и пр. Литература здесь огромна, см. монографии [6, 21] и [8], но поток новых публикаций не иссякает.

Одним из таких новых классов распределений времени жизни является класс RNBUE (renewal new is better than used in expectation), основанный на идее сравнения среднего остаточного времени жизни с его асимптотическим значением. Формальное определение его таково. Пусть F – функция распределения (ф.р.) времени жизни со средним μ и вторым моментом $\mu_{(2)}$, обозначим

[1]Поддержано грантами РФФИ 04-01-0716, 06-01-00179 и грантом НШ-4222.2006.1.

$\bar{F} = 1 - F$. Тогда указанный класс определяется условием

$$2\mu \int_x^\infty \bar{F}(u)du \le \mu_{(2)}\bar{F}(x),\ x \ge 0. \tag{1}$$

Это определение введено и обсуждается в работах [1] и [2].

Класс RNBUE пока мало изучен в сравнении с другими классами распределений времени жизни, а его определение (1) плохо приспособлено для решения статистических задач. Очевидно, что экспоненциальный закон удовлетворяет (1) со знаком равенства. Непосредственная проверка показывает, что гамма-распределение также принадлежит изучаемому классу. В других случаях такая проверка может быть затруднительной. Поэтому ряд авторов рассматривал простые свойства класса RNBUE. В частности, в [2] показано, что случайная величина (с.в.) X с конечным вторым моментом из класса RNBUE удовлетворяет следующему неравенству для производящей функции моментов

$$\mathbf{E}e^{tX} \le \frac{2\mu + 2\mu^2 t - \mu_{(2)}t}{2\mu - \mu_{(2)}t}, \quad -\infty < t < \frac{2\mu}{\mu_{(2)}},$$

где $\mu = \mathbf{E}X$, а $\mu_{(2)} = \mathbf{E}X^2$. Следовательно, для преобразования Лапласа $l(t) = \mathbf{E}e^{-tY}$ с.в. $Y = X/\mu$ при всех $t \ge 0$ выполняется неравенство

$$D(t) := (\mu_2 - 2)t + 2 - (2 + \mu_2 t)l(t) \ge 0, \tag{2}$$

где $\mu_2 = \mathbf{E}Y^2$. Обозначим класс распределений времени жизни, удовлетворяющих (2), через $\mathcal{D}$.

Поскольку $D(t)$ равно нулю для экспоненциальных с.в., то на основе (2) можно построить критерий для проверки нулевой гипотезы

$$H_0 : X \in \mathcal{EXP},$$

где $\mathcal{EXP}$ означает класс всех экспоненциальных распределений. В частности, располагая независимыми наблюдениями $X_1, \dots, X_n$ над X положим

$$D_n(t) = (m_2 - 2)t + 2 - (2 + m_2 t)l_n(t),$$

где $l_n(t) = n^{-1}\sum_{j=1}^n e^{-tY_j}$ есть эмпирическое преобразование Лапласа для с.в. $Y_j = X_j/\bar{X}_n$, $j = 1, 2, ..., n$, $\bar{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$, а

$m_2 = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Y_j^2$. Тогда, опираясь на (2), мы предлагаем отвергать нулевую гипотезу H_0 в пользу альтернативы

$$H_1 : X \in \mathcal{D}$$

для больших положительных значений проинтегрированной тестовой статистики

$$T_{n,a} = \sqrt{n} \int_0^\infty D_n(t) e^{-at} dt. \tag{3}$$

Здесь e^{-at}, $a > 0$ играет роль весовой функции, обеспечивающей сходимость интеграла. Кроме того, статистику $T_{n,a}$ можно рассматривать как преобразование Лапласа от функции $D_n(t)$, которое сравнивается с преобразованием Лапласа от функции $D(t)$, равной нулю при нулевой гипотезе.

Мы покажем, что предлагаемый критерий состоятелен не только для класса RNBUE, но и для более широкого класса $\mathcal{D}$.

Идея применения эмпирического преобразования Лапласа или эмпирической производящей функции моментов не нова и неоднократно встречалась в литературе. Однако, как отмечалось выше, омнибус-тесты такого рода либо имеют сложное предельное распределение, либо не являются состоятельными, см. [9, 16] и [7]. В связи с этим представляется разумным сузить класс возможных альтернатив до класса $\mathcal{D}$, но зато добиться асимптотической нормальности тестовой статистики. Это упрощает изучение ее асимптотической эффективности, см. также [11].

Работа организована так. Второй параграф посвящен доказательству состоятельности предлагаемого критерия и выводу его предельного распределения при нулевой гипотезе. Локальная приближенная бахадуровская эффективность вычисляется в третьем параграфе для некоторых конкретных альтернатив. Наконец, последний параграф посвящен результатам моделирования мощности.

2. Состоятельность и асимптотическая нормальность

Для доказательства состоятельности запишем нашу статистику в виде

$$T_{n,a} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}(m_2 - 2) - \frac{2}{a+Y_j} - \frac{m_2}{(a+Y_j)^2} \right\}. \qquad (4)$$

Применяя к (4) закон больших чисел с оцененными параметрами [19], получаем при H_1 :

$$\frac{T_{n,a}}{\sqrt{n}} \to \mathcal{E}_a(\mu)$$

по вероятности при $n \to \infty$, где

$$\mathcal{E}_a(\mu) := \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} \left(\mathbf{E}\left(Y^2 - 2\right) - \mathbf{E}\left(\frac{2}{a+Y}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{1}{a+Y}\right)^2 \right). \qquad (5)$$

С другой стороны

$$\mathcal{E}_a(\mu) \equiv \int_0^\infty D(t) \exp(-at) dt. \qquad (6)$$

Ввиду (5) и (6), $\mathcal{E}_a(\mu)$ равно нулю при гипотезе экспоненциальности, но положительно при любых альтернативах, удовлетворяющих условию $D \not\equiv 0$, что и доказывает состоятельность критерия при таких альтернативах. При этом экспоненциальный закон является единственным законом в классе $\mathcal{D}$, удовлетворяющим равенству $\mathcal{E}_a(\mu) \equiv 0$.

Поскольку $T_{n,a}$ зависит от X_j только через $Y_j = X_j/\bar{X}_n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то эта тестовая статистика инвариантна к преобразованиям масштаба, и мы можем считать, что исходные наблюдения имеют стандартное экспоненциальное распределение. Для изучения предельного распределения нашей статистики при нулевой гипотезе обозначим

$$C_a := \mathbf{E}\frac{1}{(X+a)^2} = \frac{1}{a} - e^a Ei(1,a),$$

где X – стандартная экспоненциальная с.в. и

$$Ei(1,x) = \int_1^\infty (e^{-xt}/t)\ dt.$$

Тогда, используя (4), мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ T_{n,a} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{Y_j+a} - \frac{m_2-2}{(Y_j+a)^2} - \frac{2}{(Y_j+a)^2} - \frac{2-Y_j^2}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{Y_j+a} - \frac{2}{(Y_j+a)^2} - (2-Y_j^2)\left(\frac{1}{a^2} - C_a\right)\right) - \underbrace{-\,(m_2-2)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(Y_j+a)^2} - C_a\right)}_{\alpha_n},$$

где α_n – это бесконечно малая величина “второго порядка”.

Поэтому

$$T_{n,a} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} W(Y_j,a) - \sqrt{n}\alpha_n,$$

где

$$W(x,a) = \frac{2}{a} - \frac{2}{x+a} - \frac{2}{(x+a)^2} + (x^2-2)\left(\frac{1}{a^2} - C_a\right).$$

Предельное распределение статистики $T_{n,a}$ можно найти так. При каждом $j = 1,\ldots,n$ справедливо разложение

$$W(Y_j,a) = W(X_j,a) - X_j W'(X_j,a)(\bar{X}-1) + \Delta_n$$

где Δ_n означает остаточный член, пренебрежимый по вероятности по отношению ко второму члену разложения.

Интегрируя по частям, получаем при каждом $j = 1,\ldots,n$

$$\mathbf{E}[X_j W'(X_j,a)] = -\mathbf{E}[(1-X_j)W(X_j,a)] = \mathbf{E}[X_j W(X_j,a)].$$

Следовательно, предельное распределение $T_{n,a}$ совпадает с предельным распределением величины

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(W(X_j,a) - \tau(a)(X_j-1)),$$

где

$$\tau(a) = \mathbf{E}X_1 W(X_1,a) = \frac{4}{a^2} - \frac{2}{a} + 2e^a Ei(1,a).$$

Применяя центральную предельную теорему, мы заключаем, что при H_0, $T_{n,a} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \sigma_a^2)$, где $\sigma_a^2 = \mathbf{E}[W(X_1, a) - \tau(a)(X_1 - 1)]^2$.

В дальнейшем нам понадобятся значения табличных интегралов, содержащихся в следующей лемме.

Лемма. *При $a > 0$ и стандартном экспоненциальном распределении с.в. X справедливы следующие соотношения*

$$\mathbf{E}\frac{1}{X+a} = e^a Ei(1,a); \quad \mathbf{E}\frac{1}{(X+a)^3} = -\frac{a-1}{2a^2} + \frac{1}{2}e^a Ei(1,a);$$

$$\mathbf{E}\frac{1}{(X+a)^4} = \frac{1}{6a} - \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{6}e^a Ei(1,a);$$

$$\mathbf{E}\frac{X}{(X+a)^2} = -1 + (a+1)e^a Ei(1,a); \quad \mathbf{E}\frac{X^2}{X+a} = 1 - a + a^2 e^a Ei(1,a);$$

$$\mathbf{E}\frac{X}{X+a} = 1 - ae^a Ei(1,a); \quad \mathbf{E}\frac{X^2}{(X+a)^2} = a + 1 - a(a+2)e^a Ei(1,a).$$

Используя лемму, после ряда вычислений получаем

$$\sigma_a^2 = \frac{12 - 44a - 2a^2 + 26a^3}{3a^4} + \\ + \frac{72 - 48a - 50a^2}{3a^2} e^a Ei(1,a) + 8(a+2)e^{2a} Ei^2(1,a).$$

3. Локальная приближенная бахадуровская эффективность

Для измерения качества нашего критерия мы используем понятие приближенной бахадуровской эффективности, см. [4] или [5]. Этот тип асимптотической эффективности часто используется для асимптотического сравнения сложно устроенных тестовых статистик, у которых предельное распределение известно, в то время как асимптотика больших уклонений, необходимая для вычисления *точной* эффективности, недоступна, см. [11, 14, 20]. Хорошо известно [4], что питменовская эффективность асимптотически нормальных статистик совпадает с локальной приближенной бахадуровской эффективностью. Вместе с тем вычисление приближенной бахадуровской эффективности много легче и накладывает меньше условий на альтернативу.

Напомним несколько классических определений, связанных с приближенной бахадуровской эффективностью. Пусть мы располагаем выборкой $X_1, \ldots, X_n$ с распределением $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ и хотим проверить нулевую гипотезу $\theta \in \Theta_0 \in \Theta$ против альтернативы $\theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Последовательность тестовых статистик $\{T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)\}$ называют стандартной [4], если выполнены три следующих условия:

(i) При нулевой гипотезе последовательность статистик T_n имеет невырожденное предельное распределение при $n \to \infty$, а именно

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta \{T_n < z\} = F(z), \quad \theta \in \Theta_0.$$

(ii) Существует константа $a_T \in (0, \infty)$ такая, что

$$\ln[1 - F(z)] = -\frac{a_T z^2}{2}(1 + o(1)), \quad z \to \infty.$$

(iii) Существует неотрицательная функция $b(\theta)$ на Θ, такая что $b(\theta) > 0$ при $\theta \in \Theta_1$ и $n^{-1/2}T_n \to b(\theta)$ по P_θ – вероятности, $\theta \in \Theta_1$.

Тогда при выполнении условий (i)–(iii) приближенный бахадуровский наклон последовательности статистик $\{T_n\}$ есть функция

$$c_T^*(\theta) = a_T b^2(\theta). \tag{7}$$

Приближенная относительная бахадуровская эффективность стандартной последовательности статистик $\{T_n\}$ по отношению к другой такой последовательности $\{V_n\}$ определяется как

$$e_{T,V}^*(\theta) = c_T^*(\theta)/c_V^*(\theta).$$

В нашей задаче Θ является множеством всех вероятностных плотностей на R^+, Θ_0 является множеством всех экспоненциальных плотностей из $\mathcal{EXP}$, тогда как Θ_1 – это множество альтернатив. Ожидание по отношению к P_θ обозначается $\mathbf{E}_\theta$.

В литературе принято вычислять приближенные наклоны для простых параметрических альтернатив к экспоненциальности, среди которых мы выберем три стандартных примера: обобщенную плотность Парето с конечным вторым моментом

$$f_1(x,\theta) = (1 + \theta x)^{-1-1/\theta}, x \geq 0, \ 0 < \theta < \frac{1}{2},$$

плотность Макегама

$$f_2(x;\theta) = (1 - \theta(1 - e^{-x}))e^{-x+\theta[x-(1-e^{-x})]}, \ x \geq 0, \ 0 \leq \theta < 1,$$

и, наконец, гамма-плотность

$$f_3(x,\theta) = \frac{x^{-\theta}\exp(-x)}{\Gamma(1-\theta)},\ x \geq 0,\ \ 0 \leq \theta < 1.$$

Первая плотность не принадлежит к классу RNBUE, поскольку не обладает производящей функцией моментов. Однако неравенство (4) для преобразования Лапласа выполняется, и потому эта плотность принадлежит классу $\mathcal{D}$.

Ясно, что коэффициент a_T в (7) равен $1/\sigma_a^2$, где σ_a^2 выписана в конце §2. Остается найти величины $b_j(\theta)$ для каждого $f_j(x,\theta), j = 1,\dots,3$. Получим сначала общее выражение для $b(\theta)$. Из (5) следует, что $b(\theta)$ является линейной комбинацией трех величин, а именно $\mathbf{E}_\theta(a + (X/\mu(\theta)))^{-1}$, $\mathbf{E}_\theta(a + (X/\mu(\theta)))^{-2}$ и $\mathbf{E}_\theta(X/\mu(\theta))^2$.

Пусть для любой альтернативной плотности $f(x,\theta)$, $x,\theta \geq 0$,

$$h(x) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\ \theta)\Big|_{\theta=0}.$$

Выделим главные части при $\theta \to 0$ из указанных выше величин. Если вещественная функция r и альтернативная плотность $f(x,\theta)$, $x,\theta \geq 0$ достаточно регулярны (это справедливо для наших примеров), то

$$\mathbf{E}_\theta r\left(\frac{X}{\mu(\theta)}\right) - \mathbf{E}_0 r(X) \sim \theta \int\limits_0^\infty (r(s) - s\,\tau)\, h(s)ds,\ \theta \to 0,$$

где для краткости мы обозначили $\tau = \mathbf{E}_0[Xr(X)]$. В частности, $\tau_1 = \mathbf{E}_0 \frac{X}{a+X}$ и $\tau_2 = \mathbf{E}_0 \frac{X}{(a+X)^2}$ даны в Лемме, тогда как $\tau_3 = \mathbf{E}_0 X^3 = 6$.

В итоге получаем следующие соотношения при $\theta \to 0$:

$$\mathbf{E}_\theta\left(\frac{1}{a + (X/\mu(\theta))}\right) - \mathbf{E}_0\left(\frac{1}{a+X}\right) \sim \theta\left(\int\limits_0^\infty (\frac{1}{a+s} - \tau_1 s)h(s)ds\right),$$

$$\mathbf{E}_\theta\left(\frac{1}{(a + (X/\mu(\theta)))^2}\right) - \mathbf{E}_0\left(\frac{1}{(a+X)^2}\right) \sim$$

$$\sim \theta\left(\int\limits_0^\infty (\frac{1}{(a+s)^2} - \tau_2 s)h(s)ds\right),$$

$$\mathbf{E}_\theta\left((X/\mu(\theta))^2\right) - \mathbf{E}_0\left(X^2\right) \sim \theta\left(\int\limits_0^\infty s^2 h(s)ds - \tau_3\int\limits_0^\infty sh(s)ds\right).$$

Опираясь на эти соотношения и используя Лемму 2.1, мы можем извлечь главные части величин $b_j(\theta)$, $j = 1, \ldots, 3$, т.е. вычислить константы

$$B_j := \lim_{\theta\to 0}\theta^{-1}b_1(\theta),\ j = 1, 2, 3. \tag{8}$$

В противоположность точной бахадуровской эффективности, для приближенных наклонов не существует верхней границы. Обычно их сравнивают с приближенными наклонами критериев отношения правдоподобия (КОП), которые при широких условиях и $\theta \to 0$ эквивалентны $2Q(f,\theta)$, где $Q(f,\theta)$, – соответствующее "расстояние" Кульбака–Лейблера между классом $\mathcal{EXP}$ и альтернативной плотностью f, см. [4, 17]. Значения локальных приближенных бахадуровских эффективностей нашего критерия по отношению к КОП вычисляются так. В нашем случае величины $Q(f_j,\theta)$, $j = 1, \ldots, 3$, определяются как

$$2Q(f_j,\theta) = 2\inf_{\lambda\geq 0}\int\limits_0^\infty \ln\frac{f_j(x,\,\theta)}{\lambda e^{-\lambda x}}f(x,\,\theta)dx. \tag{9}$$

Простые вычисления показывают, см. [24], что при $\theta \to 0$ справедливо

$$2Q(f_j,\theta) \sim I_j\ \theta^2,$$

где постоянные I_j для наших трех альтернатив есть $1, \frac{1}{12}$ и $\frac{\pi^2}{6} - 1$. Таким образом, рассматриваемые эффективности даются формулами

$$eff_j(T_a) = \frac{B_j^2}{\sigma_a^2 I_j},\ j = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Для первой альтернативы вычисления дают

$$B_1 = 2\cdot\frac{1 - a(2+a) + a^2(3+a)e^a Ei(1,a)}{a^2}.$$

Поэтому в силу (10) можно изобразить график эффективности как функцию от a на рис. 1.

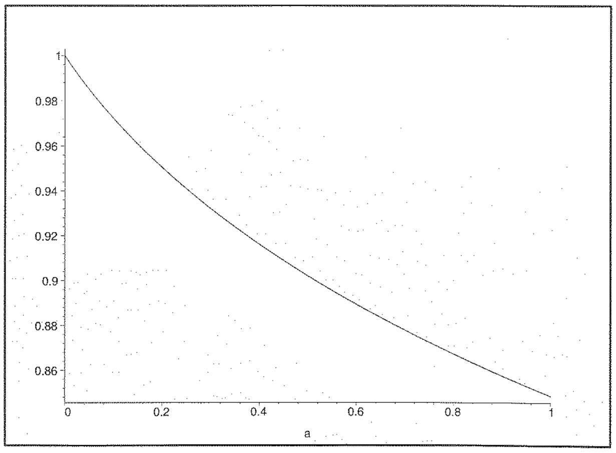

Рис. 1. Локальная эффективность при альтернативе Парето.

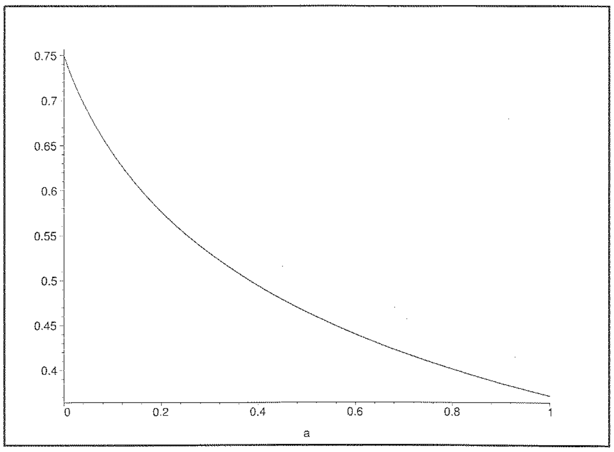

Рис. 2. Локальная эффективность при альтернативе Макегама.

Для альтернативы Макегама получаем

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3a}{a^2} - e^a Ei(1,a) + 8e^{2a}Ei(1,2a)\right),$$

а график эффективности изображен на рис. 2.

Для гамма-альтернативы $B_3 = a^{-2}(1 + a - a(2+a)e^a Ei(1,a))$, и

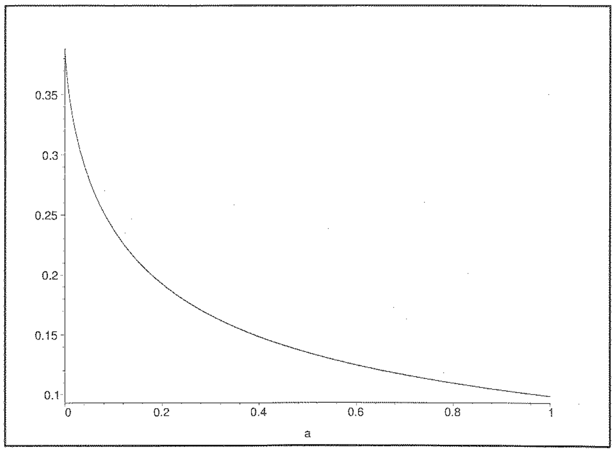

Рис.3. Локальная эффективность при гамма-альтернативе.

график эффективности помещен на рис. 3.

Мы видим, что максимальная эффективность всегда достигается при малых значениях a. Отметим чрезвычайно высокую эффективность нашего теста для обобщенной альтернативы Парето и высокий результат для альтернативы Макегама. Для гамма-альтернатив результат хуже. Впрочем, здесь можно рекомендовать знаменитую статистику Морана

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right) + \gamma,$$

где γ – постоянная Эйлера. Как известно, [22, 24], это равномерно наиболее мощный критерий для проверки экспоненциальности против таких альтернатив.

При любом $a > 0$ можно сконструировать специальную альтернативу, для которой тест, основанный на $T_{n,a}$, локально оптимален. Рассмотрим при $a > 0$ функцию выживания $\bar{F}^*(x,\theta)$ в виде геометрического среднего двух функций выживания $\bar{F}_1(x,\theta)$ и $\bar{F}_2(x,\theta)$, которые определены для малых $\theta > 0$ следующим образом:

$$\bar{F}_1(x,\theta) = \exp\left(-x + 2\theta\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x+a}\right)\right)$$

и

$$\bar{F}_2(x,\theta) = (1 + \theta k_a x)^{-1-1/(\theta k_a)},$$

где
$$k_a = e^a Ei(1,a) - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}.$$
Наконец, положим
$$\bar{F}^*(x,\theta) = \sqrt{\bar{F}_1(x,\theta)\cdot \bar{F}_2(x,\theta)}.$$

Доказательство локальной оптимальности нашего теста при альтернативе F^* может быть осуществлено по образцу теории, развитой в §4 работы [18]. Детали мы опускаем.

4. Результаты моделирования мощности

Здесь приведены результаты моделирования методом Монте-Карло мощности нового теста для объема выборки 20. Для небольших объемов выборки разумнее использовать не асимптотические, а эмпирические критические значения, которые моделировались нами с помощью выборок из стандартного экспоненциального закона.

В качестве альтернатив (необязательно из класса $\mathcal{D}$) выбирались следующие распределения: гамма-распределение $\Gamma(\theta)$ с параметром формы θ; распределение Вейбулла $W(\theta)$ с параметром формы θ; обобщенное распределение Парето GP(θ); логнормальное распределение LN(θ) с плотностью
$$(\theta x\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\{-(\log x)^2/(2\theta^2)\}, x \geq 0;$$
правостороннее распределение Коши HC с плотностью
$$2/(\pi(1+x^2)),$$
обратное гауссовское распределение IG(θ) с плотностью
$$(\theta/2\pi)^{1/2}x^{-3/2}\exp\{-\theta(x-1)^2/(2x)\}, x \geq 0.$$

Для сравнения с нашим критерием мы выбрали три критерия экспоненциальности, основанных на разных идеях: тест AD Андерсона–Дарлинга [3], тест G Джини [18] и тест HP Хилла и Переса-Абрэ [13].

Каждая строка таблицы 1 – это округленный процент тех из 100 000 результатов моделирования выборок объема $n = 20$, при которых гипотеза H_0 отвергалась. Значения $a = 2$ и $a = \infty$ в

Распределение	$T_{20,0.01}$		$T_{20,0.05}$		$\mathrm{HP}_{20,2}$		$\mathrm{HP}_{20,\infty}$		AD_{20}		G_{20}	
$\Gamma(-0.4)$	28	41	24	36	57	68	46	57	47	57	35	46
$\Gamma(-0.2)$	12	21	11	20	20	31	17	25	14	22	11	19
$W(-0.4)$	62	75	56	68	87	92	81	87	80	86	73	81
$W(-0.2)$	25	37	23	34	36	48	33	43	27	36	24	34
HC	74	80	73	79	69	75	72	77	64	70	67	73
$GP(0.2)$	22	32	22	31	19	27	21	29	13	20	21	31
$GP(0.4)$	44	54	43	53	41	50	44	53	33	41	45	55
$IG(0.3)$	61	71	62	72	51	60	57	65	48	57	49	58
$IG(0.5)$	34	45	37	48	19	28	25	33	21	32	19	27
$LN(1.0)$	20	28	22	30	8	14	11	18	14	23	11	18
$LN(1.5)$	74	80	74	82	69	76	73	79	62	69	66	73

Таблица 1. Результаты моделирования мощности на уровнях 0.05 и 0.1 (левый и правый столбцы) при объеме выборки 20.

случае статистики $HP_{n,a}$ взяты по рекомендациям в [13]. Для предлагаемой нами статистики $T_{n,a}$ берутся значения $a = 0.01$ и $a = 0.05$.

Мы видим, что для альтернатив гамма и Вейбулла наш тест несколько менее мощен, чем его конкуренты. Однако для других альтернатив этот тест, как правило, превосходит конкурентов по мощности. Поэтому его использование оправдано и при небольших выборках, если только мы можем предполагать, что альтернатива принадлежит классу RNBUE или более широкому классу $\mathcal{D}$.

Литература

1. A. M. Abouammoh, R. Ahmad, and A. Khalique, *On a new better than used classes of life distributions.* — Statist. Probab. Lett. **48** (2000), 189–194.
2. I. A. Ahmad and A. R. Mugdadi, *Bounds of moment generating functions of some life distributions.* — Statistical Papers **46** (2005), 575–585.
3. T. W. Anderson and D. A. Darling, *Asymptotic theory of certain “goodness-of-fit” criteria based on stochastic processes.* — Ann. Math. Statist. **23** (1952), 193–212.
4. R. R. Bahadur, *Stochastic comparison of tests.* — Ann. Math. Stat. **31** (1960), 276–295.
5. R. R. Bahadur, *Some limit theorems in Statistics.* — SIAM, Philadelphia (1971).
6. R. E. Barlow and F. Proshan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.* Silver Spring (1981).
7. A. Cabaña and A. J. Quiroz, *Using the empirical moment generating function in testing for the Weibull and the type I extreme value distributions.* — Test **14** (2005), 417–431.

8. J. V. Deshpande and S. G. Purohit, *Life-Time Data: Statistical Models and Methods.* World Scientific Publishers. Singapore (2006).
9. T. W. Epps, J. Singleton, and L. B. Pulley, *A test of separate families of distributions based on the empirical moment generating function.* — Biometrika **69** (1982), 391–399.
10. N. Henze, *A new flexible class of omnibus tests for exponentiality.* — Commun. Statist. Theor. Meth. **22** (1993), 115–133.
11. N. Henze and B. Klar, *Testing exponentiality against the $\mathcal{L}$-class of life distributions.* — Math. Method. Statist. **10** (2001), 232–246.
12. N. Henze and S. G. Meintanis, *Tests of fit for exponentiality based on the empirical Laplace transform.* — Statistics **36** (2002), 147–161.
13. T. P. Hill V. Perez–Abreu, *Extreme–value moment goodness–of–fit tests.* — Ann. Instit. Statist. Math. **53** (2001), 543–551.
14. B. Klar, *On a test for exponentiality against Laplace order dominance.* — Statistics **37** (2003), 505–515.
15. H. Lilliefors, *On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown.* — J. Amer. Stat. Ass. **64** (1969), 387–389.
16. A. Luong and M. E. Thompson, *Minimum–distance methods based on quadratic distances for transforms.* — Canad. J. Statist. **15** (1987), 239–251.
17. Ya. Ya. Nikitin, *Asymptotic efficiency of nonparametric tests.* Cambridge University Press (1995).
18. Ya. Yu. Nikitin and A. V. Tchirina, *Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic.* — J. Ital. Stat. Soc. **5** (1996), 163–175.
19. R. H. Randles, *On the asymptotic normality of statistics with estimated parameters.* — Ann. Statist. **10** (1982), 462–474.
20. J. S. Rao and E. Taufer, *Testing exponentiality by comparing the empirical distribution function of the normalized spacings with that of the original data.* — J. Nonpar. Statist. **15** (2003), 719–729.
21. M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic orders and their applications.* Academic Press, NY (1994).
22. G. R. Shorack, *The best test of exponentiality against gamma alternatives.* — J. Amer. Stat. Ass. **67** (1972), 213–214.
23. J. J. Spinelli and M. A. Stephens, *Tests for exponentiality when origin and scale parameters are unknown.* — Technometrics **29** (1987), 471–476.
24. A. V. Tchirina, *Bahadur efficiency and local optimality of a test for exponentiality based on the Moran statistics.* — J. Math. Sci. **127** (2005), 1812–1819.

Meintanis S., Nikitin Ya. Yu., Tchirina A. V. A test of exponentiality versus alternatives containing the RNBUE class derived from the Laplace empirical transform.

A scale–free test for exponentiality is proposed which is consistent within an extended set of models which includes, but is not limited to, the 'renewal new better than used in expectation' (RNBUE) class of life distributions. The limiting null distribution of the test statistics is derived, and the approximate local Bahadur efficiency is calculated for several families of alternatives. The finite–sample properties of the proposed procedures are investigated via simulation.

Поступило 20 ноября 2006 г.

Department of Economics,
National and Kapodistrian
University of Athens, Grese

E-mail: e-mail: simosmei@econ.uoa.gr

St.Petersburg
State University

E-mail: e-mail:yanikit47@mail.ru

St.Petersburg
Electrotechnical University

E-mail: e-mail: antch@mail.ru