Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

А. И. Мартикайнен, А. Н. Фролов

ЗАКОН ЧЖУНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

1. Введение

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, $\mathbf{E}X = \mu$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Если $\sigma_X^2 = \mathbf{D}X < \infty$, то

$$\liminf \frac{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - k\mu|}{(n/\log\log n)^{1/2}} = \sigma_X \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

Этот результат был получен Чжуном [1] (при дополнительном условии $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$) и Джейном, Пруиттом [2]. Чаки [3] установил, что при $\sigma_X^2 = \infty$ нижний предел в (1) равен ∞ п.н.

Закон Чжуна, т.е. соотношение (1), является дополнением к закону повторного логарифма, согласно которому

$$\limsup \frac{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - k\mu|}{(n\log\log n)^{1/2}} = \sigma_X \sqrt{2} \quad \text{п.н.}$$

Напомним теперь определение обобщенного процесса восстановления. Пусть (X, Y), $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ – последовательность н.о.р. случайных векторов таких, что

$$\mathbf{E}X = \mu \in (0, \infty), \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(Y > 0) = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}Y = \lambda \in (0, \infty). \tag{3}$$

(Подчеркнем, что компоненты векторов X и Y могут быть зависимыми.) Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $R_n = Y_1 + \dots + Y_n$, для $n \geqslant 1$, $S_0 = R_0 = 0$, и определим обобщенный процесс восстановления соотношением

$$S(t) = S_{N(t)}, \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке гранта 05-01-00486 РФФИ.

где $N(t)$ – процесс восстановления, порожденный последовательностью $\{Y_i\}$, т.е.

$$N(t) = \max\{n : R_n \leqslant t\}, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Ясно, что если $\mathbf{P}(Y_1 > u) = e^{-u/\lambda}$ при $u > 0$, то $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс, а если $N(t)$ и $\{X_i\}$ независимы, то $S(t)$ называется обобщенным пуассоновским процессом.

Обобщенные процессы восстановления играют важную роль в актуарной и финансовой математике (см., например, обзор Эмбрехтса и Клюппельберг [4]).

Нашей целью является получение аналога соотношения (1) для процесса $S(t)$. Учитывая, что $N(t)/t \to 1/\lambda$ п.н., из (1) получаем

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{\sup\limits_{1\leqslant t\leqslant T} |S_{N(t)} - \mu N(t)|}{(T/\log\log T)^{1/2}} = \sigma_X \frac{\pi}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{п.н.} \tag{6}$$

Основным недостатком такой формы закона Чжуна является случайность центрирующей последовательности $\mu N(t)$. Правда, в отличие от нашего основного результата с неслучайным центрированием, в (6) не требуется конечного второго момента Y.

2. Результаты

Пусть выполнены соотношения (2) и (3). Рассмотрим процесс $\{S(t)\}$, определенный с помощью (4) и (5).

Далее мы будем считать, что все предельные переходы lim sup, lim inf, O, o, $\to$ происходят при $T \to \infty$, если не оговорено противное.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}X^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$, *то*

$$\liminf \frac{\sup\limits_{1\leqslant t\leqslant T} |S(t) - (\mu/\lambda)t|}{(T/\log\log T)^{1/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \frac{\mu v}{\sqrt{\lambda}} \quad \textit{п.н.},$$

где $v^2 = \mathbf{D}(X/\mu - Y/\lambda)$.

Доказательство теоремы основано на методах оценивания вероятностей малых уклонений обобщенных процессов восстановления, развитых Мартикайненом, Фроловым и Штайнебахом [5].

Если $\mathbf{P}(X = 1) = 1$, то $S(t)$ совпадает с процессом восстановления $N(t)$. В этом случае соответствующие результат был доказан Фроловым, Мартикайненом и Штайнебахом [6]. Как и в случае сумм независимых случайных величин закон Чжуна для процессов восстановления также дополняет закон повторного логарифма. Различные результаты о законе повторного логарифма для процессов восстановления получены Фроловым, Мартикайненом и Штайнебахом [7].

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности можно считать, что $\mu = \lambda = 1$ (подробнее см. [5]).

Обозначим $x_T = (T/\log\log T)^{1/2}$, $T \geqslant 8$,

$$V_T = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |S(t) - t|.$$

Так как траектории $S(t)$ суть кусочно постоянные функции со скачками в случайных точках $R_1, R_2, \ldots$, мы имеем

$$V_T = \max\{M_{N(T)}, M'_{N(T)}, |S_{N(T)} - T|\}, \tag{7}$$

где $M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k - R_k|$, $M'_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_{k-1} - R_k|$, $n \geqslant 1$. Из соотношения (7) следует, что

$$V_T \leqslant \max\{M_{N(T)}, M'_{N(T)+1}\}. \tag{8}$$

В следующей лемме не предполагается, что $\mathbf{E}X^2 < \infty$ и $\mathbf{E}Y^2 < \infty$.

Лемма 1. *Если* $0 \leqslant v \leqslant \infty$, *то*

$$\liminf \frac{V_T}{x_T} \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{8}} v \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство леммы 1. Поскольку $V_T \geqslant M_{N(T)}$, то в силу закона Чжуна и упомянутого выше результата Чаки

$$\liminf \frac{V_T}{x_{N(T)}} \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{8}} v \quad \text{п.н.}$$

Учитывая, что $N(T) \sim T$ п.н., получаем утверждение леммы. □

Согласно усиленному закону больших чисел для процессов восстановления $N(T)/T \to 1$ п.н. и поэтому при $c > 1$ $\mathbf{P}(N(T) \leqslant cT$ при всех $T \geqslant T_\omega) = 1$. С учетом (8) мы имеем

$$\liminf \frac{V_T}{x_T} \leqslant \liminf \frac{1}{x_T} \max\{M_{cT}, M'_{cT+1}\}.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Предположим, что T таково, что

$$\mathbf{E}|X|I\{|X| > \varepsilon x_T\} + \mathbf{E}Y I\{Y > \varepsilon x_T\} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{x_T \log\log T}. \tag{9}$$

Имеем при $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
&P_T = \mathbf{P}\big(M_{cT} \leqslant \delta x_T,\, M'_{cT+1} \leqslant \delta x_T\big)\\
&\geqslant \mathbf{P}\Big(M_{cT} \leqslant (\delta-\varepsilon)x_T,\, \max_{1\leqslant k\leqslant cT+1} Y_k \leqslant \varepsilon x_T\Big)\\
&\geqslant \mathbf{P}\Big(M_{cT} \leqslant (\delta-\varepsilon)x_T,\, \max_{1\leqslant k\leqslant cT} Y_k \leqslant \varepsilon x_T,\, \max_{1\leqslant k\leqslant cT} |X_k| \leqslant \varepsilon x_T\Big)\\
&\times \mathbf{P}\Big(Y \leqslant \varepsilon x_T\Big)\\
&= \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant cT} |\overline{S}_k - \overline{R}_k| \leqslant (\delta-\varepsilon)x_T\Big)\\
&\times \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant cT} Y_k \leqslant \varepsilon x_T,\, \max_{1\leqslant k\leqslant cT} |X_k| \leqslant \varepsilon x_T\Big)(1+o(1))\\
&= \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant cT} |\overline{S}_k - \overline{R}_k| \leqslant (\delta-\varepsilon)x_T\Big)\\
&\times \Big(\mathbf{P}\Big(Y \leqslant \varepsilon x_T, |X| \leqslant \varepsilon x_T\Big)\Big)^{cT}(1+o(1))\\
&= P'_T\, Q_T^{cT}(1+o(1)),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\overline{S}_k = \sum_{i=1}^k \overline{X}_i$, $\overline{R}_k = \sum_{i=1}^k \overline{Y}_i$, а $(\overline{X}, \overline{Y})$, $\{(\overline{X}_i, \overline{Y}_i)\}$ – н.о.р. случайные векторы, имеющие (условное) распределение

$$\overline{F}(x,y) = \frac{1}{Q_T}\,\mathbf{P}(X < x, -\varepsilon x_T \leqslant X \leqslant \varepsilon x_T, Y < y, Y \leqslant \varepsilon x_T).$$

Учитывая, что $\mathbf{E}(X - Y) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&|Q_T \mathbf{E}(\overline{X} - \overline{Y})| = |\mathbf{E}(X - Y)I\{|X| \leqslant \varepsilon x_T,\, Y \leqslant \varepsilon x_T\}|\\
&\leqslant \mathbf{E}|X - Y|I\{|X| > \varepsilon x_T, Y \leqslant \varepsilon x_T\} + \mathbf{E}|X - Y|I\{|X| \leqslant \varepsilon x_T, Y > \varepsilon x_T\}\\
&\leqslant 2(\mathbf{E}|X|I\{|X| > \varepsilon x_T,\, Y \leqslant \varepsilon x_T\} + \mathbf{E}Y I\{|X| \leqslant \varepsilon x_T,\, Y > \varepsilon x_T\})
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2(\mathbf{E}|X|I\{|X|>\varepsilon x_T\}+\mathbf{E}YI\{Y>\varepsilon x_T\})\leqslant \frac{2\varepsilon^2}{x_T\log\log T}.$$

Так как $Q_T\to 1$, то при $k\leqslant cT$ выполняются неравенства

$$|\mathbf{E}\overline{S}_k-\mathbf{E}\overline{R}_k|\leqslant cT\frac{3\varepsilon^2}{x_T\log\log T}=3\varepsilon^2cT$$

при всех достаточно больших T.

Таким образом, при $\alpha=\delta-\varepsilon-3\varepsilon^2c$ и всех достаточно больших T мы имеем

$$P'_T\geqslant \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant cT}|\overline{S}_k-\mathbf{E}\overline{S}_k-\overline{R}_k+\mathbf{E}\overline{R}_k|<\alpha x_T\Big).$$

Лемма 2. *Пусть $\{x_N\}$ – последовательность вещественных чисел такая, что $x_N\to\infty$ и $x_N=o(\sqrt{N})$ при $N\to\infty$. Пусть $Z_{N1},Z_{N2},\dots,Z_{NN}$ – последовательность серий н.о.р. в каждой серии случайных величин таких, что $\mathbf{E}Z_{N1}=0$, $v_N^2=\mathbf{E}Z_{N1}^2\to v^2\in(0,\infty)$ при $N\to\infty$, $\mathbf{E}Z_{N1}^4=o(x_N^2)$ при $N\to\infty$ и $|Z_{N1}|\leqslant\varepsilon x_N$, где $\varepsilon>0$.*

Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших N

$$\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant N}|\sum_{j=1}^{k}Z_{Nj}|<x_N\Big)\geqslant e^{-\frac{\pi^2}{8}\frac{N}{x_N^2}v^2(1+\varepsilon)}.$$

Доказательство леммы 2. Для удобства читателей мы приводим полное доказательство этого, возможно известного, результата. При этом мы следуем методу из работы [5].

Используя представление Скорохода, получим

$$\Big\{\sum_{j=1}^{k}Z_{Nj},1\leqslant k\leqslant N\Big\}\overset{\mathcal{D}}{=}\{W(\tau_{Nk}),1\leqslant k\leqslant N\},$$

где $\{W(t)\}$ – стандартный винеровский процесс, $\tau_{Nk}=\nu_{N1}+\dots+\nu_{Nk}$, и для всех N ν_N, $\{\nu_{Nj}\}$ – н.о.р. случайные величины такие, что $\mathbf{E}\nu_N=\mathbf{E}Z_{N1}^2$, $\mathbf{E}\nu_N^k\leqslant 4k!\,\mathbf{E}Z_{N1}^{2k}$, $k=2,3,\dots$. Поэтому

$$P''_N=\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant N}|\sum_{j=1}^{k}Z_{Nj}|<x_N\Big)=\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant N}|W(\tau_{Nk})|<x_N\Big)$$

$$\geqslant\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant\mathbf{E}\tau_{NN}+\beta N}|W(t)|<x_N\Big)-\mathbf{P}\big(\tau_{NN}>\mathbf{E}\tau_{NN}+\beta N\big)$$

$$\geqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant N(v^2+2\beta)}|W(t)|<x_N\Big)-\mathbf{P}\big(\tau_{NN}>\mathbf{E}\tau_{NN}+\beta N\big). \qquad (11)$$

Здесь мы использовали оценку $\mathbf{E}\tau_{NN}=N\,\mathbf{D}Z_{N1}\leqslant N(v^2+\beta)$, справедливую для всех достаточно больших N.

Хорошо известно, что

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant N(v^2+2\beta)}|W(t)|<x_N\Big)=e^{-\frac{\pi^2}{8}\frac{N(v^2+2\beta)}{x_N^2}(1+o(1))}. \qquad (12)$$

Далее, так как $\mathbf{E}|\nu_N-\mathbf{E}\nu_N|^k\leqslant 8k!\,\mathbf{E}Z_{N1}^{2k}\leqslant 8k!(2\varepsilon x_N)^{2k-4}\mathbf{E}Z_{N1}^4$, то, положив $h_N=1/(2(2\varepsilon x_N)^2)$, мы получим

$$\mathbf{E}e^{h_N(\nu_N-\mathbf{E}\nu_N)}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h_N^k\mathbf{E}(\nu_N-\mathbf{E}\nu_N)^k}{k!}$$

$$\leqslant 1+8h_N^2\mathbf{E}Z_{N1}^4\sum_{k=2}^{\infty}\big(h_N(2\varepsilon x_N)^2\big)^{k-2}=1+16h_N^2\mathbf{E}Z_{N1}^4\leqslant e^{16h_N^2\mathbf{E}Z_{N1}^4}.$$

Значит,

$$\mathbf{P}\big(\tau_{NN}>\mathbf{E}\tau_{NN}+\beta N\big)\leqslant e^{(16h_N^2\mathbf{E}Z_{N1}^4-h_N\beta)N}=e^{-\frac{N\beta}{2(2\varepsilon x_N)^2}(1+o(1))}.$$

Взяв $\beta=\varepsilon/4$, из (11), (12) и последней оценки мы получим

$$P_N''\geqslant e^{-\frac{\pi^2}{8}\frac{N}{x_N^2}(v^2+\varepsilon)}$$

для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших N. Отсюда следует заключение леммы 2. $\square$

Учитывая, что $|\overline{X}-\overline{Y}|\leqslant 2\varepsilon x_T$, по лемме 2 мы находим

$$P_T'\geqslant e^{-\frac{\pi^2}{8}\frac{cT}{\alpha^2x_T^2}v^2(1+2\varepsilon/\alpha)}.$$

Далее,

$$0\leqslant 1-Q_T\leqslant \mathbf{P}\left(Y>\varepsilon x_T\right)+\mathbf{P}\left(|X|>\varepsilon x_T\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon x_T}\left(\mathbf{E}Y\,I\{Y>\varepsilon x_T\}+\mathbf{E}|X|I\{|X|>\varepsilon x_T\}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{T}.$$

Поэтому

$$Q_T^{cT}=e^{cT(Q_T-1)(1+o(1))}\geqslant e^{-c\varepsilon(1+o(1))}.$$

Учитывая (10), получим для всех достаточно больших T

$$P_T\geqslant e^{-\frac{\pi^2}{8}\frac{cv^2}{\alpha^2}\log\log T(1+\varepsilon/\alpha)}. \qquad (13)$$

Обозначим $k_n=n^n$, $J_n=(k_{n-1},k_n]$.

Лемма 3. *Если* $\mathbf{E}X^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}Y^2 < \infty$, *то для любого* $\gamma > 0$ *и всех достаточно больших* n *найдется* $T \in J_n$ *такое, что*

$$\mathbf{E}|X|I\{|X| > T\} + \mathbf{E}YI\{Y > T\} < \frac{\gamma}{T\log\log T}. \tag{14}$$

Доказательство леммы 3. Мы будем считать, что по крайней мере одна из случайных величин X или Y не ограничена. В противном случае утверждение леммы очевидно выполнено.

Обозначим $E_X(T) = \mathbf{E}|X|I\{|X| > T\}$, $E_Y(T) = \mathbf{E}YI\{Y > T\}$ и предположим, что

$$E_X(T) + E_Y(T) \geqslant \frac{\gamma}{T\log\log T}$$

для любого $T \in J_n$.

Обозначим $A = \{T \geqslant 8 : E_X(T) \geqslant E_Y(T)\}$. Ясно, что $TE_X(T) \to 0$ и $TE_Y(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Тогда

$$\mathbf{E}Y^2I\{Y \in J_n\} = -\int\limits_{J_n} yE_Y(dy) = \int\limits_{J_n} E_Y(y)dy + o(1)$$

$$\geqslant \int\limits_{J_n\setminus A} E_Y(y)dy + o(1) \geqslant \frac{\gamma}{2}\int\limits_{J_n\setminus A} \frac{dy}{y\log\log y} + o(1).$$

Аналогично,

$$\mathbf{E}X^2I\{|X| \in J_n\} \geqslant \frac{\gamma}{2}\int\limits_{J_n\cap A} \frac{dy}{y\log\log y} + o(1).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}Y^2I\{Y \in J_n\} + \mathbf{E}X^2I\{|X| \in J_n\} \geqslant \frac{\gamma}{2}\int\limits_{J_n} \frac{dy}{y\log\log y} + o(1) \to \frac{\gamma}{2}.$$

Но левая часть последнего неравенства должна стремиться к нулю при $n \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3. $\square$

По лемме 3 для всех достаточно больших n найдется t_n, такое, что $x_{t_n} \in J_{2n}$ и выполнено соотношение (14). При $\gamma = \varepsilon^2$ из (14) следует (9). Обозначим $T_n = t_1 + t_2 + \cdots t_n + n$, где $t_n = 1$ для малых n. Имеем $T_n \sim t_n$. Так как случайные векторы (X_j, Y_j) независимы и одинаково распределены, то

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{M}_n < \delta x_{t_n}, \widetilde{M}'_n < \delta x_{t_n}\right) = P_{t_n},$$

где

$$\widetilde{M}_n = \max_{T_{n-1}+1 \leqslant k \leqslant T_n} |S_k - R_k - S_{T_{n-1}+1} + R_{T_{n-1}+1}|,$$

$$\widetilde{M}'_n = \max_{T_{n-1}+1 \leqslant k \leqslant T_n} |S_{k-1} - R_k - S_{T_{n-1}} + R_{T_{n-1}+1}|.$$

Используя (13), заключаем, что $\sum_n P_{t_n} = \infty$, если δ выбрано близким к $\pi v/\sqrt{8}$ так, что $\pi^2 v^2 c\alpha^{-2}(1+\varepsilon^2/\alpha)/8 < 1$. По лемме Бореля–Кантелли

$$\liminf \frac{1}{x_{t_n}} \max\left\{\widetilde{M}_n, \widetilde{M}'_n\right\} \leqslant \delta \quad \text{п.н.}$$

Заметим, что $T_{n-1} \log\log T_{n-1} = o(x_{t_n}^2)$ и в силу закона повторного логарифма

$$\lim \frac{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant T_{n-1}+1} |S_k - R_k|}{x_{t_n}} = 0 \quad \text{п.н.},$$

$X_{T_{n-1}}/x_{t_n} \to 0$ п.н. Отсюда следует заключение теоремы. □

Литература

1. K. L. Chung, *On the maximum partial sums of sequences of independent random variables.* — Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 205–233.
2. N. C. Jain, W. E. Pruitt, *The other law of the iterated logarithm.* — Ann. Probab. **3** (1975), 1046–1049.
3. E. Csáki, *On the lower limits of maxima and minima of Wiener process and partial sums.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **43** (1978), 205–221.
6. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* — Теория вероятн. и ее примен. **30** (1993), 374–416.
5. А. И. Мартикайнен, А. Н. Фролов, Й. Штайнебах, *О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов восстановления.* — Теория вероятн. и ее примен. (В печати.)
6. A. N. Frolov, A. I. Martikainen, J. Steinebach, *On Chung's LIL and Csaki law for renewal processes.* — Periodica Math. Hungar. **41**, No. 1–2 (2000), 149–155.
7. A. N. Frolov, A. I. Martikainen, J. Steinebach, *Limit theorems for maxima of sums and renewal processes.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 261–274.

Martikainen A. I., Frolov A. N. On the Chung law for compound renewal processes.

We derive the Chung law for compound renewal processes generated by a sequence of independent identically distributed random vectors which components have finite second moments and may be dependent.

Санкт-Петербургский
государственный университет

E-mail: Alexander.Martikainen@pobox.spbu.ru
Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 11 ноября 2006 г.