Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

А. Ю. Зайцев

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

1. Введение

Цель этой статьи – вывести простейшие следствия из результата автора [17] об оптимальной оценке точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых $\mathbf{R}^d$-значных случайных векторов с конечными экспоненциальными моментами (см. теорему 1 ниже). Теорема 1 может рассматриваться как многомерное обобщение известных результатов Комлоша, Майора и Тушнади (КМТ) [7], а также А. И. Саханенко [10], обобщившего и существенно уточнившего результаты КМТ в случае неодинаково распределенных $\mathbf{R}^1$-значных случайных величин. Затем, в работе [11], А. И. Саханенко использовал результат [10] для получения оптимальных оценок точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых случайных величин ξ_j с конечными моментами вида $\mathbf{E}\, H\,(|\xi_j|)$, где $H\,(x)$ – монотонная функция, растущая не медленнее, чем x^2 и не быстрее, чем e^{cx}. Наиболее полные и изящно сформулированные результаты были получены в случае $H\,(x) = x^\gamma$, $\gamma \geq 2$. Следует также упомянуть, что У. Айнмаль [6] получил многомерный результат об оптимальной точности сильной гауссовской аппроксимации бесконечных последовательностей сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с $\mathbf{E}\, H\,(\|\xi_1\|) < \infty$. В настоящей статье, опираясь на результаты [17], мы делаем попытку получить многомерное обобщение результатов А. И. Саханенко [11]. В работе автора [17] был исследован наиболее важный случай, когда у слагаемых конечны экспоненциальные моменты. Тем самым, удалось обобщить на многомерный случай основной результат ра-

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00911, РФФИ-ННИО 04-01-04000, НШ 4222.2006.1, ИНТАС 03-51-5018 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

боты А. И. Саханенко [10]. В этой статье мы рассмотрим случай, когда у слагаемых конечны математические ожидания $\mathbf{E}\, H\left(\|\xi_j\|\right)$, где H – монотонная функция, упомянутая выше.

Задача об оценивании точности сильной аппроксимации намного содержательнее, чем задача об оценивании близости распределений сумм независимых случайных векторов. Требуется построить на одном вероятностном пространстве последовательности независимых случайных векторов $X_1, \ldots, X_n$ (с заданными распределениями) и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \ldots, Y_n$ таким образом, чтобы величина

$$\Delta(X, Y) = \max_{1 \le k \le n} \left\| \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} Y_i \right\|$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятностью. Именно к этой задаче сводится оценивание точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности.

Точность сильной аппроксимации в одномерном принципе инвариантности изучалась многими авторами (см., например, работы Ю. В. Прохорова [9], А. В. Скорохода [14], А. А. Боровкова [2], М. Черге и П. Ревеса [3] и библиографию в книге М. Черге и П. Ревеса [4] и в статьях Ш. Черге и П. Холла [5], П. Майора [8] и Ки-ман Шао [13]). Следует упомянуть недавние результаты А. И. Саханенко [12], который уточнил результаты [11], сформулировав оценки в терминах урезанных моментов.

Ниже нам потребуются некоторые обозначения. Распределения случайных векторов ξ будут обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$. Мы будем обозначать символом c положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными в различных местах текста. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$ при $b > 0$.

Пусть $\mathcal{A}_d(\tau)$, $\tau \ge 0$, $d \in \mathbf{N}$, – класс d-мерных распределений, введенный в работе автора [15], см. также [16–18]. Класс $\mathcal{A}_d(\tau)$ (с фиксированным $\tau \ge 0$) состоит из d-мерных распределений F, для которых функция $\varphi(z) = \varphi(F, z) = \log \int_{\mathbf{R}^d} e^{\langle z, x\rangle} F\{dx\}$ ($\varphi(0) = 0$) определена и аналитична при $\|z\|\,\tau < 1$, $z \in \mathbf{C}^d$, и $\left|d_u d_v^2\, \varphi(z)\right| \le \|u\| \tau \left\langle \mathbb{D} v, v\right\rangle$ для всех $u, v \in \mathbf{R}^d$ и $\|z\|\,\tau < 1$, где $\mathbb{D} = \operatorname{cov} F$ – ковариационный оператор, соответствующий F, а $d_u \varphi$ – производная функции φ в направлении u. Ниже мы будем также использовать обозначение $\operatorname{cov}\xi = \operatorname{cov}\mathcal{L}(\xi)$. Нам потребуются простейшие свойства классов $\mathcal{A}_d(\tau)$, перечисленные в [18].

Следующая теорема 1 доказана в работе автора [17].

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $\tau \geq 1$ и пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые случайные векторы с $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Предположим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $m_0 = 0$, $m_1, \dots, m_s = n$, удовлетворяющая следующим условиям. Пусть*

$$\zeta_k = \xi_{m_{k-1}+1} + \dots + \xi_{m_k}, \quad \operatorname{cov}\zeta_k = \mathbb{B}_k, \quad \mathcal{L}(\zeta_k) \in \mathcal{A}_d(\tau), \quad k = 1, \dots, s,$$

и предположим, что для всех $v \in \mathbf{R}^d$

$$C_1 \|v\|^2 \leq \left\langle \mathbb{B}_k\, v, v \right\rangle \leq C_2 \|v\|^2, \qquad k = 1, \dots, s, \tag{1.1}$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \dots, n$, и

$$\mathbf{E}\,\exp\left(\frac{a_1\,\Delta(X,Y)}{\tau d^{9/2}\log^* d}\right) \leq \exp\left(a_2\, d^{3+\alpha}\, \log^*(s/\tau^2)\right),$$

где a_1, a_2 – положительные величины, зависящие только от α, C_1, и C_2.

В случае независимых одинаково распределенных слагаемых теорема 1 была доказана автором в работе [16], в которой он убрал лишний логарифмический множитель из результата У. Айнмаля [6] и получил многомерный аналог результата КМТ [7]. Теорема 1 дает адекватное многомерное обобщение основного результата А. И. Саханенко [10]. В теореме 1 случайные векторы, вообще говоря, неодинаково распределены. Впрочем, они должны удовлетворять условию (1.1) на ковариационные операторы. Условие (1.1) порождает условия (1.5), (1.11) и (1.13) в результатах настоящей работы. Правдоподобная гипотеза состоит в том, что условие (1.1) в формулировке теоремы 1 может быть ослаблено. То же самое можно сказать ниже об условиях (1.5), (1.11) и (1.13). Во всяком случае подобных условий нет в работе автора [15] (которая, впрочем, не имеет непосредственного отношения к принципу инвариантности). Но разработка доказательства этой гипотезы требует, разумеется, привлечения некоторых новых идей и методов.

Если параметр $\tau \geq 1$ в теореме 1 существенно больше единицы, то применять теорему 1 следует к нормированным случайным величинам ξ_j/τ. Тогда

$$\mathcal{L}(\zeta_k/\tau) \in \mathcal{A}_d(1), \quad k = 1, \ldots, s,$$

и для справедливости утверждения теоремы 1 достаточно вместо (1.1) предположить, что

$$C_1 \tau^2 \|v\|^2 \leq \left\langle \mathbb{B}_k v, v \right\rangle \leq C_2 \tau^2 \|v\|^2, \qquad k = 1, \ldots, s.$$

Ясно, что это условие налагает меньшие ограничения на распределения случайных величин ξ_j по сравнению с (1.1). При этом $\log^*(s/\tau^2)$ переходит в $\log^* s$. Таким образом можно получить формально несколько более сильное утверждение, чем теорема 1. Но вся необходимая информация содержится и в самой теореме 1. Надо только правильно выбирать нормировку.

Следуя работе А. И. Саханенко [11], введем класс $\mathcal{G}(u)$, $u \geq 0$, таких положительных функций $G(\,\cdot\,)$, что функции $G(x)$ и $x/\log G(x)$ не убывают при $x > u$. Например, функции $G(x) = x^\gamma$, $\gamma > 0$, и $\exp\bigl(\lambda x^\beta\bigr)$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda > 0$, принадлежат $\mathcal{G}(e)$ и $\mathcal{G}(0)$ соответственно.

Для произвольного случайного вектора ξ мы будем обозначать $\xi^{[u]}$ его срезку на уровне $u > 0$:

$$\xi^{[u]} = \begin{cases} \xi, & \text{если } \|\xi\| \leq u, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Положим

$$\xi^{(u)} = \xi - \xi^{[u]}, \quad \xi^{\{u\}} = \xi^{[u]} - \mathbf{E}\,\xi^{[u]}. \tag{1.3}$$

Основными результатами данной работы являются следующая теорема 2 и ее следствия 1–3.

Теорема 2. *Пусть α, $u > 0$. Предположим что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные векторы с $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ и*

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(\|\xi_j\| > x\right) \leq 1/G(x), \quad \text{для всех } x > u. \tag{1.4}$$

Предположим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $m_0 = 0,\ m_1, \dots, m_s = n$, *удовлетворяющая следующим условиям. Пусть*

$$\zeta_k = \xi_{m_{k-1}+1} + \dots + \xi_{m_k}, \quad \operatorname{cov}\zeta_k = \mathbb{B}_k, \qquad k = 1, \dots, s,$$

и предположим, что для всех $v \in \mathbf{R}^d$ *и* $k = 1, \dots, s$

$$r^2u^2\,\|v\|^2 \le \langle \mathbb{B}_k\, v, v\rangle \le Cr^2u^2\,\|v\|^2 \tag{1.5}$$

с некоторыми постоянными $r \ge 2$ *и* $C \ge 1$. *Пусть*

$$B^2(u) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,\|\xi_j^{(u)}\|^2 \le u^2. \tag{1.6}$$

Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, \dots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \dots, n$, *и для всех* $x_0, x_1 \ge 0$ *и* $x \ge z \ge u$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,\Big(\Delta(X,Y) > x_0 + x_1 + x + A(u)\Big)&\\ &\leqslant 2\,\exp\left(-x_1^2/16\,B^2(u)\right) + \exp\left(-\frac{a_3\,x_0}{r\,u\,d^{9/2}\log^* d}\right)\\ &+ \mathbf{P}\,\big(\max_{1\le j\le n}\|\xi_j\| > z\big) + e\,G^{1-x/z}(z)/G(u),\end{aligned}$$

где

$$A(u) \overset{\text{def}}{=} \max_{1\le k\le n}\,\Big\|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}\,\xi_i^{[u]}\Big\| = \max_{1\le k\le n}\,\Big\|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}\,\xi_i^{(u)}\Big\|, \tag{1.7}$$

если $x_0 > a_4\,ru\,d^{15/2+\alpha}\log^* d\log^* s$ *и* $x_1 > c\,B(u)\sqrt{d}$, *где* a_3, a_4 *– положительные величины, зависящие только от* α *и* C, *а* c *– абсолютная постоянная.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 с*

$$G(x) = H(x)/L_H,$$

где $H : [0,\infty) \to \mathbf{R}^1$ *– такая неотрицательная неубывающая функция, что* $H(0) = 0$,

$$L_H \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,H\left(\|\xi_j\|\right) < \infty \tag{1.8}$$

и

$$G(u) \geq e. \tag{1.9}$$

Тогда утверждение теоремы 2 *справедливо с*

$$\mathbf{P}\ (\Delta(X,Y) > 5\,z) \leq \frac{2\,L_H}{H(z)} + \exp\left(-\frac{a_5\,z}{r\,u\,d^{9/2}\log^* d}\right),$$

если $z > a_6\,ru\,d^{15/2+\alpha}\log^* d \log^* s$, *где* a_5, a_6 – *положительные величины, зависящие только от* α *и* C.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $H : [0,\infty) \to \mathbf{R}^1$ – *такая неотрицательная функция, что* $H(0) = 0$, *функция* $H(x)/x^2$ *не убывает и функция* $H(x)/x^\lambda$ *не возрастает при некотором* $\lambda \geq 2$. *Предположим, что* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – *независимые случайные векторы с* $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, *и* $L_H < \infty$, *где величина* L_H *определена в* (1.8). *Положим*

$$K_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^{-1}(e^\lambda L_H), \tag{1.10}$$

где $H^{-1}(\,\cdot\,)$ – *обратная функция для* $H(\,\cdot\,)$. *Предположим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* $m_0 = 0$, $m_1, \ldots, m_s = n$, *удовлетворяющая следующим условиям. Пусть*

$$\zeta_k = \xi_{m_{k-1}+1} + \cdots + \xi_{m_k}, \quad \operatorname{cov}\zeta_k = \mathbb{B}_k, \qquad k = 1, \ldots, s,$$

и предположим, что для всех $v \in \mathbf{R}^d$ *и* $k = 1, \ldots, s$

$$r^2 K_H^2\,\|v\|^2 \leq \left\langle \mathbb{B}_k\,v, v\right\rangle \leq C r^2 K_H^2\,\|v\|^2 \tag{1.11}$$

с некоторыми постоянными $r \geq 2$ *и* $C \geq 1$. *Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов* $X_1, \ldots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, \ldots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \ldots, n$, *и, при* $z > a_6\,d^{15/2+\alpha}\log^* d \cdot r\,K_H \log^* s$,

$$\mathbf{P}\ (\Delta(X,Y) > 5\,z) \leq \frac{2\,L_H}{H(z)} + \exp\left(-\frac{a_5\,z}{rK_H\,d^{9/2}\log^* d}\right),$$

где a_5, a_6 – *положительные величины, зависящие только от* α *и* C (*те же, что в следствии* 1).

Замечание. В [19] был сформулирован аналогичный результат, но вместо того, что функция $H(x)/x^\lambda$ не возрастает, предполагалось, что

$$\mu = \sup_{x>0} \ x \frac{d}{dx} \log H(x) < \infty, \tag{1.12}$$

а величина K_H была определена формулой $K_H = H^{-1}(e^\mu L_H)$. Следствие 2 дает более общий результат, поскольку из (1.12) легко следует, что функция $H(x)/x^\mu$ не возрастает. Действительно, при $x \geq y > 0$ мы имеем

$$\log H(x) - \log H(y) = \int_y^x \frac{d}{dt} \log H(t)\, dt \leq \int_y^x \frac{\mu}{t}\, dt \leq \mu\,(\log x - \log y)\,.$$

С другой стороны, функция $H(x)$ в следствии 2 может не быть дифференцируемой.

Не нарушая общности, можно предполагать, что $H(1) = 1$ в следствиях 1 и 2. В противном случае мы можем применить результат к функции $H^*(\,\cdot\,) = H(\,\cdot\,)/H(1)$.

Следствие 3. *Предположим, что* $\alpha > 0$ *и* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *– независимые случайные векторы с* $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. *Пусть* $\gamma \geq 2$ *и*

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\, \|\xi_j\|^\gamma < \infty.$$

Предположим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $m_0 = 0$, $m_1, \dots, m_s = n$, *удовлетворяющая следующим условиям. Пусть*

$$\zeta_k = \xi_{m_{k-1}+1} + \dots + \xi_{m_k}, \quad \operatorname{cov} \zeta_k = \mathbb{B}_k, \qquad k = 1, \dots, s,$$

и предположим, что для всех $v \in \mathbf{R}^d$ *и* $k = 1, \dots, s$

$$e^2 r^2 L_\gamma^{2/\gamma}\, \|v\|^2 \leq \left\langle \mathbb{B}_k\, v, v \right\rangle \leq C\, e^2 r^2 L_\gamma^{2/\gamma}\, \|v\|^2 \tag{1.13}$$

с некоторыми постоянными $r \geq 2$ *и* $C \geq 1$. *Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов* $X_1, \dots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, \dots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$,

$\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \ldots, n$, *и, при* $z > a_6 d^{15/2+\alpha} \log^* d \cdot e\, r\, L_\gamma^{1/\gamma} \log^* s$,

$$\mathbf{P}\left(\Delta(X, Y) > 5\, z\right) \le 2\, L_\gamma\, z^{-\gamma} + \exp\left(-\frac{a_5\, z}{e\, r L_\gamma^{1/\gamma} d^{9/2} \log^* d}\right), \qquad (1.14)$$

где a_5, a_6 *– положительные величины, зависящие только от* α *и* C *(те же, что в следствии* 1*).*

Теорема 2 и следствия 1 и 3 являются многомерными аналогами несколько ослабленных вариантов одномерных результатов А. И. Саханенко [11]. Грубо говоря, в [11, теореме 5] такая же формулировка, как в следствии 3, но без экспоненциального слагаемого в правой части (1.14), без условия (1.13) и без каких бы то ни было ограничений на $z > 0$. Если $\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \ge 64\, L_\gamma^{2/\gamma}$, то условие (1.13) всегда выполняется в одномерной ситуации, поскольку $\mathbf{D}\, \xi_j \le 2\, L_\gamma^{2/\gamma}$, $j = 1, \ldots, n$, и мы всегда можем найти такие $m_1, \ldots, m_s$, что (1.13) справедливо с $r = C = 2$. Заметим, что при $z \le L_\gamma^{1/\gamma}$ неравенство (1.14) заведомо справедливо. Очевидно, что в случае $d = 1$, $r = 2$ экспоненциальный член может быть легко оценен сверху величиной $c\, L_\gamma\, z^{-\gamma}$ при $z > c\, L_\gamma^{1/\gamma}$ с абсолютной постоянной c. В вырожденном случае, когда $\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \le 64\, L_\gamma^{2/\gamma}$, требуемые оценки справедливы при любом построении случайных векторов $\{X_j\}$ и $\{Y_j\}$ на одном вероятностном пространстве. Таким образом, различие с результатом А. И. Саханенко состоит только в появлении логарифмического множителя $\log^* s$ в ограничениях на z. Ясно, что $\log^* s$ ведет себя как $\log^* n$ в случае независимых одинаково распределенных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и как логарифм дисперсий координат сумм $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ в общем случае.

Следствие 2 является естественным обобщением следствия 3 на случай общих функций "степенного типа" $H(\cdot)$, которые могут не совпадать с $H(x) \equiv |x|^\gamma$. Формула (1.10) для уровня урезания $u = K_H$, по-видимому, новая. А. И. Саханенко [11] применил ее в частном случае $H(x) \equiv |x|^\gamma$ (когда $K_H = e\, L_\gamma^{1/\gamma}$).

Теорему 2 можно рассматривать как аналог теоремы 4 из статьи А. И. Саханенко [11]. Ее доказательство представляет собой упрощенный вариант соответствующего доказательства из [11]. В полном объеме это доказательство обобщить пока не удалось из-за технических сложностей, возникающих в многомерном случае.

2. Доказательства

Для произвольного случайного вектора ξ и произвольного уровня урезания $u > 0$ определим векторы $\xi^{[u]}, \xi^{(u)}, \xi^{\{u\}}$ соотношениями (1.2) и (1.3). Предполагая $\mathbf{E}\,\|\xi\|^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\,\xi = 0$, мы имеем

$$\mathbf{E}\,\xi^{(u)} + \mathbf{E}\,\xi^{[u]} = \mathbf{E}\,\xi = 0$$

и, следовательно,

$$\left\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\right\| = \left\|\mathbf{E}\,\xi^{[u]}\right\| \le \mathbf{E}\,\left\|\xi^{(u)}\right\|.$$

Более того, для любых $v \in \mathbf{R}^d$

$$\left|\mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle\right| = \left|\mathbf{E}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle\right| \le \|v\|\,\mathbf{E}\left\|\xi^{(u)}\right\|. \tag{2.1}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left\langle \xi, v\right\rangle &= \mathbf{E}\left\langle \xi, v\right\rangle^2 = \mathbf{E}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle^2 + \mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2 \\ &\ge \mathbf{D}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle + \mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2. \end{aligned}\tag{2.2}$$

Согласно (2.1), (2.2) и по неравенству Коши–Буняковского, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle &= \mathbf{E}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle^2 - \left(\mathbf{E}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle\right)^2 \\ &= \mathbf{D}\left\langle \xi, v\right\rangle - \mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2 - \left(\mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle\right)^2 \\ &\ge \mathbf{D}\left\langle \xi, v\right\rangle - 2\,\mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2. \end{aligned}\tag{2.3}$$

Из неравенств (2.2) и (2.3) следует, что

$$2\,\mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2 \ge \mathbf{D}\left\langle \xi, v\right\rangle - \mathbf{D}\left\langle \xi^{[u]}, v\right\rangle \ge \mathbf{E}\left\langle \xi^{(u)}, v\right\rangle^2. \tag{2.4}$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные векторы, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Обозначим

$$\operatorname{cov}\xi_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При $u > 0$ рассмотрим независимые гауссовские случайные векторы $\eta_1^{\{u\}}, \ldots, \eta_n^{\{u\}}$ с

$$\mathbf{E}\,\eta_j^{\{u\}} = 0, \quad \operatorname{cov}\eta_j^{\{u\}} = \operatorname{cov}\xi_j^{\{u\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}_j^{\{u\}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В соответствии с (2.4), для любых $v \in \mathbf{R}^d$ мы имеем

$$2\,\mathbf{E}\left\langle \xi_j^{(u)}, v\right\rangle^2 \geq \left\langle \mathbb{D}_j\, v, v\right\rangle - \left\langle \mathbb{D}_j^{\{u\}}\, v, v\right\rangle \geq \mathbf{E}\left\langle \xi_j^{(u)}, v\right\rangle^2, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Таким образом, операторы

$$\mathbb{D}_j - \mathbb{D}_j^{\{u\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}_j^{(u)}$$

положительно определены и могут рассматриваться, как ковариационные операторы. Поэтому мы можем построить такие гауссовские векторы $\eta_j^{(u)}$, что они имеют

$$\mathbf{E}\,\eta_j^{(u)} = 0, \quad \operatorname{cov}\eta_j^{(u)} = \mathbb{D}_j^{(u)},$$

независимы в совокупности и независимы от векторов $\eta_j^{\{u\}}$. Разумеется, это возможно, если вероятностное пространство достаточно богато. Обозначим $\eta_j = \eta_j^{(u)} + \eta_j^{\{u\}}$. Ясно, что

$$\mathbf{E}\,\eta_j = 0, \quad \operatorname{cov}\eta_j = \mathbb{D}_j\,.$$

Используя стандартное средство доказательства теорем о сильной аппроксимации – Лемму А из работы Беркеша и Филиппа [1], мы можем взять ξ_j в качестве X_j и η_j в качестве Y_j в доказательстве теоремы 2, выбирая ниже специальным образом совместное распределение $\left\{\xi_j^{\{u\}}\right\}$ и $\left\{\eta_j^{\{u\}}\right\}$.

Обозначая $\mathbb{D}^{(u)}$ ковариационный оператор суммы $\sum_{j=1}^n \eta_j^{(u)}$, мы имеем

$$\mathbb{D}^{(u)} = \sum_{j=1}^n \mathbb{D}_j^{(u)}. \tag{2.6}$$

Пусть величина $B^2(u)$ определена равенством (1.6). Согласно (1.6), (2.5) и (2.6), для любых $v \in \mathbf{R}^d$ справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left\langle \xi_j^{(u)}, v\right\rangle^2 \leq \left\langle \mathbb{D}^{(u)} v, v\right\rangle \leq 2\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left\langle \xi_j^{(u)}, v\right\rangle^2 \leq 2\,B^2(u)\,\|v\|^2\,. \tag{2.7}$$

Пусть σ_u^2 – максимальное собственное число ковариационного оператора $\mathbb{D}^{(u)}$. Согласно (2.7),

$$\sigma_u^2 = \max_{\|v\|=1}\left\langle \mathbb{D}^{(u)} v, v\right\rangle \leq 2\,B^2(u). \tag{2.8}$$

Пусть $Z, Z_1, \ldots, Z_d$ – независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины. Используя традиционные методы получения экспоненциальных неравенств, легко показать, что существует такая абсолютная постоянная c, что для любых $x > c\sigma_u\sqrt{d}$,

$$\mathbf{P}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(u)}\right\| > x\right) \leq \mathbf{P}\left(\sigma_u^2\sum_{k=1}^{d}Z_j^2 > x^2\right) \leq \exp\left(-x^2/8\sigma_u^2\right). \quad (2.9)$$

Достаточно заметить, что $\mathbf{E}\, e^{hZ^2} = (1-2h)^{-1/2}$ при $0 < h < 1/2$, и применить экспоненциальное неравенство Чебыщева, выбирая $h = 1/6$.

Положим

$$\Delta = \Delta(\xi, \eta), \quad \Delta^{\{u\}} = \Delta\big(\xi^{\{u\}}, \eta^{\{u\}}\big), \quad \Delta_u = \Delta\big(\xi - \mathbf{E}\,\xi^{[u]}, \eta^{\{u\}}\big). \quad (2.10)$$

Легко видеть, что

$$\Delta \leq \Delta_u + \delta_u + A(u), \quad (2.11)$$

где величина $A(u)$ определена в (1.7), а

$$\delta_u = \Delta(\eta, \eta^{\{u\}}).$$

Формулировка и доказательство следующей леммы почти буквально совпадают с формулировкой и доказательством теоремы 3 из работы А. И. Саханенко [11]. Доказательство приводится здесь для полноты изложения.

Лемма 1. *Пусть $u > 0$, $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$ и*

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\left(\|\xi_j\| > x\right) \leq 1/G(x), \quad \text{для всех } x > u. \quad (2.12)$$

Тогда для всех $x_0 \geq 0$ и $x \geq z \geq u$

$$\mathbf{P}\left(\Delta_u > x_0 + x\right) \leq \mathbf{P}\left(\Delta^{\{u\}} > x_0\right) + \mathbf{P}\left(\max_{1\leq j\leq n}\|\xi_j\| > z\right) + e\,G^{1-x/z}(z)/G(u). \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $x_0 \geq 0$ и $x \geq z \geq u$. Положим

$$Z_j = \big\|\xi_j^{[z]} - \xi_j^{[u]}\big\| = \big\|\xi_j^{(z)} - \xi_j^{(u)}\big\|.$$

Ясно, что

$$Z_j = \begin{cases} \|\xi_j\|, & \text{если } u < \|\xi_j\| \le z, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Согласно (1.3), (2.10) и (2.14), мы имеем

$$\Delta_u \le \Delta^{\{u\}} + \sum_{j=1}^{n} \|\xi_j^{(u)}\| \le \Delta^{\{u\}} + \sum_{j=1}^{n} \|\xi_j^{(z)}\| + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\Delta_u > x_0 + x\right) \le \mathbf{P}\left(\Delta^{\{u\}} > x_0\right) + \mathbf{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|\xi_j\| > z\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j > x\right). \tag{2.15}$$

Покажем, что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j > x\right) \le e\, G^{1-x/z}(z)/G(u). \tag{2.16}$$

Ясно, что из (2.15) и (2.16) следует (2.13). Согласно (2.12) и в силу неравенства Чебыщева,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j > x\right) &\le e^{-hx} \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E} \exp(hZ_j) \\ &\le \exp\left(-hx + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left(\exp\left(hZ_j\right) - 1\right)\right) \\ &\le \exp\left(-hx - \int_u^z e^{ht}\, dF(t)\right), \quad \text{для любых } h > 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Положим здесь $h = z^{-1} \log G(z)$. По определению класса $\mathcal{G}(u)$, мы имеем $ht = tz^{-1} \log G(z) \le \log G(t)$ при $u \le t \le z$. Поэтому, интегрируя по частям и используя (2.12), мы получаем

$$
\begin{aligned}
-\int_u^z e^{ht}\,dF(t) &\le -\int_u^z G(t)\,dF(t)\\
&= G(u)\,F(u) - G(z)\,F(z) + \int_u^z F(t)\,dG(t)\\
&\le 1 + \int_u^z \frac{dG(t)}{G(t)} = 1 + \log\bigl(G(z)/G(u)\bigr).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Легко видеть, что из (2.17) и (2.18) следует (2.16). □

Доказательство теоремы 2. Согласно (2.11) и (2.13), для всех $x_0, x_1 \ge 0$ и $x \ge z \ge u$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\,\bigl(\Delta > x_0 + x_1 + x + A(u)\bigr) &\le \mathbf{P}\,\bigl(\delta_u > x_1\bigr) + \mathbf{P}\,\bigl(\Delta^{\{u\}} > x_0\bigr)\\
&+ \mathbf{P}\,\bigl(\max_{1\le j\le n} \|\xi_j\| > z\bigr) + e\,G^{1-x/z}(z)/G(u).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Используя неравенство Леви и учитывая, что $\eta_j - \eta_j^{\{u\}} = \eta_j^{(u)}$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\,\left(\delta_u > x_1\right) &= \mathbf{P}\,\left(\max_{1\le k\le n} \left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\eta_j - \eta_j^{\{u\}}\right)\right\| > x_1\right)\\
&\le 2\,\mathbf{P}\,\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(u)}\right\| > x_1\right).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Согласно (2.8), (2.9) и (2.20), мы имеем

$$
\mathbf{P}\,\left(\delta_u > x_1\right) \le 2\,\exp\left(-x_1^2/16\,B^2(u)\right)
\tag{2.21}
$$

для любых $x_1 > c\,B(u)\sqrt{d}$, где c – абсолютная постоянная. Обозначим

$$
\zeta_k^{\{u\}} = \xi_{m_{k-1}+1}^{\{u\}} + \dots + \xi_{m_k}^{\{u\}}, \qquad \operatorname{cov}\zeta_k^{\{u\}} = \mathbb{B}_k^{\{u\}}, \qquad k = 1,\dots,s.
$$

Ясно, что

$$
\mathbb{B}_k = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \mathbb{D}_j, \qquad \mathbb{B}_k^{\{u\}} = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \mathbb{D}_j^{\{u\}}, \qquad k = 1,\dots,s,
\tag{2.22}
$$

и, в силу (1.6), (2.5) и (2.22), для любых $v \in \mathbf{R}^d$

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \mathbf{E} \left\langle \xi_j^{(u)}, v \right\rangle^2 \le \left\langle \mathbb{B}_k v, v \right\rangle - \left\langle \mathbb{B}_k^{\{u\}} v, v \right\rangle \le 2 \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \mathbf{E} \left\langle \xi_j^{(u)}, v \right\rangle^2$$
$$\le 2\, B^2(u)\, \|v\|^2 \le 2\, u^2\, \|v\|^2 . \qquad (2.23)$$

Напомним, что $r \ge 2$. Используя (1.5) и (2.23), нетрудно убедиться в том, что для любых $v \in \mathbf{R}^d$

$$r^2 u^2\, \|v\|^2 /2 \le \left\langle \mathbb{B}_k^{\{u\}} v, v \right\rangle \le C r^2 u^2\, \|v\|^2 , \qquad k = 1, \ldots, s. \qquad (2.24)$$

Легко видеть, что любое распределение, сосредоточенное на шаре $\left\{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \le 2u\right\}$, (и, в частности, $\mathcal{L}(\xi_j^{\{u\}})$) принадлежит $\mathcal{A}_d(cu)$, где c – некоторая абсолютная постоянная. Пользуясь свойствами классов $\mathcal{A}_d(\tau)$, мы видим, что

$$\mathcal{L}\big(\xi_j^{\{u\}}/cru\big) \in \mathcal{A}_d(1/r) \implies \mathcal{L}\big(\zeta_k^{\{u\}}/cru\big) \in \mathcal{A}_d(1/r) \subset \mathcal{A}_d(1).$$

Согласно теореме 1, примененной (при $\tau = 1$) к векторам $\xi_j^{\{u\}}/cru$, существует такая конструкция, что совместное распределение $\big\{\xi_j^{\{u\}}\big\}$ и $\big\{\eta_j^{\{u\}}\big\}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E} \exp\left(\frac{a_7\, \Delta^{\{u\}}}{r\, u\, d^{9/2} \log^* d}\right) \le \exp\left(a_8\, d^{3+\alpha}\, \log^* s\right),$$

где a_7, a_8 – положительные величины, зависящие только от α и C. По неравенству Чебыщева,

$$\mathbf{P}\left(\Delta^{\{u\}} > x_0\right) \le \exp\left(a_8\, d^{3+\alpha}\, \log^* s - \frac{a_7\, x_0}{r\, u\, d^{9/2} \log^* d}\right)$$
$$\le \exp\left(-\frac{a_7\, x_0}{2r\, u\, d^{9/2} \log^* d}\right), \qquad (2.25)$$

если $a_8\, d^{3+\alpha}\, \log^* s < \frac{a_7\, x_0}{2r\, u\, d^{9/2} \log^* d}$.

Пользуясь соотношениями (2.19), (2.21) и (2.25), мы получаем, что при $x_0 > \frac{2r\, u\, a_8\, d^{15/2+\alpha}\, \log^* d \log^* s}{a_7}$, $x_1 > c\, B(u)\sqrt{d}$ и $x \ge z \ge u$

$$\mathbf{P}\left(\Delta > x_0 + x_1 + x + A(u)\right) \le 2\, \exp\big(-x_1^2/16\, B^2(u)\big)$$
$$+ \exp\left(-\frac{a_7\, x_0}{2r\, u\, d^{9/2} \log^* d}\right) + \mathbf{P}\big(\max_{1 \le j \le n} \|\xi_j\| > z\big) + e\, G^{1-x/z}(z)/G(u).$$

Доказана теорема 2. □

Замечание. Анализ доказательства теоремы 2 показывает, что условия (1.5) и (1.6) нужны только для доказательства (2.24). Поэтому мы можем заменить условия (1.5) и (1.6) в формулировке теоремы 2, предполагая вместо них справедливость (2.24). Это может сделать утверждение более общим.

Доказательство следствия 1. Мы применим теорему 2 в случае, когда

$$G(x) = H(x)/L_H \quad \text{и} \quad u \le z = x_0 = x_1 < x = 2z. \tag{2.26}$$

Согласно (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7), мы имеем

$$A(u)/u \le B^2(u)/u^2 \le 1, \tag{2.27}$$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|\xi_j\| > z\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(\|\xi_j\| > z\right) \le L_H/H(z) \tag{2.28}$$

и справедливо неравенство (1.4). Наконец, по теореме 2 и в силу неравенств (1.9), (2.26), (2.27) и (2.28),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\ (\Delta > 5z) &\le \mathbf{P}\ (\Delta > 4z + A(u)) \\ &= \mathbf{P}\ (\Delta > x_0 + x_1 + x + A(u)) \\ &\le 2\exp\left(-z^2/16\,u^2\right) + \exp\left(-\frac{a_3\, z}{r\, u\, d^{9/2}\log^* d}\right) \\ &+ \mathbf{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|\xi_j\| > z\right) + e/G(z)G(u) \\ &\le \exp\left(-\frac{a_5\, z}{r\, u\, d^{9/2}\log^* d}\right) + \frac{2L_H}{H(z)},\end{aligned} \tag{2.29}$$

если $z > a_6\, ru\, d^{15/2+\alpha}\log^* d \log^* s$, где a_5, a_6 – положительные величины, зависящие только от α и C. Заметим, что множитель перед экспонентой может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора величины a_6 достаточно большой. □

Доказательство следствия 2. Пусть величины L_H и K_H определены равенствами (1.8) и (1.10) соответственно. Чтобы применить следствие 1, мы должны проверить выполнение условий $G(\cdot) \in \mathcal{G}(u)$, (1.4), (1.6) и (1.9) с $G(x) = H(x)/L_H$ и

$$u = K_H. \tag{2.30}$$

В соответствии с (1.10) и (2.30), мы имеем $G(u) = e^\lambda \geq e^2$. Таким образом, выполнено (1.9). Заметим, что, в условиях следствия 2, функция $x/\log G(x)$ не убывает при $x > u$. Действительно, при $x \geq y \geq u$ мы имеем $G(y) \geq G(u) = e^\lambda$ и $\frac{G(x)}{x^\lambda} \leq \frac{G(y)}{y^\lambda}$. Обозначая $t = x/y \geq 1$, $q = G(y)$, мы получаем $q \geq e^\lambda$, $t^\lambda \leq e^{\lambda(t-1)} \leq q^{t-1}$ и $G(x) \leq qt^\lambda \leq q^t$. Следовательно, $\log G(x) \leq t \log q = \frac{x}{y} \log G(y)$. Таким образом, $G(\,\cdot\,) \in \mathcal{G}(u)$. Заметим, что если функция $H(x)/x^2$ не убывает, то при $x > 0$

$$\max\biggl\{B^2(x)/x^2, \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\,(\|\xi_j\| > x)\biggr\} \leq \frac{L_H}{H(x)} = \frac{1}{G(x)}. \qquad (2.31)$$

Таким образом, проверено (1.4). Согласно (1.10) и (2.31), мы имеем

$$B^2(u) \leq u^2 L_H / H(u) = u^2 e^{-\lambda} \leq u^2. \qquad (2.32)$$

Доказано (1.6). Остается применить следствие 1. □

Доказательство следствия 3. Достаточно применить следствие 2 для функций $H(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \geq 2$, с $\lambda = \gamma$ и $K_H = e\, L_\gamma^{1/\gamma}$. □

Литература

1. I. Berkes, W. Philipp, *Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.* — Ann. Probab. **7** (1979), 29–54.
2. А. А. Боровков, *О скорости сходимости в принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 217–234.
3. M. Csörgő, P. Révész, *A new method to prove Strassen type laws of invariance principle.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **31** (1975), 255–259; 261–269.
4. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* New York, Academic Press, 1981.
5. S. Csörgő, P. Hall, *The Komlós–Major–Tusnády approximations and their applications.* — Austral. J. Statist. **26**, № 2 (1984), 189–218.
6. U. Einmahl, *Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case.* — J. Multivar. Anal. **28** (1989), 20–68.
7. J. Komlós, P. Major, G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131; **34** (1976), 34–58.
8. P. Major, *On the invariance principle for sums of independent identically distributed random variables.* — J. Multivar. Anal. **8** (1978), 487–517.
9. Ю. В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 177–238.

10. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. т. 3, Новосибирск, Наука, 1984, с. 4–49.
11. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР. т. 5, Новосибирск, Наука, 1985, с. 27–44.
12. A. I. Sakhanenko, *Estimates in the Invariance Principle in terms of truncated moments.* — В кн.: IV International Conference Limit Theorems and Their Applications. Abstracts. Novosibirsk, 2006, с. 28.
13. Qi-Man Shao, *Strong approximation theorems for independent random variables and their applications.* — J. Multivar. Anal. **52**, № 1 (1995), 107–130.
14. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Киев, — Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
15. А. Ю. Зайцев, *Оценки расстояния Леви–Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных величин с конечными экспоненциальными моментами.* — Теория вероятн. и ее примен. **31** (1986), 246–265.
16. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Komlós, Major and Tusnády for vectors with finite exponential moments.* — ESAIM : Probability and Statistics **2** (1998), 41–108.
17. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments.* I; II; III. — Теория вероятн. и ее примен. **45** (2000), 718–738; **46** (2001), 535–561; 744–769.
18. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem.* — В кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Bejing 2002. Vol. III. Invited Lectures. 2002, с. 107–116.
19. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem.* — В кн.: IV International Conference Limit Theorems and Their Applications. Abstracts. Novosibirsk, 2006, с. 35.

A. Yu. Zaitsev. Estimates for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle.

The aim of this paper is to derive simplest consequences of the author's result [17]. We obtain bounds for the rate of strong Gaussian approximation of sums of independent $\mathbf{R}^d$-valued random variables ξ_j having finite moments of the form $\mathbf{E}\,H\,(\|\xi_j\|)$, where $H\,(x)$ is a monotone function growing not slower than x^2 and not faster than e^{cx}. A multidimensional version of the results of Sakhanenko [11] is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 ноября 2006 г.