Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СКАЧКООБРАЗНЫХ ДИФФУЗИЙ

1. Скачкообразная диффузия. Пусть $N(t)$, $t \geq 0$, – процесс Пуассона с параметром λ_1. Процесс $N(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leq t\Big\} = \sum_{l=1}^{\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{[0,\infty)}\Big(t - \sum_{k=1}^{l} \tau_k\Big),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geq t) = e^{-\lambda_1 t}$.

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Процесс

$$N_c(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,$$

называется *сложным процессом Пуассона.*

Этот процесс можно считать вырожденным скачкообразным диффузионным процессом, когда в качестве диффузии выступает постоянный процесс. Диффузиям со скачками посвящено много работ. Наиболее интересной диффузией со скачками является процесс

$$Z^{(\mu)}(t) := \mu t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad W(0) = 0,$$

где $W(t)$, $t \geq 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса N и величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$. Процесс $Z^{(\mu)}$ называется *скачкообразным броуновским движением с линейным сносом* μ. Это – однородный процесс с независимыми приращениями.

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00911, РФФИ-ННИО 04-01-04000, НШ 4222.2006.1, ИНТАС 03-51-5018 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

В работе рассматриваются некоторые обобщения диффузий со скачками. Одним из основных аспектов является то, что величина скачка может зависеть не только от величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, но и от положения процесса перед скачком. Таким образом, скачок задается некоторой функцией $\rho(x, y)$, где в первый аргумент будет подставляться значение процесса перед скачком, а во второй – величины Y_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Следующее обобщение связано с моментами скачков. В классической ситуации моментами служат времена скачков процесса Пуассона, т.е. моменты следующие через интервалы τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Можно рассмотреть более общие моменты, зависящие от поведения диффузии между скачками. Такие моменты являются первыми моментами превышения уровней τ_k некоторым интегральным функционалом от диффузии.

Основной целью работы является получение результатов, позволяющих вычислять распределения функционалов от обобщенных скачкообразных диффузий. Попутно решается задача о преобразовании мер, отвечающих различным скачкообразным диффузиям.

Для диффузий без скачков эти вопросы были решены в классических работах М. Каца [1] и И. В. Гирсанова [2]. Для процессов с независимыми приращениями такие задачи изучены в монографии А. В. Скорохода [3]. Для скачкообразного броуновского движения с линейным сносом интересные результаты о распределении супремума процесса получил Э. Мордецкий [4]. Работа Э. Мордецкого повлияла на написание автором статьи [5], в которой, при определенных предположениях, получены явные формулы для совместного распределения инфимума и супремума скачкообразного броуновского движения.

Рассмотрим однородную диффузию X. Такая диффузия является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любых $s \le t \le T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \qquad (1.1)$$

где функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица, $\sigma(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0) = x$.

Скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется следующим образом. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для $\tau_0 = 0 \le t \le \tau_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, а для $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \le t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$, $l = 1, 2, \ldots$, определяем J как решение стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\big(J\big(\sum_{k=1}^{l} \tau_k-\big), Y_l\big) + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \sigma(J(u))\,dW(u), \quad (1.2)$$

где $\rho(x, y)$ – некоторая функция. В момент $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $\rho\big(J\big(\sum_{k=1}^{l} \tau_k-\big), Y_l\big)$. Здесь и далее полагаем $q- = \lim\limits_{s \uparrow q} s$.

Рассмотрим семейство $X_{s,x}(t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in [s, T]$, решений стохастических дифференциальных уравнений

$$X_{s,x}(t) = x + \int_s^t \mu(X_{s,x}(u))\,du + \int_s^t \sigma(X_{s,x}(u))\,dW(u).$$

Тогда с вероятностью единица для каждого фиксированного момента s

$$X(t) = X_{s,X(s)}(t) \qquad \text{для} \quad s \le t \le T.$$

Ясно, что для $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \le t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$

$$J(t) = X_{\sum_{k=1}^{l} \tau_k,\, \rho\left(J\left(\sum_{k=1}^{l} \tau_k-\right), Y_l\right)}(t). \quad (1.3)$$

Дифференциальная форма уравнения (1.2) имеет вид

$$dJ(t) = \mu(J(t))\,dt + \sigma(J(t))\,dW(t) + \big(\rho\big(J(t-), Y_{N(t)}\big) - J(t-)\big)\,dN(t),$$
$$J(0) = x. \quad (1.4)$$

Пусть $G(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Справедливо следующее обобщение формулы Ито:

$$dG(J(t)) = G'(J(t))\big(\mu(J(t))\,dt + \sigma(J(t))\,dW(t)\big) + \frac{\sigma^2(J(t))}{2} G''(J(t))\,dt +$$
$$+ \big(G\big(\rho\big(J(t-), Y_{N(t)}\big)\big) - G(J(t-))\big)\,dN(t). \quad (1.5)$$

Формула (1.5) может быть записана в интегральном виде:

$$G(J(t)){-}G(J(0)) =$$

$$= \int_0^t G'(J(u))\sigma(J(u))\,dW(u) + \int_0^t \Big(G'(J(u))\mu(J(u)) + \frac{\sigma^2(J(u))}{2}G''(J(u))\Big)\,du$$

$$+ \int\limits_{[0,t]} \big(G(\rho\big(J(u-), Y_{N(u)}\big)) - G(J(u-))\big)\,dN(u). \qquad (1.6)$$

Эта формула является следствием определения процесса J и классический формулы Ито. Действительно, положим $t_l := \sum_{k=1}^{l} \tau_k$, $l = 1, 2, \dots$ и $t_0 = 0$. Тогда

$$G(J(t)){-}G(J(0)) = \sum_{l=1}^{N(t)} (G(J(t_l)){-}G(J(t_{l-1}))) + G(J(t)) - G(J(t_{N(t)})) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N(t)} (G(J(t_l-)) - G(J(t_{l-1}))) + G(J(t)) - G(J(t_{N(t)})) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N(t)} (G(J(t_l)) - G(J(t_l-))).$$

Имеем,

$$\sum_{l=1}^{N(t)} (G(J(t_l)) - G(J(t_l-))) = \sum_{l=1}^{N(t)} \big(G(\rho\big(J(t_l-), Y_l\big)) - G(J(t_l-))\big) =$$

$$= \int\limits_{[0,t]} \big(G(\rho\big(J(u-), Y_{N(u)}\big)) - G(J(u-))\big)\,dN(u).$$

С другой стороны,

$$G(J(t_l-)){-}G(J(t_{l-1})) =$$

$$= G\Big(\rho\big(J(t_{l-1}-), Y_{l-1}\big) + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \mu(J(u))\,du + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \sigma(J(u))\,dW(u)\Big) -$$

$$-G(\rho\big(J\big(t_{l-1}-\big),Y_{l-1})\big),$$

и применение формулы Ито дает интегральную часть формулы (1.6).

Важно, что

$$d\mathbf{E}_x G(J(t))=\mathbf{E}_x\{G'(J(t))\mu(J(t))\}\,dt+\frac{1}{2}\mathbf{E}_x\{\sigma^2(J(t))G''(J(t))\}\,dt$$
$$+\lambda_1\big(\mathbf{E}_x G(\rho(J(t),Y))-\mathbf{E}_x G(J(t))\big)\,dt, \qquad (1.7)$$

где Y – случайная величина, не зависящая от процесса J и распределенная как Y_1. Это является следствием того, что процесс $J(t)$ измерим относительно σ-алгебры

$$\mathcal{G}_t=\sigma\big(W(s),0\le s\le t,Y_k,\tau_k,k\le N(t)\big),$$

порожденной броуновским движением до момента времени t и величинами Y_k, τ_k до момента $N(t)$. Процесс $J(t-)$ измерим, соответственно, относительно $\mathcal{G}_{t-}$. Пара $dN(t)$, $Y_{N(t)}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_{t-}$. Кроме того, $\mathbf{E}_x dW(t)=0$, $\mathbf{E}_x dN(t)=\lambda_1\,dt$.

Пусть $G(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, имеющая обратную $G^{(-1)}(x)$, то есть $G^{(-1)}(G(x))=x$. Тогда $\widetilde{J}(t):=G(J(t))$ снова является скачкообразной диффузией. Таким образом, класс скачкообразных диффузий замкнут относительно композиций с обратимыми дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

Для доказательства этого выведем стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $\widetilde{J}(t)$. Применяя формулу Ито, имеем

$$dG(J(t))=G'(J(t))\mu(J(t))\,dt+G'(J(t))\sigma(J(t))\,dW(t)+$$
$$+\frac{\sigma^2(J(t))}{2}G''(J(t))\,dt+\big(G(\rho\big(J(t-),Y_{N(t)}\big))-G(J(t-))\big)\,dN(t).$$

Полагая $\tilde\rho(x,y):=G(\rho(G^{(-1)}(x),y))$,

$$\tilde\mu(x):=G'(G^{(-1)}(x))\mu(G^{(-1)}(x))+\frac{1}{2}G''(G^{(-1)}(x))\sigma^2(G^{(-1)}(x)), \qquad (1.8)$$
$$\tilde\sigma(x):=G'(G^{(-1)}(x))\sigma(G^{(-1)}(x)), \qquad (1.9)$$

и используя равенства $J(t)=G^{(-1)}(\widetilde{J}(t))$, получаем

$$d\widetilde{J}(t)=\tilde\mu(\widetilde{J}(t))\,dt+\tilde\sigma(\widetilde{J}(t))\,dW(t)+$$

$$+\big(\tilde{\rho}\big(\widetilde{J}(t-),Y_{N(t)}\big)-\widetilde{J}(t-)\big)dN(t),\qquad \widetilde{J}(0)=G(x),\tag{1.10}$$

Следовательно, для процесса $\widetilde{J}(t)=G(J(t))$ выполняется уравнение вида (1.4), и поэтому процесс $\widetilde{J}(t)=G(J(t))$, $t\geq 0$, является скачкообразной диффузией.

2. Примеры скачкообразных диффузий. Предположим, что броуновское движение W, процесс Пуассона N и величины $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы. Положим $\nu=\mu-\sigma^2/2$,

$$Z^{(\nu)}(t):=(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)+\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,\qquad W(0)=0.\tag{2.1}$$

Пусть $G(x)=e^x$. Тогда, согласно (1.10), процесс $\widetilde{Z}(t)=e^{Z^{(\nu)}(t)}$ является решением линейного уравнения

$$d\widetilde{Z}(t)=\mu\widetilde{Z}(t)\,dt+\sigma\widetilde{Z}(t)\,dW(t)+\widetilde{Z}(t-)\big(e^{Y_{N(t)}}-1\big)\,dN(t),\quad \widetilde{Z}(0)=1,\tag{2.2}$$

поскольку $\tilde{\rho}(x,y)=\exp(\ln x+y)=xe^y$. Процесс $\widetilde{Z}$ естественно назвать *скачкообразным геометрическим (экспоненциальным) броуновским движением*, по аналогии с диффузией без скачков, когда $Y_k\equiv 0$, $k=1,2,\dots$. Такие процессы часто используются в различных моделях, связанных с финансовой математикой (см., например, [6]).

Следующий пример возникает по аналогии с бесселевскими процессами, которые являются радиальной частью многомерного броуновского движения с независимыми координатами.

Пусть $\{W_l(s),s\geq 0\}$, $l=1,2,\dots,n$, – семейство независимых броуновских процессов. Процесс $R^{(n)}$, определяемый формулой

$$R^{(n)}(t):=\sqrt{W_1^2(t)+W_2^2(t)+\cdots+W_n^2(t)},\qquad t\geq 0,$$

называется *n-мерным бесселевским процессом* или *бесселевским процессом порядка $n/2-1$*.

Пусть скачкообразные диффузии $\{J_l(s),s\geq 0\}$, $l=1,2,\dots,n$, определяются следующими уравнениями:

$$dJ_l(t)=dW_l(t)+\Big(\sqrt{\alpha J_l^2(t-)+Y_{N(t)}^{(l)}}-J_l(t-)\Big)\,dN(t),\tag{2.3}$$

где $(Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}, \dots, Y_k^{(n)})$, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные случайные вектора с неотрицательными компонентами, а α – произвольная неотрицательная константа. Выбор функции скачков $\rho(x,y) = \sqrt{\alpha x^2 + y}$ предопределен желанием получить следующий результат: радиальная часть многомерной скачкообразной диффузии $\vec{J}(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t))$ снова является скачкообразной диффузией.

Пусть

$$Z_n(t) := \sqrt{J_1^2(t) + J_2^2(t) + \cdots + J_n^2(t)}, \qquad t \geq 0.$$

Тогда Z_n является скачкообразной диффузией, определяемой уравнением

$$dZ_n(t) = \frac{n-1}{2Z_n(t)}\,dt + dW(t) + \Big(\sqrt{\alpha Z_n^2(t-) + S_{N(t)}} - Z_n(t-)\Big)\,dN(t), \tag{2.4}$$

где $S_k := \sum\limits_{l=1}^{n} Y_k^{(l)}$.

Для доказательства этого результата применим формулу Ито (1.5) $(G(x) = x^2)$ к каждому слагаемому процесса $Y_n(t) = Z_n^2(t)$. Имеем

$$dY_n(t) = 2\sum_{l=1}^{n} J_l(t)\,dW_l(t) + n\,dt + \sum_{l=1}^{n}\big((\alpha-1)J_l^2(t-) + Y_{N(t)}^{(l)}\big)dN(t). \tag{2.5}$$

Воспользуемся следующим вариантом известного результата.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathcal{G}_t^l = \sigma\big(W_l(s), 0 \leq s \leq t, Y_k^{(l)}, \tau_k, k \leq N(t)\big)$ – *σ-алгебра событий, порожденная броуновским движением* W_l, $l = 1, \dots, n$, *до момента времени* t *и величинами* $Y_k^{(l)}$, τ_k *до момента* $N(t)$. *Пусть* $f_l(t)$, $t \geq 0$, *при каждом* l – *прогрессивно измеримый процесс относительно семейства σ-алгебр* $\mathcal{G}_t^l$.

Тогда существует такой процесс броуновского движения W, *что для всех* $t > 0$ *величины* $W(t)$ *измеримы относительно* $\mathcal{G}_t := \bigcup_{l=1}^{n} \mathcal{G}_t^l$, *и*

$$\sum_{l=1}^{n} \int_0^t f_l(s)\,dW_l(s) = \int_0^t \Big(\sum_{l=1}^{n} f_l^2(s)\Big)^{1/2} dW(s). \tag{2.6}$$

Процесс $J_l(t)$ прогрессивно измерим, относительно $\mathcal{G}_t^l$, поэтому

$$\sum_{l=1}^{n}\int_0^t J_l(s)\,dW_l(s)=\int_0^t\sqrt{Y_n(s)}\,dW(s).$$

Тогда (2.5) можно переписать в следующем виде

$$dY_n(t)=2\sqrt{Y_n(t)}\,dW(t)+n\,dt+\big((\alpha-1)Y_n(t-)+S_{N(t)}\big)dN(t). \quad (2.7)$$

Это – уравнение вида (1.4) для скачкообразного процесса Y_n. Поскольку $Z_n(t)=\sqrt{Y_n(t)}$, то применяя формулу Ито (1.5) ($G(x)=\sqrt{x}$), получим (2.4).

3. Обобщенная скачкообразная диффузия. Рассмотрим обобщение скачкообразной диффузии. Для неотрицательной кусочно непрерывной функции g° момент

$$\varkappa_1:=\min\Big\{s:\int_0^s g^\circ(X(v))\,dv>\tau_1\Big\}$$

является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии X. Для $0\le t\le\varkappa_1$ полагаем $J^\circ(t)=X(t)$, где X – решение уравнения (1.2). Процесс J° определяется рекуррентно. Для $l=1,2,\dots$ он является решением стохастического дифференциального уравнения

$$J^\circ(t)=\rho\big(J^\circ(\varkappa_l-),Y_l\big)+\int_{\varkappa_l}^t\mu(J^\circ(u))\,du+\int_{\varkappa_l}^t\sigma(J^\circ(u))\,dW(u) \quad (3.1)$$

на промежутке времени $\varkappa_l\le t<\varkappa_{l+1}$, где

$$\varkappa_{l+1}:=\min\Big\{s\ge\varkappa_l:\int_{\varkappa_l}^s g^\circ(J^\circ(v))\,dv>\tau_l\Big\},$$

и τ_k, $k=1,2,\dots$, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром λ_1.

Заметим, что $\varkappa_l=\sum\limits_{k=1}^{l}\tau_k$ при $g^\circ\equiv1$ и J° совпадает с J.

В каждый момент $\varkappa_l$ скачкообразная диффузия J° начинается заново как обычная диффузия X из точки $\rho\big(J^\circ(\varkappa_l-),Y_l\big)$.

Пусть

$$S(t) = \max\{l : \varkappa_l \le t\} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t - \varkappa_l).$$

Диффузия J° является решением уравнения

$$dJ^\circ(t) = \mu(J^\circ(t))\,dt + \sigma(J^\circ(t))\,dW(t) +$$
$$+\big(\rho\big(J^\circ(t-), Y_{S(t)}\big) - J^\circ(t-)\big)\,dS(t), \qquad J(0) = x. \qquad (3.2)$$

Пусть $G(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Справедливо следующее обобщение формулы Ито

$$dG(J^\circ(t)) = G'(J^\circ(t))(\mu(J^\circ(t))\,dt + \sigma(J^\circ(t))\,dW(t)) + \frac{\sigma^2(J(t))}{2}G''(J^\circ(t))\,dt$$
$$+\big(G(\rho\big(J^\circ(t-), Y_{S(t)}\big)) - G(J^\circ(t-))\big)\,dS(t). \qquad (3.3)$$

4. Распределения интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума. Рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A(t) := \int_0^t f(J^\circ(s))\,ds, \qquad f \ge 0,$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0\le s\le t} J^\circ(s)$, $\sup\limits_{0\le s\le t} J^\circ(s)$.

Пусть τ – не зависящий от процесса $\{J^\circ(s),\ s \ge 0\}$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу J° при условии $J^\circ(0) = x$. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$.

Отметим, что процесс $S(t)$, $t \ge 0$, подобно процессу Пуассона, считает число скачков к моменту времени t, совершенных диффузией J°, и $dS(t)$ равняется единице или нулю в зависимости от того принадлежит $\varkappa_l$ интервалу $[t, t + dt)$ для некоторого $l = 1, 2, \ldots$, или нет.

Теорема 4.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ и $g^\circ(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geq 0$, $g^\circ \geq 0$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} \mathbf{E}e^{h(x,Y_1)} \leq 1$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J^\circ(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(J^\circ(s))\,ds + \int_{[0,\tau]} h\big(J^\circ(s-), Y_{S(s)}\big)\,dS(s)\Big);$$

$$a \leq \inf_{0\leq s\leq\tau} J^\circ(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau} J^\circ(s) \leq b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}\{e^{h(z,Y_1)}Q(\rho(z,Y_1))\}\,dz, \tag{4.1}$$

где $M(x)$, $x \in (a,b)$, – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda + \lambda_1 g^\circ(x) + f(x))M(x) = -\lambda\Phi(x), \tag{4.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{4.3}$$

и $G_z(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda + \lambda_1 g^\circ(x) + f(x))G(x) = 0, \quad x \in (a,b)\setminus\{z\}, \tag{4.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1 g^\circ(z)/\sigma^2(z), \tag{4.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{4.6}$$

Полагаем $M(x) = 0$, $G_z(x) = 0$ для $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 4.1. Функция $Q(x)$, $x \in (a,b)$, является единственным решением следующего интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Q''(x) + \mu(x)Q'(x) - (\lambda + \lambda_1 g^\circ(x) + f(x))Q(x) =$$

$$= -\lambda\Phi(x) - \lambda_1 g^\circ(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{h(x,y)}Q(\rho(x,y))\,dF(y), \tag{4.7}$$

с граничными условиями

$$Q(a) = 0, \qquad\qquad Q(b) = 0. \tag{4.8}$$

Здесь $F(y)$ – функция распределения случайных величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$. Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, то предположим, что $\Phi(x)$ и $g^\circ(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – ограниченые функции. Тогда Q – единственное ограниченное решение (4.7).

Действительно, $G_z(x)$ – функция Грина, поэтому для произвольной функции $T(x)$, $x \in [a, b]$, функция

$$U(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, T(z)\, dz \tag{4.9}$$

является при $x \in (a, b)$ единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + \lambda_1 g^\circ(x) + f(x))U(x) = -\lambda_1 g^\circ(x)T(x),$$

$$U(a) = 0, \qquad\qquad U(b) = 0.$$

Из (4.1) имеем

$$Q(x) = M(x) + U(x) \tag{4.10}$$

для $T(x) = \mathbf{E}\{e^{h(x,Y_1)}Q(\rho(x, Y_1))\}$. Сумма функций M и U удовлетворяет задаче (4.7), (4.8).

Доказательство теоремы 4.1. Докажем, что для ограниченной функции M и функции G_z, удовлетворяющей

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |G_z(x)|\, dz = q < 1,$$

уравнение (4.1) имеет единственное ограниченное решение. Для неотрицательных M и G_z решение неотрицательно.

Применим метод последовательного приближения. Полагаем $Q_0(x) = M(x)$,

$$Q_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E}\{e^{h(z,Y_1)} Q_{n-1}(\rho(z, Y_1))\}\, dz.$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|Q_n(x)|\le\sup_{x\in\mathbf{R}}|Q_{n-1}(x)|\sup_{x\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{\infty}|G_z(x)|\,dz\le q^n\sup_{x\in\mathbf{R}}|M(x)|.$$

Поэтому ряд $Q(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}Q_n(x)$ сходится равномерно по x.

Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)=M(x)+\int_{-\infty}^{\infty}G_z(x)\,\mathbf{E}\Big\{e^{h(z,Y_1)}\sum_{k=0}^{n-1}Q_k(\rho(z,Y_1))\Big\}\,dz.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем, что функция Q – решение уравнения (4.1). Для $M\equiv 0$ имеем

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|Q(x)|\le\sup_{x\in\mathbf{R}}|Q(x)|\,q.$$

Поскольку $q<1$, это влечет $Q\equiv 0$. Поэтому уравнение (4.1) имеет единственное ограниченное решение.

Положим

$$M(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^{\tau}(\lambda_1 g^{\circ}(X(s))+f(X(s)))\,ds\Big);$$

$$a\le\inf_{0\le s\le\tau}X(s),\ \sup_{0\le s\le\tau}X(s)\le b\Big\}.$$

Тогда M является решением задачи (4.2), (4.3) (для броуновского движения см., например, [7], теорема 2.2, гл. 2).

Положим

$$G_z(x):=\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda+f(X(s)))\,ds\Big);$$

$$a\le\inf_{0\le s\le\varkappa_1}X(s),\ \sup_{0\le s\le\varkappa_1}X(s)\le b,X(\varkappa_1)<z\Big\}.$$

Тогда G_z является решением задачи (4.4)–(4.6) (для броуновского движения см., например, [8], теорема 5.1).

Поскольку $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} g^\circ(x) \le M$, тогда $\varkappa_1 \ge \tau_1/M$ и для всех x

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,dz \le \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1}(\lambda + f(X(s)))\,ds\Big) \le$$

$$\le \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_1/M} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda/M} = q < 1.$$

Это влечет, что уравнение (4.1) имеет единственное ограниченное решение.

По определению процесса J°, при условии $X(\varkappa_1) = z$ и $Y_1 = y$, процесс $\widetilde{J}^\circ(s) := J^\circ(s+\varkappa_1)$, $s \ge 0$, распределен также как процесс $J^\circ(s)$, $s \ge 0$, при условии $X(0) = \rho(z,y)$. Положим $\widetilde{S}(s) := S(s+\varkappa_1)$, $s \ge 0$. Для краткости изложения считаем $a = -\infty$, $b = \infty$. Так как событие $\tau \le \varkappa_1$ эквивалентно событию $\int\limits_0^{\tau} g^\circ(X(s))\,ds \le \tau_1$, имеем

$$Q(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(X(s))\,ds\Big); \tau \le \varkappa_1\Big\} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J^\circ(\tau))$$

$$\times \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds - \int\limits_{\varkappa_1}^{\tau} f(J^\circ(s))\,ds + \int\limits_{(\varkappa_1,\tau]} h\big(J^\circ(s-), Y_{S(s)}\big)\,dS(s)\Big) e^{h(z,Y_1)};$$

$$X(\varkappa_1) \in dz, \varkappa_1 < \tau\Big\} = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1}(\lambda + f(X(s)))\,ds\Big);$$

$$X(\varkappa_1) \in dz\Big\}\mathbf{E}\Big\{e^{h(z,Y_1)}\mathbf{E}_{\rho(z,Y_1)}\Big\{\Phi(\widetilde{J}^\circ(\tilde\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tilde\tau} f(\widetilde{J}^\circ(s))ds\Big)$$

$$\times \exp\Big(\int\limits_{[0,\tilde\tau]} h(\widetilde{J}^\circ(s-), Y_{\widetilde{S}(s)})d\widetilde{S}(s)\Big)\Big\}\Big\} =$$

$$= M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}\{e^{h(z,Y_1)}Q(\rho(z,Y_1))\}\,dz.$$

В предыдущем равенстве мы использовали независимость момента τ от процесса $J^\circ(s)$ и $\varkappa_1$. Это позволяет нам заменить $\tau - \varkappa_1$

на $\tilde{\tau}$, где $\tilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от процесса $\widetilde{J}^\circ(s)$, $s \geq 0$. Благодаря этой замене появилось слагаемое λ перед f в аргументе первой показательной функции. Теорема доказана.

$\square$

5. Преобразование меры. Рассмотрим две однородные диффузии

$$dX_l(t) = \sigma(X_l(t))dW(t) + \mu_l(X_l(t))dt, \qquad X_l = x, \qquad l = 1, 2,$$

и две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $Y_k^{(l)}$ с абсолютно непрерывными распределениями $\frac{dF_2(y)}{dF_1(y)} = p(y)$. Пусть J_l, $l = 1, 2$, – две скачкообразные диффузии, определенные по X_l, $Y_k^{(l)}$, $l = 1, 2$, с одинаковой функцией $\rho(x, y)$. Тогда, меры отвечающие скачкообразным диффузиям J_2 и J_1, суженные на σ-алгебру $\mathcal{G}_t$, имеют производную Радона–Никодима

$$\frac{d\mathbf{P}_{J_2}}{d\mathbf{P}_{J_1}}\Big|_{\mathcal{G}_t} = \prod_{k=1}^{N(t)} p(Y_k^{(1)}) \times$$

$$\times \exp\Big(\int_0^t \frac{\mu_2(J_1(s)) - \mu_1(J_1(s))}{\sigma^2(J_1(s))}\, dW(s) - \int_0^t \frac{(\mu_2(J_1(s)) - \mu_1(J_1(s)))^2}{2\sigma^2(J_1(s))}\, ds\Big). \tag{5.1}$$

Используя формулу стохастического дифференцирования (1.8), можно переписать эту производную без стохастического интеграла.

Положим

$$h(x) := \frac{1}{\sigma^2(x)}(\mu_2(x) - \mu_1(x)), \qquad H(x) := \int_0^x h(y)\, dy.$$

Предположим, что h – дифференцируемая функция, $H(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ограничена, и

$$\mathbf{E}\big\{e^{-H(\rho(x, Y_1^{(2)}))}\big\} = \mathbf{E}\big\{p(Y_1^{(1)}) e^{-H(\rho(x, Y_1^{(1)}))}\big\} \leq e^{-H(x)}.$$

Тогда с вероятностью единица

$$\Theta(t) := \frac{d\mathbf{P}_{J_2}}{d\mathbf{P}_{J_1}}\Big|_{\mathcal{G}_t} = e^{H(J_1(t))-H(J_1(0))}\times$$

$$\times \exp\Big(-\int_0^t \frac{\mu_2^2(J_1(s))-\mu_1^2(J_1(s))}{2\sigma^2(J_1(s))}\,ds - \int_0^t \frac{\sigma^2(J_1(s))}{2}h'(J_1(s))\,ds$$

$$-\int_{[0,t]} \big(H\big(\rho\big(J(s-),Y^{(1)}_{N(s)}\big)\big) - H(J(s-))\big)\,dN(s)\Big)\prod_{k=1}^{N(t)} p(Y_k^{(1)}). \qquad (5.2)$$

Это утверждение эквивалентно следующему: для любого ограниченного измеримого функционала $\wp(X(s), 0\le s\le t)$

$$\mathbf{E}_x\wp(J_2(s), 0\le s\le t) = \mathbf{E}_x\big\{\wp(J_1(s), 0\le s\le t)\Theta(t)\big\}, \qquad (5.3)$$

или следующему: для произвольного $\lambda>0$ и экспоненциально распределенного с параметром λ случайного момента времени τ, не зависящего от σ-алгебры $\mathcal{G}_0^\infty$,

$$\mathbf{E}_x\wp(J_2(s), 0\le s\le \tau) = \mathbf{E}_x\big\{\wp(J_1(s), 0\le s\le \tau)\Theta(\tau)\big\}. \qquad (5.4)$$

Мы докажем (5.4) для функционалов интегрального типа и функционалов, задающих положение диффузии в момент времени τ, используя теорему 4.1 для $g^\circ\equiv 1$. В силу марковости процессов J_l, $l=1,2$, функционалы, задающие положение диффузии, уже однозначно определяют меру процесса.

Поскольку

$$\prod_{k=1}^{N(\tau)} p(Y_k^{(1)}) = \exp\Big(\int_{[0,\tau]} \ln p\big(Y^{(1)}_{N(s)}\big)\,dN(s)\Big),$$

то, согласно теореме 4.1 для $g^\circ\equiv 1$, функция

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J_1(\tau))e^{H(J_1(\tau))}\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_1(s))\,ds$$

$$-\int_0^\tau \frac{\mu_2^2(J_1(s))-\mu_1^2(J_1(s))}{2\sigma^2(J_1(s))}\,ds - \int_0^\tau \frac{\sigma^2(J_1(s))}{2}h'(J_1(s))\,ds$$

$$-\int_{[0,\tau]} \big(H\big(\rho\big(J_1(s-),Y^{(1)}_{N(s)}\big)\big) - H(J_1(s-)) - \ln p\big(Y^{(1)}_{N(s)}\big)\big)\,dN(s)\Big)\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x)=M(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)e^{H(z)}\,\mathbf{E}\{p(Y_1^{(1)})e^{-H(\rho(z,Y_1^{(1)}))}Q(\rho(z,Y_1^{(1)}))\}\,dz, \tag{5.5}$$

где $M(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x)+\mu_1(x)M'(x)-\Big(\lambda+\lambda_1+f(x)+ \\ +\frac{1}{\sigma^2(x)}(\mu_2^2(x)-\mu_2^2(x))+\frac{1}{2}\sigma^2(x)h'(x)\Big)M(x)=-\lambda\Phi(x)e^{H(x)}, \tag{5.6}$$

и $G_z(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x)+\mu_1(x)G'(x)-\Big(\lambda_1+\lambda+f(x)+ \\ +\frac{1}{\sigma^2(x)}(\mu_2^2(x)-\mu_2^2(x))+\frac{1}{2}\sigma^2(x)h'(x)\Big)G(x)=0, \qquad x\neq z, \tag{5.7}$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\lambda_1/\sigma^2(z). \tag{5.8}$$

Делая замену $\widetilde{M}(x):=e^{-H(x)}M(x)$ и $\widetilde{G}_z(x):=e^{-H(x)}G_z(x)e^{H(z)}$, получаем, что эти функции удовлетворяют задачам

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{M}''(x)+\mu_2(x)\widetilde{M}'(x)-(\lambda+\lambda_1+f(x))\widetilde{M}(x)=-\lambda\Phi(x), \tag{5.9}$$

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{G}''(x)+\mu_2(x)\widetilde{G}'(x)-(\lambda_1+\lambda+f(x))\widetilde{G}(x)=0, \qquad x\neq z, \tag{5.10}$$

$$\widetilde{G}'(z+0)-\widetilde{G}'(z-0)=-2\lambda_1/\sigma^2(z). \tag{5.11}$$

Из (5.5) следует, что $\widetilde{Q}(x):=e^{-H(x)}Q(x)$ – решение уравнения

$$\widetilde{Q}(x)=\widetilde{M}(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}_z(x)\,\mathbf{E}\{\widetilde{Q}(\rho(z,Y_1^{(2)}))\}\,dz. \tag{5.12}$$

Тогда снова по теореме 4.1 для $g^\circ\equiv 1$

$$\widetilde{Q}(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J_2(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(J_2(s))\,ds\Big)\Big\}. \tag{5.13}$$

Принимая во внимание определения функций $Q(x)$ и $\Theta(t)$, имеем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J_2(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_2(s))\,ds\Big)\Big\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J_1(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J_1(s))\,ds\Big)\Theta(\tau)\Big\}.$$

Это доказывает (5.4).

6. Распределения функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в момент, обратный к интегральному функционалу. Рассмотрим проблему вычисления распределений функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в *момент, обратный к интегральному функционалу.* Этот момент определяется формулой

$$\nu(t) := \min\Big\{s : \int_0^s g(J(v))\,dv > t\Big\},$$

где g – неотрицательная функция. Отметим, что $\nu(0)$ может не равняться нулю.

Следующий результат является ключевым для решения задачи вычисления распределений функционалов от скачкообразных диффузий, остановленных в момент, обратный к интегральному функционалу.

Теорема 6.1. *Пусть $\varPhi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \ge 0$ и $g \ge 0$. Тогда функция*

$$V(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\exp\Big(-\int_0^\nu f(J(s))\,ds\Big); a \le \inf_{0\le s\le \nu} J(s), \sup_{0\le s\le\nu} J(s) \le b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$V(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}\{V(\rho(z,Y_1))\}\,dz, \qquad (6.1)$$

где $M(x)$, $x \in (a,b)$, является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda g(x) + \lambda_1 + f(x))M(x) = -\lambda g(x)\Phi(x), \tag{6.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{6.3}$$

и $G_z(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda g(x) + \lambda_1 + f(x))G(x) = 0, \quad x \in (a,b)\setminus\{z\}, \tag{6.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(z), \tag{6.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{6.6}$$

Полагаем $M(x) = 0$, $G_z(x) = 0$ для $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 6.1. Функция $V(x)$, $x \in (a,b)$, является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x) + \mu(x)V'(x) - (\lambda g(x) + \lambda_1 + f(x))V(x) =$$

$$= -\lambda g(x)\Phi(x) - \lambda_1 \mathbf{E}V(\rho(x, Y_1)) \tag{6.7}$$

с граничными условиями

$$V(a) = 0, \qquad V(b) = 0. \tag{6.8}$$

Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, тогда V – единственное ограниченное решение (6.7).

Замечание 6.2. Для $g \equiv 1$ этот результат превращается в теорему 4.1 для $g^\circ \equiv 1$, $h \equiv 0$.

Доказательство теоремы 6.1. Для того, чтобы упростить формулы, мы доказываем этот результат для случая $a = -\infty$, $b = \infty$. Предположим сначала, что f – ограниченная непрерывная функция и Φ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией с ограниченными производными.

Для произвольного $\widetilde{\lambda} > 0$ положим

$$\eta_{\widetilde{\lambda}}(s) := \Phi(J(s)) \exp\Big(-\int_0^s \big(\widetilde{\lambda} + f(J(v))\big)\,dv\Big). \tag{6.9}$$

Применяя аналог формулы Ито, имеем

$$\eta_{\widetilde{\lambda}}(t)-\eta_{\widetilde{\lambda}}(0)=\int\limits_0^t \exp\Bigl(-\int\limits_0^s \bigl(\widetilde{\lambda}+f(J(v))\bigr)\,dv\Bigr)\times$$

$$\Bigl[\Phi'(J(s))\sigma(J(t))\,dW(s)+\Phi'(J(s))\mu(J(s))\,ds+\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\Phi''(J(s))\,ds-$$

$$-\bigl(\widetilde{\lambda}+f(J(s))\bigr)\Phi(J(s))\,ds+\bigl(\Phi\bigl(\rho\bigl(J(s-),Y_{N(s)}\bigr)\bigr)-\Phi(J(s-))\bigr)\,dN(s)\Bigr].$$

Поскольку g – неотрицательная функция, то $\int\limits_0^s g(J(v))\,dv$, $s\ge 0$, – возрастающая функция. Это влечет, что для любых $s\ge 0$ и $t\ge 0$

$$\mathbb{I}_{[0,\nu(t)]}(s)=\mathbb{I}_{[0,t]}\Bigl(\int\limits_0^s g(J(v))\,dv\Bigr).$$

Так как математическое ожидание стохастических интегралов равняется нулю, и ожидание $dN(s)$ равняется $\lambda_1\,ds$, мы получаем

$$\mathbf{E}_x\eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(t))-\Phi(x)=\mathbf{E}_x\int\limits_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}\Bigl(\int\limits_0^s g(J(v))\,dv\Bigr)\exp\Bigl(-\int\limits_0^s\bigl(\widetilde{\lambda}+f(J(v))\bigr)\,dv\Bigr)$$

$$\times\Bigl[\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\Phi''(J(s))+\Phi'(J(s))\mu(J(s))-$$

$$-\bigl(\widetilde{\lambda}+f(J(s))\bigr)\Phi(J(s))+\lambda_1\bigl(\mathbf{E}_Y\Phi(\rho(J(s),Y))-\Phi(J(s))\bigr)\Bigr]\,ds,$$

где мы обозначаем $\mathbf{E}_Y$ ожидание только относительно случайной переменной Y, распределенной как Y_1 и не зависящей от других переменных и процессов, рассмотренных выше.

Вычисляя преобразование Лапласа от обеих частей этого равенства по переменной t с параметром $\lambda>0$, мы получаем

$$\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(t))\,dt-\Phi(x)=\mathbf{E}_x\int\limits_0^\infty e^{-\widetilde{\lambda}s}\exp\Bigl(-\int\limits_0^s\bigl(\lambda g(J(v))+f(J(v))\bigr)\,dv\Bigr)$$

$$\times\Bigl[\frac{1}{2}\sigma^2(J(s))\Phi''(J(s))+\mu(J(s))\Phi'(J(s))-$$

$$-\bigl(\widetilde{\lambda}+f(J(s))\bigr)\Phi(J(s))+\lambda_1\bigl(\mathbf{E}_Y\Phi(\rho(J(s),Y))-\Phi(J(s))\bigr)\Bigr]\,ds. \quad (6.10)$$

Наряду с моментом τ рассмотрим не зависящий от скачкообразной диффузии J экспоненциально распределенный случайный момент $\widetilde{\tau}$, для которого $\mathbf{P}(\widetilde{\tau} > s) = e^{-\widetilde{\lambda} s}$. Применяя теорему Фубини, мы можем представить равенство (6.10) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) - \Phi(x) = \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \mathbf{E}_x \Big\{ \Big[\frac{1}{2}\sigma^2(J(\widetilde{\tau}))\Phi''(J(\widetilde{\tau})) + \mu(J(\widetilde{\tau}))\Phi'(J(s)) -$$

$$-\big(\widetilde{\lambda} + f(J(\widetilde{\tau}))\big)\Phi(J(\widetilde{\tau})) + \lambda_1\big(\mathbf{E}_Y \Phi(\rho(J(\widetilde{\tau}), Y)) - \Phi(J(\widetilde{\tau}))\big)\Big]$$

$$\times \exp\Big(-\int_0^{\widetilde{\tau}} \big(\lambda g(J(v)) + f(J(v))\big)\, dv\Big)\Big\}.$$

Для математического ожидания в правой части этого равенства применяем теорему 4.1 для $g^\circ \equiv 1$, $h \equiv 0$ в варианте представленном формулой (4.10). В результате, имеем представление

$$\mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) - \Phi(x) =: \widetilde{Q}(x) = \widetilde{M}(x) + \widetilde{U}(x),$$

где $\widetilde{M}$, $\widetilde{U}$ – единственные ограниченные решения уравнений

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{M}''(x) + \mu(x)\widetilde{M}'(x) - (\widetilde{\lambda} + \lambda_1 + \lambda g(x) + f(x))\widetilde{M}(x) =$$

$$= -\Big[\frac{\sigma^2(x)}{2}\Phi''(x) + \mu(x)\Phi'(x) - (\widetilde{\lambda} + f(x))\Phi(x) + \lambda_1\big(\mathbf{E}\Phi(\rho(x, Y_1)) - \Phi(x)\big)\Big],$$

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}\widetilde{U}''(x) + \mu(x)\widetilde{U}'(x) - (\widetilde{\lambda} + \lambda_1 + \lambda g(x) + f(x))\widetilde{U}(x) = -\lambda_1 \mathbf{E}\big\{\widetilde{Q}(\rho(x, Y_1))\big\}.$$

Положим $M_+(x) := \widetilde{M}(x) + \Phi(x)$. Тогда функция M_+ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M_+''(x) + \mu(x)M_+'(x) - (\widetilde{\lambda} + \lambda_1 + \lambda g(x) + f(x))M_+(x) =$$

$$= -\lambda g(x)\Phi(x) + \lambda_1 \mathbf{E}\Phi(\rho(x, Y_1)).$$

Функция $V_{\widetilde{\lambda}}(x) := \mathbf{E}_x \eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau)) = \widetilde{Q}(x) + \Phi(x) = \widetilde{U}(x) + M_+(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V_{\widetilde{\lambda}}''(x) + \mu(x)V_{\widetilde{\lambda}}'(x) - (\widetilde{\lambda} + \lambda_1 + \lambda g(x) + f(x))V_{\widetilde{\lambda}}(x) =$$

$$= -\lambda g(x)\Phi(x) - \lambda_1 \mathbf{E}\big\{V_{\widetilde{\lambda}}(\rho(x, Y_1))\big\}, \qquad x \in \mathbf{R}. \qquad (6.11)$$

Используя (6.9), имеем

$$V(x)=\lim_{\widetilde{\lambda}\downarrow 0}\mathbf{E}_x\eta_{\widetilde{\lambda}}(\nu(\tau))=\lim_{\widetilde{\lambda}\downarrow 0}V_{\widetilde{\lambda}}(x).$$

Переходя к пределу в (6.11) при $\widetilde{\lambda}\downarrow 0$, получаем, что V удовлетворяет (6.7) или уравнению (6.1). Таким образом, теорема доказана для ограниченных непрерывных f и дважды непрерывно дифференцируемых функций Φ с ограниченными производными.

Неотрицательная кусочно непрерывная функция f может быть приближена такой последовательностью непрерывных функций $\{f_n\}$, что $0\le f_n(x)\le f(x)$, $x\in\mathbf{R}$. Произвольная ограниченная кусочно непрерывная функция Φ может быть приближена последовательностью $\{\Phi_n\}$ равномерно ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций с ограниченными производными. Применяя метод предельной аппроксимации, описанный при доказательстве теоремы 2.2 гл. 2 из [7], мы можем доказать, что V – единственное ограниченное решение (6.1) при предположениях теоремы 6.1. □

Литература

1. Кас M., *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* In: Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
2. Гирсанов И. В., *О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.* — Теория вероятн. и ее примен. **5**, № 2 (1960), 314–330.
3. Скороход А. В., *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. 1964.
4. Mordecki E., *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, № 1 (2003), 188–194.
5. *Бородин А. Н., Распределение функционалов от скачкообразного диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **328** (2005), 27–41.
6. Graham C., *Nonlinear diffusions with jumps.* — Ann. Inst. Henri Poincaré (B) **28**, № 3 (1992), 393–402.
7. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А., *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий.* — Труды МИАН **195** (1994).
8. Бородин А. Н., *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 39–56.

Borodin A. N. Distributions of functionals of diffusions with jumps.

The paper deals with the generalization of diffusion with jumps. One of the main points is that the values of jumps depend on the position of the diffusion before the jump. The next generalization concerns the moments of jumps. They occur in accordance with the compound Poisson process or with the jumping moments constructed by the inverse integral functionals of the diffusion.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 ноября 2006 г.