Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 339, 2006 г.

А. В. Яковлев

ПАМЯТИ АНДРЕЯ ВЛАДИМИРОВИЧА РОЙТЕРА

Ушел из жизни Андрей Владимирович Ройтер, замечательный математик и необычайно интересный человек. Хотя большую часть жизни Андрей Владимирович провел в Киеве, он по праву считается одним из самых ярких представителей Ленинградской алгебраической школы, и его кончина – огромная потеря для нас.

А. В. Ройтер был одним из любимейших учеников Дмитрия Константиновича Фаддеева; его первые результаты относятся к теории целочисленных представлений, которая в те годы начала активно развиваться (во многом благодаря инициативе Д. К.). Он громко заявил о себе уже своей дипломной работой, которую защитил в Ленинградском университете в 1960-м году. Еще с довоенных времен было известно, что у циклических групп, порядок которых – квадрат нечетного простого числа, количество различных неразложимых целочисленных представлений конечно, однако считалось, что это не так для группы порядка 4. А. В. Ройтер доказал, что и для циклической группы порядка 4 число неразложимых целочисленных представлений конечно, и явно выписал все 9 таких представлений.

Вскоре выяснилось, что проблематика целочисленных представлений во многом похожа на проблематику другой ветви неклассической теории представлений, а именно представлений неполупростых конечномерных алгебр над полями: и в той, и в другой теории многие задачи сводятся к приведению к каноническому виду одной или нескольких матриц над полями при помощи тех или иных групп преобразований. Основными проблемами теории представлений конечномерных алгебр считались две проблемы Брауэра–Трелла.

I. Верно ли, что если у конечномерной алгебры бесконечно много различных неразложимых представлений, то размерности неразложимых представлений не ограничены?

II. Верно ли, что если у конечномерной алгебры бесконечно много различных неразложимых представлений, то существует бесконечно много размерностей, в каждой из которых имеется бесконечно много попарно не изоморфных неразложимых представлений?

В 1968 году Андрей Владимирович дал блестящее положительное решение первой проблемы Брауэра–Трелла. Подступиться ко второй оказалось значительно труднее. Пришлось создавать технику, в рамках которой можно было бы решать подобные задачи. Так возникла теория матричных задач. Одним из первых шагов в этом направлении стала теория представлений частично упорядоченных множеств, созданная А. В. Ройтером и Л. А. Назаровой. Отметим некоторые важные черты этого результата. Во-первых, была сформулирована не какая-то частная задача о приведении нескольких матриц, а выделен целый класс естественных задач, для которых можно было бы получить достаточно общие результаты. Во-вторых, был найден способ сводить представления одних частично упорядоченных множеств к другим (названный авторами дифференцированием ч.у.м.). Грубо говоря, он состоит в следующем: приведем одну из матриц, составляющих представление ч.у.м., к простейшему виду элементарными преобразованиями над строчками и столбцами, и больше эту матрицу трогать не будем; тогда оказывается, что задача описания остальных матриц – это тоже задача о представлении некоторого (вообще говоря, другого) частично упорядоченного множества.

Еще одним примером аналогичной матричной задачи стала "задача о шахматной доске". Прямоугольная матрица с компонентами из поля разбита на вертикальные и горизонтальные полосы, причем некоторые из получившихся клеток отмечены. Каждая отмеченная клетка квадратная, и в каждой полосе не более одной отмеченной клетки. Разрешается делать следующие преобразования: любые невырожденные преобразования внутри каждой из полос с единственным ограничением – если горизонтальная и вертикальная полосы пересекаются по отмеченной клетке, то эти преобразования взаимно обратны; прибавление линейных комбинаций столбцов некоторой вертикальной полосы к столбцам полосы, расположенной правее, и, аналогично, прибавление линейных комбинаций строк некоторой горизонтальной полосы к столбцам полосы, расположенной ниже. Оказалось, что можно дать полную классификацию классов эквивалентности матриц относительно такой группы преобразований, и это с использованием той же идеи: приведение одной клетки приводит к задаче того же типа, но с другим набором полос и отмеченных клеток.

В замечательной статье "Об одной задаче Гельфанда" Назарова и Ройтер дают решение аналогичной, но более сложной задачи о приведении матрицы, разбитой на полосы. Эта работа очень важна: к решенной в ней задаче сводятся очень многие и очень разнообразные вопросы (например, классификация модулей Хариш–Чандра и классификация целочисленных представлений циклической группы 8-го порядка). Более того, она универсальна: практически во всех классификационных задачах линейной алгебры, которые допускают решение (так называемые ручные задачи), используются результаты этой работы.

Еще более сложная задача решается Назаровой и Ройтером в препринте "Категорные матричные задачи и проблема Брауэра–Трэлла" (1973), в котором авторы анонсировали решение второй проблемы Брауэра–Трелла. Следует отметить, что это технически очень сложная работа, и некоторые математики ставили под сомнение, что в ней действительно получено полное решение. Однако, совершенно ясно, что если в работе и есть некоторые пробелы, то они легко устраняются теми же методами. Таким образом, этот препринт надо рассматривать как первое доказательство второй гипотезы Брауэра–Трелла (впоследствии были получены и другие, более прозрачные доказательства).

Различные разделы возникшей в 60-70-е годы XX века нетрадиционной теории представлений (частично упорядоченные множества, колчаны Габриеля и др.) выглядели как достаточно разрозненные, хотя и во многом похожие. Поэтому естественным было попытаться найти для всех этих понятий общий контекст. Еще одним выдающимся достижением Андрея Владимировича стало объединение всех этих разделов в рамках естественной теоретико-категорной конструкции. Введенное им понятие БОКС'а оказалось очень удобным и сейчас принято на вооружение всеми специалистами. Оно отличается не только общностью, но и содержательностью; например, БОКС'ы можно дифференцировать и тем самым сводить задачи об их представлениях к "меньшим" представлениям других БОКС'ов.

Многие из этих и другие результаты вошли в книгу "Representations of finite-dimensional algebras", написанную Андреем Владимировичем вместе с П. Габриелем; она стала первой монографией, в которой систематически изложена теория матричных задач, во многом созданная усилиями этих авторов.

Конечно, сказанное выше не является полным обзором всего творческого наследия А. В. Ройтера; ему принадлежат еще многие другие достижения. Отметим, в частности, недавние очень красивые результаты об ортоскалярных представлениях колчанов в метрических пространствах.

Андрей Владимирович Ройтер был очень интересным человеком; у него на все был свой, часто парадоксальный взгляд. Некоторые его идеи поначалу вызывали резкий протест; однако, они давали повод к глубоким размышлениям, в результате которых приходилось если и не соглашаться с ним до конца, все же существенно пересматривать свои воззрения.

У А. В. Ройтера было много учеников, ставших видными математиками. Особенно теплые отношения в его школе были в первые десятилетия; это были не только семинары, совместные исследования, но и еженедельные поездки за город, с пикниками, костром и игрой в волейбол. К сожалению, со временем некоторые ученики стали отдаляться от Учителя.

Кроме математики, одним из сильнейших увлечений А. Ройтера были шахматы; он был шахматистом очень высокого класса (насколько это возможно, если не делать шахматы профессией).

28-том "Записок семинаров ЛОМИ" состоял почти исключительно из работ, написанных Ройтером, Назаровой и их учениками; он стал одним из наиболее важных и интересных выпусков "Записок", на него многократно ссылались и продолжают ссылаться алгебраисты разных стран. В настоящем томе публикуется посмертная работа Андрея Владимировича (с соавторами) и статья его последнего ученика И. Редчука.

Список работ А. В. Ройтера

1. А. В. Ройтер, *О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами.* — Вестник Ленингр. унив. **15** (1960) No. 19, 65–74.

2. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Целочисленные представления симметрической группы третьей степени.* — Укр. мат. жур. **14** (1962), 271–288.
3. А. В. Ройтер, *О категории представлений.* — Укр. мат. ж. **15** (1963), 448–452.
4. А. В. Ройтер, *Категории с делением и целочисленные представления.* — Докл. АН СССР **153** (1963), 46–48.
5. А. В. Ройтер, *E-системы представлений.* — Укр. мат. ж. **17** (1965) No. 2, 88–96.
6. А. В. Ройтер, *Делимость в категории представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом.* — Укр. мат. ж. **17** (1965), No. 4, 124–129.
7. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *О неприводимых представлениях p-группы над $Z_p(\varepsilon)$.* — Укр. мат. ж. **18** (1966), No. 1, 119–124.
8. А. В. Ройтер, *Аналог теоремы Басса для модулей представлений некоммутативных порядков.* — Докл. АН СССР **168** (1966), 1261–1264.
9. А. В. Ройтер, *Целочисленные представления, принадлежащие одному роду.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **30** (1966), 1315–1324.
10. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Целочисленные p-адические представления и представления над кольцом смежных классов.* — Укр. мат. ж. **19** (1967), No. 2, 125–126.
11. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, А. В. Ройтер, *Наследственные и бассовы порядки.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **31** (1967), 1415–1436.
12. Ю. А. Дрозд, А. В. Ройтер, *Коммутативные кольца с конечным числом неразложимых целочисленных представлений.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **31** (1967), 783–798.
13. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Уточнение теоремы Басса.* — Докл. АН СССР **176** (1967), 266–268.
14. А. В. Ройтер, *К теории целочисленных представлений колец.* — Мат. заметки **3** (1968), 361–366.
15. А. В. Ройтер, *Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **32** (1968), 1275–1282.
16. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно порожденные моду-*

ли над диадой двух локальных дедекиндовых колец, и конечные группы обладающие абелевым нормальным делителем индекса p. — Изв. АН СССР, сер. мат. **33**, 1969, 65–89.

17. L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *Matrix questions and the Brauer–Thrall conjectures on algebras with an infinite number of indecomposable representations.* — Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wis. 1970), pp. 111–115. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).
18. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко, *Приложение модулей над диадой к классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p и пар взаимно аннулирующих операторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **28** (1972), 69–92.
19. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления частично упорядоченных множеств.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **28** (1972), 5–31.
20. А. В. Ройтер, *Матричные задачи и представления бисистем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **28** (1972), 130–143.
21. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Об одной проблеме И. М. Гельфанда.* — Функц. анализ и его прил. **7** (1973), No. 4, 54–69.
22. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Поликолчаны и схемы Дынкина.* — Функц. анализ и прил. **7** (1973), No. 3, 94–95.
23. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Категорные матричные задачи и проблема Брауэра–Трэлла.* — Наукова думка, Киев (1973).
24. A. V. Roiter, M. M. Kleiner, *Representations of differential graded categories.* — Representations of algebras (Proc. Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974), pp. 316–339. Lecture Notes in Math., Vol. 488, Springer, Berlin (1975).
25. L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *A Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer–Thrall–Vermutung. Aus dem Russischen übersetzt von K. Nikander.* — Mitt. Math. Sem. Giessen Heft 115 (1975), i+153 pp.
26. М. М. Клейнер, А. В. Ройтер, *Представления дифференциальных градуированных категорий.* — Матричные задачи, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1977, 5–70.
27. С. А. Овсиенко, А. В. Ройтер, *Билинейные формы и категории представлений.* — Матричные задачи, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1977, 71–80.
28. Н. С. Головащук, С. А. Овсиенко, А. В. Ройтер, *К вопросу*

о шуровских дифференциальных градуированных категориях. — Матричные задачи, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1977, 162–165.

29. Л. А. Назарова, С. А. Овсиенко, А. В. Ройтер, *Поликолчаны конечного типа. Алгебра, теория чисел и их приложения.* — Труды Мат. Ин-та. им. Стеклова **148** (1978), 190–194, 277.
30. А. В. Ройтер, *Корни целочисленных квадратичных форм. Алгебра, теория чисел и их приложения.* — Труды Мат. Ин-та. им. Стеклова **148** (1978), 201–210, 277.
31. А. В. Ройтер, *БОКСы с инволюцией.* — Представления и квадратичные формы **154**, Ин-т мат. АН УССР, Киев, 1979, 124–126.
32. А. В. Ройтер, *Матричные задачи и представления БОКСов.* — Представления и квадратичные формы **154**, Ин-т мат. АН УССР, Киев, 1979, 3–38.
33. A. V. Roiter, *Matrix problems.* — in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), pp. 319–322, Acad. Sci. Fennica, Helsinki (1980).
34. A. V. Roiter, *Matrix problems and representations of BOCSs.* — in Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 288–324, Lect. Notes Math. **831**, Springer, Berlin-New York (1980).
35. А. В. Ройтер, *Представления частично упорядоченных множеств с инволюцией.* — Препринт ин-та мат. АН УССР, 1981, No. 17, 32 стр.
36. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Линейно-алгебраические методы в теории представлений.* — Линейная алгебра и теория представлений, Ин-т мат. АН УССР, Киев (1983), 3–18.
37. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств.* — Линейная алгебра и теория представлений, Ин-т мат. АН УССР, Киев (1983), 19–54.
38. R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter, L. Salmeron, *Representation-finite algebras and multiplicative bases.* — Invent. Math. **81** (1985), No. 2, 217–285.
39. A. V. Roiter, *The norm of a relation.* — Representation theory, I (Ottawa, Ont. 1984), pp. 269–271, Lect. Notes Math. **1177**, Springer, Berlin (1986).
40. L. A. Nazarova, V. M. Bondarenko, A. V. Roiter, *Представления*

частично упорядоченных множеств с инволюцией. — Препринт ин-та мат. АН УССР, 1986, No. 80, 26 стр.

41. A. V. Roiter, *Representations of posets and tame matrix problems.* — Representations of algebras (Durham, 1985), pp. 91–107, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986).
42. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления бикомпонентных пополненных множеств.* — Препринт ин-та мат. АН УССР, 1987, No. 5, 24 стр.
43. L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *Representations of bipartite completed posets.* — Comment. Math. Helv. **63** (1988), No. 3, 498–526.
44. L. A. Nazarova, A. V. Roiter, P. Gabriel, *Representations indecomposables: un algorithme.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math. **307** (1988), No. 13, 701–706.
45. Л. А. Назарова, В. М. Бондаренко, А. В. Ройтер, *Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией.* — Труды Мат. Инст. им. Стеклова **183** (1990), 149–159.
46. П. М. Гудивок, В. М. Орос, А. В. Ройтер, *Представления конечных p-групп над полем формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами.* — Докл. АН СССР **314** (1990), No. 1, 49–52.
47. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств.* — Препринт ин-та мат. АН Украины. 1991, No. 34, 31 стр.
48. П. М. Гудивок, В. М. Орос, А. В. Ройтер, *Представления конечных p-групп над полем формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами.* — Укр. мат. ж. **44** (1992), No. 6, 753–765.
49. P. Gabriel, A. V. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras.* — With a chapter by B. Keller. Encyclopaedia Math. Sci. **73**, Algebra, VIII, 1–177, Springer, Berlin (1992), 16-02.
50. P. Gabriel, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk, D. Vossieck, *Tame and wild subspace problems.* — Укр. мат. ж. **45** (1993), No. 3, 313–352.
51. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств.* II. — Препринт ин-та мат. АН Украины. 1994, No. 2, 73 стр.
52. А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, *Существование мультипликативного базиса для конечно пространственного модуля над*

агрегатом. — Укр. мат. ж. **46** (1994), No. 5, 604–617.

53. К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, *Элементарные и мультиэлементарные представления вектроидов.* — Укр. мат. ж. **47** (1995), No. 11, 1451–1477.
54. T. Guidon, U. Hassler, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *Two reduction algorithms for dyadic sets.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math. **322** (1996), No. 10, 915–920.
55. T. Guidon, U. Hassler, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *Dyadic sets S: a dichotomy for indecomposable S-matrices.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math. **324** (1997), No. 11, 1205–1210.
56. К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно представимые триадические множества.* — Алгебра и анализ **9** (1997), No. 4, 3–27.
57. К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно представимые диадические множества и их мультиэлементарные представления.* — Укр. мат. ж. **49** (1997), No. 11, 1465–1477
58. A. V. Roiter, K. I. Belousov, L. A. Nazarova, *Representations of finitely represented dyadic sets.* — Algebras and Modules, II (Geiranger, 1996), 61–76, CMS Conf. Proc. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998).
59. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Функторы и диадические множества конечного типа.* — Функ. анализ и прил. **34** (2000), No. 2, 83–86.
60. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно представимые диадические множества.* — Укр. мат. ж. **52** (2000), No. 10, 1561–1596.
61. К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно представимые K-маркированные колчаны.* — Укр. мат. ж. **53** (2001), No. 4, 550–555.
62. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов.* — Укр. мат. ж. **54** (2002), No. 6, 808–840
63. A. V. Roiter, *Representations of marked quivers.* — Representations of algebras. Vol. I, II, 417–433, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing (2002).
64. П. Габриэль, А. В. Ройтер, *Представления конечномерных алгебр.* — М.: ВИНИТИ, 2003. - 224 с. - (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **73**).

65. И. К. Редчук, А. В. Ройтер, *Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции.* — Укр. мат. ж. **56** (2004), No. 6, 796–809.
66. С. А. Кругляк, А. В. Ройтер, *Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств.* — Функ. анализ и прил. **39** (2005), No. 2, 13–30.
67. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, М. Н. Смирнова, *Антимонотонные и P-точные квадратичные формы и представления частично упорядоченных множеств.* — Алгебра и анализ **17** (2005), No. 6, 161–183.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 9 ноября 2006 г.