Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

А. С. Сивацкий

О СВОЙСТВЕ $D(2)$ И ОБЩЕМ ПОЛЕ РАСЩЕПЛЕНИЙ ДВУХ БИКВАТЕРНИОННЫХ АЛГЕБР

Пусть F – поле характеристики $\neq 2$. Будем говорить, что F обладает свойством $D(2)$, если для любого квадратичного расширения L/F и любых двух двумерных квадратичных форм q_1, q_2 над F существование общего значения форм q_{1L}, q_{2L} влечет существование общего значения форм q_{1L}, q_{2L}, принадлежего полю F. Примеры полей нулевой характеристики, не обладающих данным свойством, приводятся в [5]. Позднее в [1], основываясь на существовании таких полей, было показано, что следующие вопросы в общем случае имеют отрицательный ответ:

1) *Пусть (a_1, b_1) и (a_2, b_2) – кватернионные алгебры над полем K. Предположим, что $c \in K^*$ таково, что $(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2)_{K(\sqrt{c})}$ не является алгеброй с делением. Верно ли, что тогда существует $d \in K^*$ такое, что*
$$(a_1, b_1)_{K(\sqrt{c},\sqrt{d})} = (a_2, b_2)_{K(\sqrt{c},\sqrt{d})} = 0?$$

2) *Пусть φ есть 8-мерная форма из $I^2(K)$, алгебра Клиффорда которой имеет индекс 4. Верно ли, что φ является прямой суммой двух форм, подобных 2-кратным формам Пфистера?*

3) *Пусть φ есть 14-мерная форма из $I^3(K)$. Верно ли, что φ подобна разности чистых частей двух 3-кратных форм Пфистера?*

С помощью совершенно другой и очень сложной техники отрицательные ответы на эти вопросы во всех характеристиках были даны также в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного проекта Королевского общества Великобритании "Квадратичные формы и центральные простые алгебры в контексте расширений полей".

Вышеуказанные вопросы обуславливают наш интерес к свойству $D(2)$. Насколько мы знаем, примеры полей положительной характеристики, не обладающих свойством $D(2)$, не были ранее известны. В этой статье, независимо от характеристики поля, мы строим простые контрпримеры к свойству $D(2)$ такие, что 2-когомологическая размерность $\mathrm{cd}_2 F$ поля F равна 2. Используя эти примеры, мы показываем, что следующий вопрос в общем случае имеет отрицательный ответ.

Пусть D_1 и D_2 – две бикватернионные алгебры над полем K такие, что $\mathrm{ind}(D_1 + D_2) = 2$. Существует ли общее поле расщепления алгебр D_1 и D_2 вида $K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, где $a, b \in K^*$?

Наши обозначения стандартны. В последующем все поля имеют характеристику, не равную 2. Под формой мы всегда понимаем квадратичную форму над полем. Несколько злоупотребляя обозначениями, мы часто будем отождествлять форму над F с соответствующим классом в группе Витта $W(F)$. Через φ_{an} мы обозначаем анизотропную часть формы φ. Если L/F – расширение полей, и φ – форма над F, то $D_L(\varphi)$ есть множество ненулевых значений формы φ_L, и $G_L(\varphi)$ есть группа коэффициентов подобия φ_L, то есть $G_L(\varphi) = \{a \in L^* : \varphi \simeq a\varphi\}$. Под n-кратной формой Пфистера $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ мы подразумеваем форму $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$. Через (a, b) мы обозначаем кватернионную алгебру с образующими $1, i, j, ij$ и соотношениями $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$. Если k – поле, t – переменная и $p \in k[t]$ – неприводимый многочлен со старшим коэффициентом 1, то $\partial_p : W(k(t)) \to W(k[t]/p)$ обозначает "второе отображение вычета" – гомоморфизм групп, определяемый по следующему правилу: для свободного от квадратов многочлена $f \in k[t]$

$$\partial_p(\langle f \rangle) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ не делит } f, \\ \left\langle \dfrac{f}{p} \right\rangle, & \text{если } p \text{ делит } f \end{cases}.$$

Тензорное произведение центральных простых K-алгебр всегда рассматривается над полем K.

Обратимся к конструкции примеров, о которых шла речь выше. Пусть k – поле, $a, d_1, d_2 \in k^*$ такие, что $d_1^2 - 4a$, $d_2^2 - 4a$, $(d_1^2 - 4a)(d_2^2 - 4a) \notin k^{*2}$, x – переменная, $F = k(x)$, $L = F(\sqrt{x^2 - 4a})$. Положим

$$q_1 \simeq (x - d_1)\langle\langle d_1^2 - 4a \rangle\rangle \in W(F),$$

$$q_2 \simeq (x-d_2)\langle\langle d_2^2-4a\rangle\rangle \in W(F).$$

Предложение 1. *Поле F не обладает свойством $D(2)$, и формы q_1, q_2 вместе с квадратичным расширением L/F дают соответствующий контрпример.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$q_1((x-d_1-\sqrt{x^2-4a})(x-d_1)^{-1},(x-d_1)^{-1}) =$$

$$q_2((x-d_2-\sqrt{x^2-4a})(x-d_2)^{-1},(x-d_2)^{-1}) = 2(x-\sqrt{x^2-4a}) \in L.$$

Это показывает, что $D_L(q_1)\cap D_L(q_2)\neq\emptyset$.

Теперь докажем, что $D_L(q_1)\cap D_L(q_2)\cap F = \emptyset$. Будем следовать идее, содержащейся в работе [6]. Пусть y_1, y_2 – переменные, $\widehat{k}$ – какое-нибудь максимальное расширение нечетной степени поля $k(y_1,y_2)$. Так как d_1^2-4a и d_2^2-4a являются различными неединичными элементами в k^*/k^{*2}, легко видеть, что $(d_1^2-4a,y_1)\otimes_{\widehat{k}}(d_2^2-4a,y_2)$ есть алгебра с делением. Положим

$$\varphi = \langle\langle d_1^2-4a,y_1\rangle\rangle - \langle\langle d_2^2-4a,y_2\rangle\rangle.$$

В частности, $\varphi\neq 0$ над любым квадратичным расширением $\widehat{k}$. Положим также $y=\sqrt{x^2-4a}$, $x-y=2t$. Тогда $x+y=\frac{2a}{t}$, откуда $x = t+\frac{a}{t}$. Таким образом, мы имеем $L = F(\sqrt{x^2-4a}) = k(t)$, $F = k(t+\frac{a}{t})$. Предположим, что $u\in D_{\widehat{k}(t)}(q_1)\cap D_{\widehat{k}(t)}(q_2)\cap\widehat{k}(x)$. Очевидно, можно предполагать, что $u=u(x)\in\widehat{k}[x]$ и u свободен от квадратов. Тогда

$$(x-d_1)u\in D_{\widehat{k}(t)}(\langle\langle d_1^2-4a\rangle\rangle) = G_{\widehat{k}(t)}(\langle\langle d_1^2-4a\rangle\rangle) = G_{\widehat{k}(t)}(q_1),$$

$$(x-d_2)u\in D_{\widehat{k}(t)}(\langle\langle d_2^2-4a\rangle\rangle) = G_{\widehat{k}(t)}(\langle\langle d_2^2-4a\rangle\rangle) = G_{\widehat{k}(t)}(q_2).$$

Следовательно, мы имеем

$$(q_1\langle\langle y_1\rangle\rangle - q_2\langle\langle y_2\rangle\rangle)_{\widehat{k}(t)} =$$

$$((x-d_1)uq_1\langle\langle y_1\rangle\rangle - (x-d_2)uq_2\langle\langle y_2\rangle\rangle)_{\widehat{k}(t)} =$$

$$u(\langle\langle d_1^2-4a,y_1\rangle\rangle - \langle\langle d_2^2-4a,y_2\rangle\rangle)_{\widehat{k}(t)} = u\varphi_{\widehat{k}(t)}. \qquad (1)$$

Аналогично, так как $4t = 2(x-\sqrt{x^2-4a})\in D_L(q_1)\cap D_L(q_2)$, получаем

$$(q_1\langle\langle y_1\rangle\rangle - q_2\langle\langle y_2\rangle\rangle)_{\widehat{k}(t)} = t\varphi_{\widehat{k}(t)}. \qquad (2)$$

Объединяя вместе (1) и (2), мы заключаем, что

$$u\varphi_{\widehat{k}(t)} = t\varphi_{\widehat{k}(t)}. \qquad (3)$$

Заменяя x на $t + \frac{a}{t}$ в левой части (3) и сравнивая вычеты в многочлене t в обеих частях этого равенства, мы видим, что степень многочлена $u(x)$ относительно переменной x нечетна. Так как поле $\widehat{k}$ не имеет расширений нечетной степени, то существует $c \in \widehat{k}$ такое, что $x - c$ делит u. Заметим, что $x - c = \frac{p(t)}{t}$, где $p(t) = t^2 - ct + a$. Сравнивая вычеты в многочлене $p(t)$ в обеих частях равенства (3) мы приходим к противоречию, так как $\partial_p(t\varphi) = 0$, и $\partial_p(u\varphi) = \varphi_{\widehat{k}(\sqrt{c^2-4a})} \neq 0$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Пусть k – поле, $b_1, b_2 \in k^*$. Следующие условия равносильны:*

1) *элементы $1, b_1, b_2 \in k^*/k^{*2}$ попарно различны;*
2) *поле $k(x)$ не обладает свойством $D(2)$, и существуют $a \in k^*$, $s_1, s_2 \in k(x)^*$ такие, что расширение $k(x, \sqrt{x^2-4a})/k(x)$ и формы $s_1\langle\langle b_1\rangle\rangle$ и $s_2\langle\langle b_2\rangle\rangle$ дают соответствующий контрпример.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). По предложению 1 достаточно найти $a, d_1, d_2 \in k^*$ такие, что $b_1 = d_1^2 - 4a$, $b_2 = d_2^2 - 4a$. Например, можно положить $d_1 = \frac{b_1-b_2+1}{2}$, $d_2 = \frac{b_2-b_1+1}{2}$, $a = \frac{1}{4}(d_1^2 - b_1)$.

2)$\Rightarrow$1). Если b_1 является квадратом, то $D_L(\langle\langle b_1\rangle\rangle) = L^*$ для любого расширения $L/k(x)$, и, значит, при любых $s_1, s_2 \in k(x)^*$ формы $s_1\langle\langle b_1\rangle\rangle$ и $s_2\langle\langle b_2\rangle\rangle$ не дают контрпримера к свойству $D(2)$. Предположим, что b_1b_2 есть квадрат, то есть $b_1 \equiv b_2 \pmod{k^{*2}}$. Пусть $L/k(x)$ – произвольное расширение, и $c \in D_L(s_1\langle\langle b_1\rangle\rangle) \cap D_L(s_2\langle\langle b_2\rangle\rangle)$. Тогда $\langle\langle b_1, cs_1\rangle\rangle = \langle\langle b_1, cs_2\rangle\rangle = 0$, откуда $\langle\langle b_1, s_1s_2\rangle\rangle = 0$, и, следовательно,

$$s_1 \in D_L(s_1\langle\langle b_1\rangle\rangle) \cap D_L(s_2\langle\langle b_2\rangle\rangle) \cap k(x).$$

Замечание. Если поле k_0 является алгебраически замкнутым, и k есть поле рациональных функций над k_0, то $\mathrm{cd}_2(k) = 1$ и $\mathrm{cd}_2(k(x)) = 2$. По следствию 2 поле $k(x)$ не обладает свойством $D(2)$. С другой стороны, если $I^2(K) = 0$, то поле K, наоборот, обладает свойством $D(2)$, так как 1 является значением любой двумерной формы над K.

В работе [1] было установлено, что если поле F не обладает свойством $D(2)$, то поле $F_1 = F((t))$ не обладает свойством CS. Напомним, что свойство CS для поля F_1 означает, что для любых кватернионных алгебр Q_1, Q_2 над F_1 и $c \in F_1^*$ такого, что $(Q_1 \otimes Q_2)_{F_1(\sqrt{c})}$ не является алгеброй с делением, существует $d \in F_1^*$ такой, что ${Q_1}_{F_1(\sqrt{c},\sqrt{d})} = 0$, ${Q_2}_{F_1(\sqrt{c},\sqrt{d})} = 0$. Оказывается (см. [1]), что если двумерные формы $s_1\langle\langle b_1\rangle\rangle$, $s_2\langle\langle b_2\rangle\rangle$ и квадратичное расширение $F(\sqrt{c})/F$ дают контрпример к свойству $D(2)$ для поля F, то кватернионные алгебры $Q_1 \simeq (b_1, s_1t)$ и $Q_2 \simeq (b_2, s_2t)$ дают контрпример к свойству CS для поля $F((t))$.

Пусть теперь F – произвольное поле, для которого свойство CS не выполняется, причем кватернионные алгебры Q_1, Q_2 и квадратичное расширение $F(\sqrt{c})/F$ дают контрпример. В частности, $(Q_1 \otimes Q_2)_{F(\sqrt{c})}$ не является алгеброй с делением, из чего вытекает, что $Q_1 \otimes Q_2 \simeq (c, d) \otimes (e, f)$ для некоторых $d, e, f \in F^*$. Заметим, что $(e, f) \neq 0$, так как в противном случае Q_1 и Q_2 имели бы общее квадратичное подполе. Рассмотрим бикватернионные алгебры $D_1 \simeq Q_1 \otimes (c, u)$ и $D_2 \simeq Q_2 \otimes (c, du)$ над полем $F((u))$.

Предложение 3. 1) $\mathrm{ind}(D_1 \otimes D_2) = 2$.

2) *Алгебры D_1 и D_2 не имеют общего биквадратичного поля расщепления. Другими словами, для любых $p, q \in F((u))^*$ либо ${D_1}_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} \neq 0$, либо ${D_2}_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} \neq 0$.*

Доказательство.

1) $D_1 + D_2 = Q_1 + Q_2 + (c, u) + (c, du) = Q_1 + Q_2 + (c, d) = (e, f)$, что доказывает первую часть предложения.

2) Предположим противное, то есть, что ${D_1}_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} = 0$, ${D_2}_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} = 0$. Так как $F((u))^*/F((u))^{*2} = F^*/F^{*2} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, можно предполагать, что $p \in F^*$. Если $q \in F^*$, то легко видеть, что $F(\sqrt{c}) \subset F(\sqrt{p}, \sqrt{q})$, то есть $F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = F(\sqrt{c}, \sqrt{c'})$ для некоторого $c' \in F^*$. Следовательно,

$$ {Q_1}_{F(\sqrt{c},\sqrt{c'})} = {Q_2}_{F(\sqrt{c},\sqrt{c'})} = 0, $$

что невозможно, так как алгебры Q_1, Q_2 вместе с расширением $F(\sqrt{c})/F$ дают контрпример к свойству CS. Следовательно, можно предполагать, что $q = au$, причем $a \in F^*$. Тогда, очевидно,

$$ (Q_1 + (c, a))_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{au})} = (Q_1 + (c, u))_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} = 0, $$

$$ (Q_2 + (c, ad))_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{au})} = (Q_2 + (c, du))_{F((u))(\sqrt{p},\sqrt{q})} = 0. $$

Следовательно,

$$(Q_1 + (c,a))_{F(\sqrt{p})} = 0,\ (Q_2 + (c,ad))_{F(\sqrt{p})} = 0,$$

из чего следует, что

$$Q_{1F(\sqrt{c},\sqrt{p})} = Q_{2F(\sqrt{c},\sqrt{p})} = 0.$$

Последнее равенство противоречит предположению о том, что алгебры Q_1, Q_2 и расширение $F(\sqrt{c})/F$ дают контрпример к свойству $D(2)$. Предложение доказано.

Замечание. Для того, чтобы дать конкретный пример бикватернионных алгебр D_1 и D_2, удовлетворяющих условиям предложения 3, мы начнем с двумерных форм $q_1 \simeq (x-d_1)\langle\langle d_1^2 - 4a\rangle\rangle$ и $q_2 \simeq (x-d_2)\langle\langle d_2^2 - 4a\rangle\rangle$ над полем $k(x)$ из предложения 1. Тогда $Q_1 \simeq (d_1^2 - 4a, (x-d_1)t)$, $Q_2 \simeq (d_2^2 - 4a, (x-d_2)t)$. Следующее равенство легко проверить, сравнивая вычеты в обеих его частях:

$$Q_1 + Q_2 = (x^2 - 4a, -(x-d_1)(x-d_2)((d_1+d_2)x - 4a - d_1d_2)) +$$
$$((d_1^2 - 4a)(d_2^2 - 4a), ((d_1+d_2)x - 4a - d_1d_2)(d_1+d_2)^{-1}t).$$

Применяя конструкцию алгебр D_1, D_2, исходя из алгебр Q_1, Q_2, мы получаем над полем $k(x)((t))((u))$

$$D_1 \simeq (d_1^2 - 4a, (x-d_1)t) \otimes (x^2 - 4a, u),$$

$$D_2 \simeq (d_2^2 - 4a, (x-d_2)t)$$
$$\otimes (x^2 - 4a, -(x-d_1)(x-d_2)((d_1+d_2)x - 4a - d_1d_2)u).$$

Заметим, что если $\mathrm{cd}_2 k = 1$ и $K = k(x)((t))((u))$, то $\mathrm{cd}_2 K = 4$, так что можно построить контрпример с полем K, когомологическая размерность которого равна 4. С другой стороны, для поля, 2-когомологическая размерность которого равна 2, такой контрпример построить нельзя. Более точно имеет место следующее

Предложение 4. *Пусть K – поле такое, что $I^3(K) = 0$. Пусть, далее, D_1, D_2 – бикватернионные алгебры такие, что* $\mathrm{ind}(D_1 + D_2) = 2$. *Тогда существуют $p, q \in K^*$ такие, что*

$$D_{1K(\sqrt{p},\sqrt{q})} = D_{2K(\sqrt{p},\sqrt{q})} = 0.$$

Доказательство. Мы имеем $I^3(K(\sqrt{a}))=0$ для любого $a\in K^*$ (см. [2, лемма 14.2]). Пусть φ_1, φ_2 – формы Алберта, соответствующие алгебрам D_1, D_2. Тогда из [4, §2, теорема 14.4] вытекает, что

$$(\varphi_1-\varphi_2)_{K(\sqrt{b})}\in I^3(K(\sqrt{b}))=0$$

для любого $b\in K^*$ такого, что $(D_1+D_2)_{K(\sqrt{b})}=0$. Следовательно, $\varphi_1\perp-\varphi_2\simeq\langle\langle b\rangle\rangle\otimes\psi$, где $\dim\psi=6$. Пусть $\psi_1\in I^2(K)$ такая форма, что $\psi=\psi_1+\tau$, где $\dim\tau=2$. Тогда мы имеем

$$\varphi_1-\varphi_2=\langle\langle b\rangle\rangle\otimes\psi_1+\langle\langle b\rangle\rangle\otimes\tau=\langle\langle b\rangle\rangle\tau,$$

так как $\langle\langle b\rangle\rangle\otimes\psi_1\in I^3(K)=0$. Значит, $\dim(\varphi_1\perp-\varphi_2)_{\mathrm{an}}\leqslant 4$. Это означает, что φ_1 и φ_2 имеют общую 4-мерную подформу, скажем,

$$\varphi_1\simeq\langle a,b,c,d,e_1,-abcde_1\rangle,$$
$$\varphi_2\simeq\langle a,b,c,d,e_2,-abcde_2\rangle.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi_{1\,K(\sqrt{-ab},\sqrt{-cd})}=\varphi_{2\,K(\sqrt{-ab},\sqrt{-cd})}=0,$$

что равносильно тому, что

$$D_{1\,K(\sqrt{-ab},\sqrt{-cd})}=D_{2\,K(\sqrt{-ab},\sqrt{-cd})}=0,$$

так что можно положить $p=-ab$, $q=-cd$. Предложение доказано.

Следующая теорема [7] является главной мотивировкой настоящей статьи, и для полноты картины мы приводим ее доказательство.

Теорема 5. *Пусть D_1 и D_2 – бикватернионные алгебры над полем k такие, что $\operatorname{ind}(D_1+D_2)=2$. Тогда существует расширение полей l/k степени 4 такое, что $D_{1l}=D_{2l}=0$.*

Доказательство. Пусть $D_1+D_2=Q=(a,b)$. Тогда по соображениям размерности $D_1\otimes Q\simeq M_2(D_2)$. В частности, $Q\hookrightarrow M_2(D_2)$. Отсюда следует, что существуют такие $I,J\in M_2(D_2)$, что $I^2=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$, $J^2=\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}$, и $IJ=-JI$.

Пусть $I=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$. Мы можем предполагать, что $\alpha^2\neq a$, и D_2 является алгеброй с делением (в противном случае теорема оказывается совсем простой, и мы оставляем ее читателю).

Лемма 6. *Существует матрица* $S \in \mathrm{GL}_2(D_2)$ *такая, что* $SIS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Так как $\alpha^2 \neq a$ и $I^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, мы имеем $\beta \neq 0$. Тогда для любого $x \in D_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta x & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Следовательно, полагая $x = \beta^{-1}\alpha$, мы можем считать, что $\alpha = 0$. Далее, так как $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, мы получаем $\beta\gamma = a$, $\beta\delta = 0$. Так как D_2 является алгеброй с делением, то $\delta = 0$, то есть $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\gamma^{-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Положим $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\gamma^{-1} \end{pmatrix}$. Тогда

$$C \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Ввиду последней леммы, сопрягая при помощи подходящей матрицы, мы можем считать, что $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $J = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем $z = -ay$, $t = -x$. Следовательно, $\begin{pmatrix} x & y \\ -ay & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, что означает $x^2 - ay^2 = b$ и $xy = yx$. Отсюда вытекает, что подалгебра $l_1 = k[x, y]$ является подполем алгебры D_2. Более того, $Q_{l_1} = 0$. Если l – максимальное подполе D_2, содержащее l_1, то $Q_l = (D_2)_l = 0$, откуда следует $(D_1)_l = 0$, что и доказывает теорему 5.

Литература

1. D. W. Hoffmann, J.-P. Tignol, *On 14-dimensional quadratic forms in I^3, 8-dimensional forms in I^2, and the common value property.* — Doc. Math. (1998), 189–214.
2. O. T. Izhboldin, *Fields of u-invariant* 9. — Ann. Math. **154** (2001), 529–587.
3. O. T. Izhboldin, N. A. Karpenko, *Some new examples in the theory of quadratic forms.* — Math. Z. **234** (2000), 647–695.
4. W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms.* Springer, Berlin et al., 1985.
5. D. B. Shapiro, J.-P. Tignol, A. R. Wardsworth, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions,* II. — J. Algebra **78** (1982), 58–90.
6. A. S. Sivatski, *Nonexcellence of the function field of the product of two conics.* — K-theory **34** (2005), 209–218.
7. L. J. Risman, *Zero divisors in tensor products of division algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 35–36.

Sivatski A. S. On property $D(2)$ and common splitting field of two biquaternion algebras.

Let F be a field of characteristic $\neq 2$. We say that F has property $D(2)$ if for any quadratic extension L/F and any two binary quadratic forms over F having a common nonzero value over L this value can be chosen in F. There exist examples of fields of characteristic 0 which do not satisfy property $D(2)$. However, as far as we know, such examples of positive characteristic have not been constructed.

In this note we show that if k is a field of characteristic $\neq 2$ such that $|k^*/k^{*2}| \geqslant 4$, then for the field $k(x)$ property $D(2)$ does not hold. Using this we construct two biquaternion algebras over a field $K = k(x)((t))((u))$ such that their sum is a quaternion algebra, but they do not have a common biquadratic (i.e. a field of the kind $K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, where $a, b \in K^*$) splitting field.

С.-Петербургский
электротехнический университет
E-mail: sivatsky@AS3476.spb.edu

Поступило 9 ноября 2006 г.