Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

А. С. Сивацкий

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ГРУППЫ БРАУЭРА КОНИКИ

Основная цель данной статьи – построение неразложимых (в тензорное произведение) центральных алгебр с делением произвольного 2-примарного индекса > 4 над полями с конечным u-инвариантом (напомним, что u-инвариантом поля K называется максимальная размерность анизотропной квадратичной формы над K). Мы начнем с одного результата, касающегося группы Брауэра коники. Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, и пусть X – неособая проективная коника над K. Обозначим через $\mathrm{Br}(X)$ группу Брауэра X, которая, по определению, есть ядро группового гомоморфизма

$$\mathrm{Br}\, K(X) \to \coprod_{x \in X} H^1(K(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

где $K(X)$ – поле функций X, x пробегает все замкнутые точки X, и $K(x)$ есть поле вычетов в точке x. В частности,

$${}_2\mathrm{Br}(X) = \ker({}_2\mathrm{Br}\, K(X) \xrightarrow{\partial} \coprod_{x \in X} K(x)^*/K(x)^{*2}).$$

Напомним, что

$$\partial_x(f,g) = (-1)^{v_x(f)v_x(g)} \frac{f^{v_x(g)}}{g^{v_x(f)}} \in k(x)^*/k(x)^{*2},$$

где v_x есть дискретное нормирование, связанное с точкой x, и символ (f,g) обозначает кватернионную алгебру. Заметим также, что

$$\mathrm{res}_{K(X)/K}\, \mathrm{Br}\, K \subset \mathrm{Br}(X) \quad \text{и} \quad \mathrm{res}_{K(X)/K}\, {}_2\mathrm{Br}\, K \subset {}_2\mathrm{Br}(X).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного проекта Королевского общества Великобритании “Квадратичные формы и центральные простые алгебры в контексте расширений полей”.

Начиная отсюда, мы фиксируем поле K характеристики $\neq 2$, и элементы $a_1, \dots a_n \in K^*$ такие, что $\overline{a_1}, \dots \overline{a_n} \in K^*/{K^*}^2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Для произвольного множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ положим $a_I = \prod\limits_{i\in I} a_i$ (если $I = \emptyset$, то $a_I = 1$). Для произвольного многочлена $f \in K[t]$ обозначим через $l(f)$ старший коэффициент f.

Предложение 1. *Пусть X – неособая проективная коника над K, Q – соответствующая кватернионная алгебра, $\alpha \in {}_2\mathrm{Br}(X)$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i, f_i)$ *для некоторых* $f_i \in K(X)^*$.

2) *Существует самое большее два множества* $I \subset \{1, \dots, n\}$ *таких, что* $Q_{K(\sqrt{a_I})} = 0$.

Тогда существуют элементы $b_1, \dots, b_n \in K^*$ такие, что $\alpha = \mathrm{res}_{K(X)/K} \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$.

Доказательство. Если $Q = 0$, то $K(X) = K(t)$ есть поле рациональных функций над K. Точная последовательность

$$0 \to {}_2\mathrm{Br}\, K \xrightarrow{\mathrm{res}} {}_2\mathrm{Br}\, K(t) \xrightarrow{\partial} \coprod_{x\in\mathbb{P}^1_K} K(x)^*/{K(x)^*}^2$$

показывает, что ${}_2\mathrm{Br}(X) = \mathrm{res}_{K(t)/K}\, {}_2\mathrm{Br}\, K$. Имеется расщепляющий гомоморфизм

$$c : {}_2\mathrm{Br}\, K(t) \to {}_2\mathrm{Br}\, K$$

такой, что $c((f, g)) = (l(f), l(g))$ для всех ненулевых $f, g \in K[t]$. Применяя c к равенству

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (a_i, f_i),$$

мы получаем то, что нужно.

Таким образом, мы можем считать, что $Q = (a, b) \neq 0$. Пусть $z^2 = ax^2 + by^2$ есть уравнение коники X, и пусть v_0 есть точка коники, определенная равенством $y = 0$. Очевидно, $K(v_0) = K(\sqrt{a})$. В частности, $\deg(v_0) = 2$. Предположим вначале, что $K(v_0) \neq K(\sqrt{a_I})$ для каждого $I \subset \{1, \dots, n\}$, то есть $aa_I \notin {K^*}^2$.

Для каждого $f \in K(X)$ обозначим через $V(f)$ конечное множество точек $v \neq v_0$ коники X таких, что $v(f)$ нечетно (мы отождествляем точку коники с соответствующим дискретным нормированием). Пусть $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(f_i)$. Для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ положим $V_I = \bigcap_{i \in I} V(f_i) \setminus \bigcup_{i \notin I} V(f_i)$. Ясно, что $V = \bigcup_I V_I$, и, более того, это объединение дизъюнктно, и $V(f_i) = \bigcup_{i \in I} V_I$. Для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим дивизор

$$\mathfrak{a}_I = \sum_{v \in V_I} v - \frac{1}{2}(\sum_{v \in V_I} \deg v) v_0.$$

Очевидно, $\deg \mathfrak{a}_I = 0$. Так как каждый дивизор степени 0 на X главный, мы получаем, что $\mathfrak{a}_I = \operatorname{div}(g_I) = \sum_{v \in X} v(g_I) v$ для некоторых $g_I \in K(X)^*$. Заметим, что

$$v(g_I) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ v \in V_I \\ 0, & \text{если } \ v \notin V_I, v \neq v_0 \end{cases},$$

и, следовательно, $v(f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1})$ четно для всех i и $v \neq v_0$. Более того, так как $\deg(\operatorname{div}(f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1})) = 0$, $\deg v_0 = 2$, и $2 | \deg v$ для всех $v \in X$, мы заключаем, что $v_0(f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1})$ также четно, то есть $v(f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1})$ четно для всех i и всех $v \in X$.

Таким образом, мы имеем $\operatorname{div}(f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1}) = 2 \operatorname{div}(h_i)$, то есть $f_i(\prod_{i \in I} g_I)^{-1} = u_i h_i^2$ для некоторых $u_i \in K^*$ и $h_i \in K(X)^*$. Из этого следует, что

$$\alpha_{K(X)} = \sum_{i=1}^{n} (a_i, f_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, \ u_i \prod_{i \in I} g_I h_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, u_i) + \sum_I (a_I, g_I).$$

Теперь, пусть I_0 есть некоторое подмножество $\{1, \ldots, n\}$ и $v \in V_{I_0}$. Тогда мы получаем

$$1 = \partial_v(\alpha_{K(X)}) = \partial_v(\sum_I (a_I, g_I)) = \partial(a_{I_0}, g_{I_0}),$$

так как $v(g_I)=0$, если $I\neq I_0$.

С другой стороны, если $v\notin V_{I_0}$ и $v\neq v_0$, то, очевидно, $\partial_v(a_{I_0},g_{I_0})=1$, так как $v(g_{I_0})=0$. Итак, мы заключаем, что $\partial_v(a_{I_0},g_{I_0})=1$ для всех $v\neq v_0$.

Следующий шаг заключается в доказательстве того, что и для $v=v_0$ мы имеем $\partial_v(a_{I_0},g_{I_0})=1$. Предположим противное. Тогда $v_0(g_{I_0})$ нечетно. Так как $\deg\operatorname{div}(g_{I_0})=0$ и $\deg v_0=2$, то существует $v\neq v_0$ такой, что $v(g_{I_0})$ нечетно, и $4\not|\deg v$. Мы имеем

$$1=\partial_v(a_{I_0},g_{I_0})=a_{I_0}(\operatorname{mod}K(v)^{*2}).$$

Следовательно, мы получаем, что $K(\sqrt{a_{I_0}})\subset K(v)$. Далее, так как $\deg v$ не делится на 4, то степень $[K(v):K(\sqrt{a_{I_0}})]$ нечетна. Так как $Q_{K(v)}=0$, мы заключаем, что $Q_{K(\sqrt{a_{I_0}})}=0$. Следовательно, по условию 2) рассматриваемого предложения существует самое большее два множества I_0, которые могут удовлетворять неравенству $\partial_{v_0}(a_{I_0},g_{I_0})\neq 1$. Пусть, например, $\partial_{v_0}(a_{I_{01}},g_{I_{01}})\neq 1$ и $\partial_{v_0}(a_{I_{02}},g_{I_{02}})\neq 1$. Мы получаем

$$\prod_{i\in I_{01}}a_i\prod_{i\in I_{02}}a_i=\partial_{v_0}((a_{I_{01}},g_{I_{01}})+(a_{I_{02}},g_{I_{02}}))=\partial_{v_0}(\sum_{I\neq I_{01},I_{02}}(a_I,g_I))=1.$$

Итак, $a_{I_{01}}=a_{I_{02}}(\operatorname{mod}K^{*2})$ (напомним, что $a\neq a_I(\operatorname{mod}K^{*2})$ для каждого I), что невозможно ввиду линейной независимости $\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\in K^*/K^{*2}$.

Случай, когда существует единственное множество I_0 такое, что $\partial_{v_0}(a_{I_0},\ g_{I_0})\neq 1$, рассматривается аналогично.

Следовательно, мы получили, что $\partial_v(a_I,g_I)=1$ для всех $I\subset\{1,\dots,n\}$ и $v\in X$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha\in{}_2\mathrm{Br}(X)\setminus\operatorname{res}_{K(X)/K}({}_2\mathrm{Br}\,K)$. *Тогда* $\operatorname{ind}(\alpha)\geqslant 4$.

Доказательство. Теорема Меркурьева о гомоморфизме норменного вычета степени 2 [4] утверждает, что для любого поля F естественное отображение $K_2(F)/2K_2(F)\to{}_2\mathrm{Br}\,F$ является изоморфизмом. Вввиду этого и результатов [10] мы получаем, что если ${}_2\mathrm{Br}(X)\neq\operatorname{res}_{K(X)/K}({}_2\mathrm{Br}\,K)$, то

$${}_2\mathrm{Br}(X)/\operatorname{res}_{K(X)/K}({}_2\mathrm{Br}\,K)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ Q=2D$$

для некоторого $D\in\mathrm{Br}\,K$ и $D_{K(X)}$ является ненулевым элементом в факторгруппе

$${}_2\mathrm{Br}(X)/\operatorname{res}_{K(X)/K}({}_2\mathrm{Br}\,K).$$

Таким образом, $\alpha = (D+\beta)_{K(X)}$, где $\beta \in {}_2\mathrm{Br}\,K$. Очевидно, мы можем предполагать, что α является алгеброй с делением. Пусть D_1 есть центральная алгебра с делением над K, представляющая элемент $D+\beta$. Так как $\exp D_1 = 4$, мы имеем $\operatorname{ind} D_1 \geqslant 4$. Допустим, что $\operatorname{ind}(\alpha) = 2$. В таком случае, по теореме Меркурьева о редукции индекса [5] $D_1 \simeq Q \otimes_K Q'$ для некоторой центральной K-алгебры с делением Q'. Очевидно, что ${Q'}_{K(X)} = D_{1K(X)} = \alpha$. Так как $\exp D_1 = 4$, и $\exp Q = 2$, то $\exp Q' = 4$. Применяя теорему о редукции индекса еще раз, мы получаем, что $Q' \simeq Q \otimes_K Q''$ для некоторой центральной K-алгебры с делением Q'', из чего следует, что

$$D_1 \simeq Q'' \otimes_K Q \otimes_K Q \simeq Q'' \otimes_K M_4(K).$$

Мы получаем противоречие, так как D_1 является алгеброй с делением. Лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство предложения 1 в случае, когда $aa_I \notin K^{*2}$ для каждого $I \subset \{1,\dots,n\}$. Действительно, в силу леммы 2 мы получаем, что $(a_I, g_I) = \operatorname{res}_{K(X)/K} \beta_I$ для некоторых $\beta_I \in {}_2\mathrm{Br}\,K$. Так как $(\beta_I)_{K(\sqrt{a_I})(X)} = 0$, то мы имеем, что $(\beta_I)_{K(\sqrt{a_I})}$ равно либо нулю, либо $Q_{K(\sqrt{a_I})}$, из чего, в свою очередь, вытекает, что β_I равно либо (a_I, c_I), либо $(a_I, c_I)+Q$ для некоторых $c_I \in K^*$. Следовательно,

$$\alpha = \operatorname{res}_{K(X)/K}\Big(\sum_I (a_I, c_I)\Big) = \operatorname{res}_{K(X)/K}\Big(\sum_{i=1}^n \big(a_i, \prod_{i\in I} c_I\big)\Big),$$

так что можно положить $b_i = \prod_{i\in I} c_I$.

Остается разобрать случай, когда $aa_I \in K^{*2}$ для некоторого $I \in \{1,\dots,n\}$. Переходя к полю рациональных функций $K(t)$, мы имеем

$$Q = (a,b) = (at^2+b, -ab),$$

и, очевидно, $(at^2+b)a_I \notin K(t)^{*2}$. Отсюда $\alpha_{K(X)(t)} = \sum_{i=1}^n (a_i, p_i)$ для некоторых многочленов $p_i \in K[t]$, и, следовательно, $\alpha = \sum_{i=1}^n (a_i, l(p_i))$. Предложение доказано.

Следствие 3. *В обозначениях предложения 1 предположим, что* $\alpha = \mathrm{res}_{K(X)/K}\,\gamma$ *для некоторого* $\gamma \in \mathrm{Br}\,K$. *Тогда* γ *равно либо* $\sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$, *либо* $Q + \sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ *для некоторых* $b_i \in K^*$.

Доказательство. Так как $\mathrm{res}_{K(X)/K}(\gamma - \sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i)) = 0$, причем $\ker(\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}\,K(X)) = \langle Q\rangle$ является циклической группой с образующей Q, то следствие доказано.

Мы не можем исключить условие 2) из предложения 1, как показывают следующие два примера.

Пример A. Пусть K – поле, $a_1, a_2, a_3 \in K^*$, $D \in {}_2\mathrm{Br}\,K$, $D_{K(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\sqrt{a_3})} = 0$, и D не является суммой трех кватернионных алгебр (существование такого D установлено в [6] и [1]). Тогда по [3] мы имеем

$$D_{K(\sqrt{a_3})} = (a_1, b_1 + c_1\sqrt{a_3}) + (a_2, b_2 + c_2\sqrt{a_3}) \tag{1}$$

для некоторых $b_1, b_2, c_1, c_2 \in K$, и, более того,

$$(a_1, b_1^2 - a_3c_1^2) + (a_2, b_2^2 - a_3c_2^2) = N_{K(\sqrt{a_3})/K}D = 0,$$

то есть $(a_1, b_1^2 - a_3c_1^2) = (a_2, b_2^2 - a_3c_2^2)$. Положим $Q = (a_1, b_1^2 - a_3c_1^2)$, и пусть X есть коника, соответствующая Q. Тогда мы получаем

$$N_{K(X)(\sqrt{a_3})/K(X)}(a_1, b_1 + c_1\sqrt{a_3}) = (a_1, b_1^2 - a_3c_1^2)_{K(X)} = 0,$$

$$N_{K(X)(\sqrt{a_3})/K(X)}(a_2, b_2 + c_2\sqrt{a_3}) = (a_2, b_2^2 - a_3c_2^2)_{K(X)} = 0.$$

Отсюда по [3] имеем

$$(a_1, b_1 + c_1\sqrt{a_3})_{K(X)(\sqrt{a_3})} = (a_1, f_1)_{K(X)(\sqrt{a_3})}, \tag{2}$$

$$(a_2, b_2 + c_2\sqrt{a_3})_{K(X)(\sqrt{a_3})} = (a_2, f_2)_{K(X)(\sqrt{a_3})} \tag{3}$$

для некоторых $f_1, f_2 \in K(X)^*$. Объединяя (1), (2) и (3), мы получаем, что

$$(D - (a_1, f_1) - (a_2, f_2))_{K(X)(\sqrt{a_3})} = 0,$$

то есть

$$D_{K(X)} = (a_1, f_1) + (a_2, f_2) + (a_3, f_3)$$

для некоторых $f_1, f_2, f_3 \in K(X)^*$. С другой стороны, если бы следствие 3 предложения 1 было бы верным в этом случае, то мы получили бы, что

$$D = (a_1, e_1) + (a_2, e_2) + (a_3, e_3)$$

для некоторых $e_1, e_2, e_3 \in K^*$, что противоречило бы предположению относительно D.

Заметим, что в этом примере

$$Q_{K(\sqrt{a_1})} = Q_{K(\sqrt{a_1 a_3})} = Q_{K(\sqrt{a_2})} = Q_{K(\sqrt{a_2 a_3})} = 0,$$

так что имеется по меньшей мере четыре элемента a_I таких, что $Q_{K(\sqrt{a_I})} = 0$.

Пример Б. Пусть K – поле, $\sqrt{-1} \in K$, $Q = (a_1, a_2)$ – нетривиальная кватернионная алгебра, X – соответствующая коника. Положим $\alpha = (a_1, y) + (a_2, x) \in {}_2\mathrm{Br}\, K(X)$, где $a_1 x^2 + a_2 y^2 = 1$ есть уравнение аффинной части коники. Легко видеть, что $\alpha \in {}_2\mathrm{Br}(X)$ и $N_{K(X)/K(x)}\alpha = Q$. В частности, $\alpha \notin \mathrm{res}_{K(X)/K}({}_2\mathrm{Br}\, K)$. Заметим, что так как $\sqrt{-1} \in K$, то

$$Q = (a_1, a_2) = (a_1 + a_2, -a_1 a_2) = (a_1 + a_2, a_1 a_2),$$

откуда

$$Q_{K(\sqrt{a_1})} = Q_{K(\sqrt{a_2})} = Q_{K(\sqrt{a_1 a_2})} = 0,$$

так что имеется три элемента a_I таких, что $Q_{K(\sqrt{a_I})} = 0$.

Мы сохраняем условия предложения 1. Пусть L/K есть некоторое расширение полей. Рассмотрим следующие абелевы группы:

$$A(L/K) = \{\gamma \in {}_2\mathrm{Br}\, K \mid \mathrm{res}_{L/K}\, \gamma = \sum_{i=1}^{n} (a_i, f_i)$$
$$\text{для некоторых} \quad f_i \in L^*\},$$
$$B(L/K) = \{\, \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \in {}_2\mathrm{Br}\, K \mid b_i \in K^*\},$$
$$H(L/K) = A(L/K)/B(L/K).$$

Следствие 3 утверждает, что если $L = K(X)$, где X – неособая проективная коника, соответствующая кватернионной алгебре Q, то $H(L/K) = \langle Q \rangle$ (разумеется, может оказаться, что Q имеет нулевой образ в $H(L/K)$). Теперь мы рассмотрим случай квадрики размерности большей, чем 1. Нам потребуется следующая

Лемма 4.

1) *Если $F/L/K$ есть башня расширений полей, и $H(L/K) = H(F/L) = 0$, то и $H(F/K) = 0$. Если $H(F/K) = 0$, то и $H(L/K) = 0$.*
2) *Если расширение L/K чисто трансцендентно, то $H(L/K) = 0$.*
3) *Если $H(F/K) = 0$, и расширение L/K таково, что LF/F чисто трансцендентно, то $H(L/K) = 0$.*

Доказательство. 1) Это немедленно следует из определений групп $H(F/K)$, $H(L/K)$ и $H(F/L)$.

2) Ввиду 1) достаточно рассмотреть случай $L = K(t)$. Пусть $u \in {}_2\mathrm{Br}\, K$ таков, что $u_{K(t)} = \sum_{i=1}^{n}(a_i, f_i)$ для некоторых $f_i \in K[t]$. Тогда $u = \sum_{i=1}^{n}(a_i, l(f_i))$, что и доказывает утверждение.

3) Это немедленно вытекает из 1) и 2).

Предложение 5. *Пусть $X = X_\varphi$ есть проективная квадрика над K, соответствующая анизотропной квадратичной форме φ. Положим $L = K(X)$.*

1) *Если $\dim\varphi = 4$, и $\mathrm{disc}(\varphi)a_I \in K^{*2}$ для некоторого $I \neq \varnothing$, то $H(L/K) = \langle (a,b) \rangle$, где (a,b) – произвольная кватернионная K-алгебра такая, что $C_0(\varphi) \simeq (a,b)_{K(\sqrt{\mathrm{disc}\,\varphi})}$.*
2) *Если $\dim\varphi = 4$ и $\mathrm{disc}(\varphi)a_I \notin K^{*2}$ для всех I, то $H(L/K) = 0$.*
3) *Если $\dim\varphi \geqslant 5$, то $H(L/K) = 0$.*

Доказательство. 1), 2). Пусть $d = \mathrm{disc}(\varphi)$ и $z^2 - ax^2 - by^2 + abd = 0$ есть уравнение аффинной части X. Мы имеем

$$K(X) = K(x, y, \sqrt{ax^2 + by^2 - abd}) = K(x)(C),$$

где C есть коника над $K(x)$, соответствующая кватернионной $K(x)$-алгебре $(b, ax^2 - abd)$.

Пусть $u \in A(L/K)$. По следствию 3 мы имеем

$$u_{K(x)} = \delta + \sum_{i=1}^{n}(a_i, f_i), \tag{4}$$

где δ равно либо нулю, либо $(b, ax^2 - abd)$, и $f_i \in K[x]$. Далее,

$$u = c(u_{K(x)}) = c(\delta) + \sum_{i=1}^{n}(a_i, l(f_i)),$$

где $c(\delta)$ равно либо нулю, либо (a,b). Это доказывает, что $H(L/K) \subset \langle (a,b) \rangle$.

Предположим вначале, что $da_I \in K^{*2}$ для некоторого I. Тогда, так как

$$(ab)^2 d = a(by)^2 + b(ax)^2 - abz^2,$$

и

$$(a,b)_{K(X)} = (a(by)^2 + b(ax)^2, -ab) =$$

$$(a(by)^2 + b(ax)^2 - abz^2,\ ab(a(by)^2 + b(ax)^2),$$

мы получаем, что $(a,b) \in H(L/K)$.

Теперь предположим, что $da_I \notin K^{*2}$ для всех I. Сравним вычеты в многочлене $(x^2 - bd)$ в левой и правой частях равенства (4). Мы имеем

$$\partial_{x^2-bd}(u_{K(x)}) = 0,$$

$$\partial_{x^2-bd}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i, f_i)\Big) = a_I \quad \text{для некоторого} \quad I. \tag{5}$$

Предположим, что $\delta \neq 0$, то есть $\delta = (b, ax^2 - abd)$. Из равенств $\partial_{x^2-bd}(\delta) = b$ и (5) следует, что $ba_I \in K(\sqrt{bd})^{*2}$. Так как $da_I \notin K^{*2}$, мы получаем, что $ba_I \in K^{*2}$. Итак, мы доказали часть 2), если $ba_I \notin K^{*2}$ для всех I. С другой стороны,

$$\varphi_{K(t)} \simeq \langle 1, -ab(at^2+b), -(at^2+b), abd \rangle,$$

и $(at^2+b)a_I \notin K(t)^{*2}$. Рассуждения выше показывают, что $H(LK(t)/K(t)) = 0$, так что по лемме 4 мы получаем $H(L/K) = 0$.

3) Очевидно, можно выбрать подформу ψ размерности 4 формы $\varphi_{K(t)}$ такую, что $\operatorname{disc}(\psi)a_I \notin K(t)^{*2}$. Так как форма $\varphi_{K(t)(X_\psi)}$ изотропна, то расширение $K(t)(X_\psi)(X_\varphi)/K(t)(X_\psi)$ чисто трансцендентно. Применяя часть 2) и лемму 4, мы видим, что $H(K(X_\varphi)/K) = 0$.

Теперь мы в состоянии усилить основные результаты работ [7] и [8]. Напомним соответствующие обозначения.

Пусть F – произвольное поле, $n \geqslant 2$, $a, b_1, \ldots, b_n \in F^*$, $D \in {}_2\mathrm{Br}\,F$. Назовем тройку $(F, D, \{a, b_1, \ldots, b_n\})$ допустимой, если выполняются следующие условия:

a) Элементы $\overline{a}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n} \in F^*/F^{*2}$ линейно независимы.

b) $\operatorname{ind} D = 2$.

c) $D_{F(\sqrt{a},\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_n})} = 0$.

d) Для любой башни расширений $F \subset F_1 \subset F_2 \subset L = F(\sqrt{a},\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_n})$ такой, что

$$\sqrt{a} \notin F_2^*, \quad [L:F_1] = 8, \quad [F_2:F_1] = 4,$$

имеем

$$D_{F_1} \notin {}_2\mathrm{Br}(F_1(\sqrt{a})/F_1) + {}_2\mathrm{Br}(F_2/F_1).$$

e) Поле F не имеет расширений нечетной степени.

Следствие 6. *Пусть $(F, D, \{a, b_1, \dots, b_n\})$ – допустимая тройка, φ – анизотропная квадратичная форма над F, и $\dim\varphi \geqslant 5$. Положим $X = X_\varphi$, и обозначим через $F(X)_{odd}$ какое-нибудь максимальное расширение нечетной степени поля $F(X)$. Тогда тройка $(F(X)_{odd}, D_{F(X)_{odd}}, \{a, b_1, \dots, b_n\})$ также является допустимой.*

Доказательство. Очевидно, все вышеуказанные условия, за исключением, может быть, d) выполняются. Проверим условие d). Сначала мы проверим его для поля $F(X)$. Итак, предположим, что существует башня полей $F(X) \subset F_1(X) \subset F_2(X) \subset L(X) = F(\sqrt{a},\sqrt{b_1},\dots,\sqrt{b_n})(X)$ такая, что

$$\sqrt{a} \notin F_2^*, \quad [L:F_1] = 8, \quad [F_2:F_1] = 4$$

и

$$D_{F_1(X)} \in {}_2\mathrm{Br}(F_1(X)(\sqrt{a})/F_1(X)) + {}_2\mathrm{Br}(F_2(X)/F_1(X)).$$

Заметим, что $F_2 = F_1(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$, для некоторых $d_1, d_2 \in F^*$, и, следовательно, по [3] мы имеем

$$D_{F_1(X)} = (a, f) + (d_1, f_1) + (d_2, f_2)$$

для некоторых $f, f_1, f_2 \in F_1(X)^*$. В силу части 3) предложения 5 мы заключаем, что

$$D_{F_1} = (a, u) + (d_1, u_1) + (d_2, u_2)$$

для некоторых $u, u_1, u_2 \in F_1^*$, что противоречит условию d) для допустимой тройки $(F, D, \{a, b_1, \dots, b_n\})$.

С другой стороны, в работе [8] показано, что если тройка $(K, D, \{a, b_1, \dots, b_n\})$ является допустимой, то тройка K_{odd}, $D_{K_{odd}}$,

$\{a, b_1, \ldots, b_n\})$ тоже допустима (см. также лемму 9 ниже). Это завершает доказательство следствия 6.

Напомним теперь некоторые дополнительные результаты из работ [7] и [8].

Если тройка $(F, D, \{a, b_1, \ldots, b_n\})$ является допустимой, и $E = F((t_0))((t_1))\ldots((t_n))$ – многомерное поле рядов Лорана от переменных $t_0, t_1, \ldots, t_n$, то алгебра с делением

$$A = D \otimes_E (a, t_0) \otimes_E (b_1, t_1) \otimes \cdots \otimes_E (b_n, t_n)$$

не является тензорным произведением двух нетривиальных центральных простых алгебр над любым расширением нечетной степени поля E, и, кроме того, $\operatorname{ind} A = 2^{n+1}$ [8]. Более того, мультиквадратичное расширение $F(\sqrt{b}_1, \ldots, \sqrt{b}_n)/F$ не является 4-превосходным, и если $D = (u, v)$, то форма $\langle uv, -u, -v, a\rangle$ дает соответствующий контрпример [7]. Наконец, если k – поле и элементы $\overline{a}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n} \in k^*/{k^*}^2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то существует расширение F/k и кватернионная алгебра D над F такая, что тройка $(F, D, \{a, b_1, \ldots, b_n\})$ является допустимой [8].

С другой стороны, следствие 6 и рассуждение в лемме 9, приведенной ниже, показывают, что если тройка $(F, D, \{a, b_1, \ldots, b_n\})$ допустима, то существует расширение K/F такое, что тройка $(K, D_K, \{a, b_1, \ldots, b_n\})$ также допустима, $u(K) = 4$ и поле K не имеет расширений нечетной степени.

Суммируя данные результаты, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 7. *Пусть k – поле, $n \geqslant 2$, и элементы $\overline{a}$, $\overline{b_1}$, $\ldots$, $\overline{b_n} \in k^*/{k^*}^2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Тогда существует расширение K/k такое, что*

1) *$u(K) = 4$;*
2) *K не имеет расширений нечетной степени;*
3) *Расширение $K(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n})/K$ не является 4-превосходным, и контрпример дается некоторой формой размерности 4 и дискриминанта a;*
4) *Существует центральная алгебра с делением A над полем $E = K((t_0))((t_1))\ldots((t_n))$ такая, что $\operatorname{ind} A = 2^{n+1}$, и, кроме того, A_L не является тензорным произведением двух нетривиальных центральных простых алгебр над произвольным расширением L/E нечетной степени (заметим, что $u(E) = 2^{n+3}$ и $\operatorname{cd}_2(E) = n + 3$).*

Теперь вычислим группу H для расширения, определяемого полем функций многообразия Севери–Брауэра, связанного с центральной простой алгеброй экспоненты 2.

Следствие 8. *Пусть $D \in {}_2\mathrm{Br}\,K$, и пусть либо $\mathrm{ind}\,D \geqslant 4$, либо $\mathrm{ind}\,D = 2$ и $D_{K(\sqrt{a_I})} \neq 0$ для любого I. Обозначим через $K(D)$ поле функций многообразия Севери–Брауэра $SB(D)$, соответствующего алгебре D. Тогда $H(K(D)/K) = \langle D\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{ind}\,D = 2^n$, и $n \geqslant 2$. Пусть, далее, D_1 – алгебра с делением, подобная алгебре D, $F = SB(D_1)$, и $L = SB(D)$. Тогда, так как $SB(D_F) \simeq \mathbb{P}_F^{\deg D - 1}$, расширение LF/F чисто трансцендентно. Следовательно, по лемме 4 достаточно доказать следствие 8 в случае, когда D является алгеброй с делением.

В начале рассмотрим случай, когда D является тензорным произведением нескольких кватернионных алгебр. Будем вести рассуждение индукцией по n. Пусть $\varphi \in I^2(K)$ – квадратичная форма, соответствующая D при изоморфизме $I^2(K)/I^3(K) \simeq {}_2\mathrm{Br}\,K$. Легко видеть, что мы можем выбрать φ так, что $\dim\varphi = 2n+2$, и, более того, ни одна форма размерности $< 2n+2$ не может соответствовать алгебре D при этом изоморфизме. Пусть $X = X_\varphi$ – проективная квадрика, определяемая формой φ. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K(D) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ K(X) & \longrightarrow & K(X)(D) \end{array},$$

где все отображения являются естественными вложениями полей.

Если $n = 2$, то $\mathrm{ind}\,D_{K(X)} = 2$, и $D_{K(X)(\sqrt{a_I})} \neq 0$ для любого I, так как $D_{K(\sqrt{a_I})} \neq 0$, и $\ker({}_2\mathrm{Br}\,F \to {}_2\mathrm{Br}\,F(Y)) = 0$ для любого поля F и любой квадрики Y над F размерности > 2.

Если $n \geqslant 3$, то $4 \leqslant \mathrm{ind}\,D_{K(X)} < \mathrm{ind}\,D$. Таким образом, в обоих случаях ($n = 2$ или $n \geqslant 3$) мы можем применить индукционное предположение к расширению $K(X)(D)/K(X)$. Пусть $u \in H(K(D)/K)$. По индукционному предположению мы имеем

$$u_{K(X)} \in H(K(X)(D)/K(X)) \subset \langle D_{K(X)}\rangle.$$

Следовательно, либо $u \in H(K(X)/K)$, либо $u + D \in H(K(X)/K)$. Так как по предложению 5 мы получаем $H(K(X)/K) = 0$, доказательство в случае, когда D есть тензорное произведение кватернионных алгебр, закончено.

Таким образом, чтобы доказать предложение в общем случае, достаточно построить расширение L/K такое, что D_L является тензорным произведением кватернионных алгебр, $\operatorname{ind} D_L \geqslant 4$, и $H(L/K) = 0$. Нам потребуется следующая

Лемма 9.

1) *Если L/K – конечное расширение нечетной степени, то $H(L/K) = 0$.*
2) *Если π – 3-кратная форма Пфистера над K, то $H(K(X_\pi)/K) = 0$.*
3) *Пусть F – поле, $D \in {}_2\mathrm{Br}\, F$ – алгебра с делением. Предположим, что F не имеет расширений нечетной степени и $I^3(F) = 0$. Тогда D является тензорным произведением кватернионных алгебр.*

Доказательство. 1) Пусть $u \in {}_2\mathrm{Br}\, K$ и $u_L = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$, где $b_i \in L^*$. Тогда

$$u = N_{L/K}(u_L) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, N_{L/K} b_i),$$

что доказывает 1).

2) Это частный случай предложения 5, так как $\dim \pi = 8$.

3) Эта часть леммы доказана в [9] и [2].

Мы возвращаемся к доказательству следствия 8 в общем случае. Для произвольного поля F обозначим через $\widehat{F}$ какое-нибудь максимальное расширение нечетной степени поля F, и через $\widetilde{F}$ композит всевозможных расширений $F(X_\pi)$, где π пробегает все анизотропные 3-кратные формы Пфистера над F. Рассмотрим следующую бесконечную башню полей $K = K_1 \subset K_2 \subset \dots$, где

$$K_{i+1} = \begin{cases} \widehat{K_i}, & \text{если } i \text{ нечетно}, \\ \widetilde{K_i} & \text{если } i \text{ четно} \end{cases}.$$

Положим $L = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$. Легко видеть, что L не имеет расширений нечетной степени и $I^3(L) = 0$. Применяя лемму 9, мы получаем, что $H(L/K) = 0$, и D_L есть тензорное произведение кватернионных алгебр. Более того, по теореме о редукции индекса для центральных простых алгебр [5] мы имеем $\operatorname{ind} D_L = \operatorname{ind} D$. Данные свойства поля L доказывают следствие 8 в общем случае.

Литература

1. S. Amitsur, L. Rowen, J.-P. Tignol, *Division algebras of degree* 4 *and* 8 *with involution.* — Israel J. Math. **33** (1979), 133–148.
2. B. Kahn, *Quelques remarques sur le U-invariant.* — Sém. Th. Nombres Bordeaux no. 2 (1990), 155–161.
3. T. Y. Lam, D. B. Leep, J.-P. Tignol, *Biquaternion algebras and quartic extensions.* — Pub. Math. IHES **77** (1993), 63–102.
4. А. С. Меркурьев, *О символе норменного вычета степени* 2. — Докл. АН СССР **261**, № 3 (1981), 542–547.
5. А. С. Меркурьев, *Простые алгебры и квадратичные формы.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **55** (1991), 218–224.
6. L. H. Rowen, *Central simple algebras.* — Israel J. Math. **29** (1978), 285–301.
7. A. S. Sivatski, *Nonexcellence of multiquadratic field extensions.* — J. Algebra **275** no. 2 (2004), 859–866.
8. A. S. Sivatski, *On indecomposable algebras of exponent* 2. — to appear in Israel J. Math.
9. А. С. Сивацкий, *Инварианты в алгебраической теории квадратичных форм.* — Канд. дисс., Санкт-Петербургский Государственный Университет (1988).
10. А. А. Суслин, *Кватернионный гомоморфизм для полей функций на конике.* — Докл. АН СССР **265**, № 2 (1982), 292–297.

Sivatski A. S. On some elements of the Brauer group of a conic.

The main purpose of this paper is to strenghen the author's results in articles [7] and [8]. Let k be a field of characteristic $\neq 2$, $n \geqslant 2$. Suppose that elements $\overline{a}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_n} \in k^*/k^{*2}$ are linearly independent over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We construct a field extension K/k and a quaternion algebra $D = (u, v)$ over K such that

1) The field K has no proper extension of odd degree.

2) The u-invariant of K equals 4.

3) The multiquadratic extension $K(\sqrt{b_1}, \dots, \sqrt{b_n})/K$ is not 4-excellent, and the quadratic form $\langle uv, -u, -v, a\rangle$ provides a corresponding counterexample.

4) The division algebra $A = D \otimes_E (a, t_0) \otimes_E (b_1, t_1) \cdots \otimes_E (b_n, t_n)$ does not decompose into a tensor product of two nontrivial central simple algebras over E, where $E = K((t_0))((t_1)) \dots ((t_n))$ is the Laurent series field in variables $t_0, t_1, \dots, t_n$.

5) $\operatorname{ind} A = 2^{n+1}$. In particular, the algebra A provides an example of an indecomposable algebra of index 2^{n+1} over a field, whose u-invariant and 2-cohomological dimension equal 2^{n+3} and $n+3$, respectively.

С.-Петербургский
электротехнический университет
E-mail: sivatsky@AS3476.spb.edu

Поступило 9 ноября 2006 г.