Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

А. С. Сивацкий

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ НЕПРЕВОСХОДНЫХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛЕЙ

1. Обозначения и терминология

Целью данной статьи является конструкция непревосходных расширений полей определенных типов. Напомним, что расширение полей L/F называется превосходным (соответственно n-превосходным), если для любой квадратичной формы φ над F (соответственно для любой квадратичной формы φ над F размерности не более чем n) анизотропная часть формы φ_L определена над F. Хорошо известно, что любое квадратичное расширение превосходно (см. например, [4]). Очевидно, то же верно для расширений нечетной степени и чисто трансцендентных расширений, так как при этих расширениях анизотропные формы не могут стать изотропными. Ниже мы рассматриваем башни расширений $F_1 \subset F_2 \subset F_3$, где расширение F_3/F_2 квадратичное, а расширение F_2/F_1 либо квадратичное, либо нечетной степени, либо чисто трансцендентное степени 1. Мы приводим многочисленные примеры расширений F_3/F_1 данных типов, не являющихся 4-превосходными.

Главный источник информации, касающейся квадратичных форм над полями, – книга [4]. Наши обозначения стандартны. Все поля, рассматриваемые в дальнейшем, имеют характеристику $\neq 2$. Под формой мы всегда понимаем неособую квадратичную форму над полем. $W(F)$ и $I(F)$ обозначают соответственно кольцо Витта поля F, и его идеал классов четномерных форм. Анизотропная часть формы φ обозначается через φ_{an}. Несколько злоупотребляя обозначениями, мы пишем $\varphi = 0$, если форма φ гиперболична, то есть ее анизотропная часть нулевая. Через $D(\varphi)$ мы обозначаем множество ненулевых значений формы φ. Для формы φ над полем F обозначим через $F(\varphi)$ поле функций

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного проекта Королевского общества Великобритании "Квадратичные формы и центральные простые алгебры в контексте расширений полей".

на проективной квадрике, соответствующей форме φ. Если L/F – расширение полей, то φ_L – расширение формы φ на L, то есть форма $\varphi \otimes_F L$. Для $a, b \in F^*$ символ $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ обозначает 2-кратную форму Пфистера $\langle 1, -a, -b, ab\rangle$. Если k – поле и $p \in k[x]$ – неприводимый многочлен, то через $k(p)$ мы обозначаем поле вычетов $k[x]/p$. Если p фиксирован, $f \in k[x]$ и p не делит f, то, если не оговорено противное, $\overline{f}$ есть образ f в $k(p)^*/k(p)^{*2}$.

Основной инструмент в конструкции данных примеров – так называемый "второй гомоморфизм вычета" $\partial_p : I^2/I^3(k(x)) \to k(p)^*/k(p)^{*2}$ для произвольного неприводимого многочлена p от переменной x над полем k (см. [4]). Напомним, что вычет 2-кратной формы Пфистера $\langle\langle f, g\rangle\rangle$ в многочлене p вычисляется следующим образом:

$$\partial_p(\langle\langle f, g\rangle\rangle) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad v_p(f) = v_p(g) = 0, \\ \overline{f}, & \text{если} \quad v_p(f) = 0, \quad v_p(g) = 1 \end{cases}.$$

(v_p – соответствующее дискретное нормирование на $k(x)$). В сущности, эти равенства задают отображение ∂_p на всей группе $I^2/I^3(k(x))$.

2. Непревосходность расширений четвертой степени

Мы начнем со следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть k – поле, $a, b, c \in k$, $a \in k^* \setminus k^{*2}$, $b^2 - ac^2 \in k^* \setminus k^{*2}$. Положим $l = k(\sqrt{b + c\sqrt{a}})$ и $F = k(t, x, y)$, где t, x, y – переменные. Тогда существует четырехмерная квадратичная форма φ над F такая, что $\dim\ (\varphi_{lF})_{\mathrm{an}} = 2$, и форма $(\varphi_{lF})_{\mathrm{an}}$ не является определенной над F. (Это означает, что расширение lF/F не является 4-превосходным.)*

Доказательство. Пусть $f = ((t^2 - a)x^2 - (b^2 - ac^2))((t^2 - a)y^2 - 1)$,

$$\varphi_1 \simeq (t + \sqrt{a})\langle 1,\ -(b + c\sqrt{a})\rangle,$$

$$\varphi_2 \simeq (t + \sqrt{a})\langle 1,\ -f(b + c\sqrt{a})\rangle.$$

Подберем $q \in F^*$ такое, что формы $(t + \sqrt{a})\langle\langle q\rangle\rangle$ и $q(t + \sqrt{a})(b + c\sqrt{a})\langle\langle qf\rangle\rangle$ определены над F. Предполагая, что q удовлетворяет этому условию, мы получаем, что форма

$$\varphi \simeq \varphi_2 \perp -q\varphi_1 \simeq (t + \sqrt{a})\langle\langle q\rangle\rangle \perp q(t + \sqrt{a})(b + c\sqrt{a})\langle\langle qf\rangle\rangle$$

также определена над F.

Следующая лемма хорошо известна, но ввиду отсутствия удобных ссылок и для полноты изложения, мы приводим ее доказательство.

Лемма 2. *Предположим, что* $q \notin F^{*2} \cup aF^{*2}$ *и элементы* $\alpha, \beta \in F$ *таковы, что* $\langle\langle q,\ \alpha^2 - a\beta^2 \rangle\rangle = 0$. *Тогда форма* $(\alpha + \beta\sqrt{a})\langle\langle q \rangle\rangle$ *определена над* F. *Более того, если элементы* $X, Y \in F$ *таковы, что* $X^2 - qY^2 = \alpha^2 - a\beta^2$, *то* $(\alpha + \beta\sqrt{a})\langle\langle q \rangle\rangle \simeq (2X + 2\alpha)\langle\langle q \rangle\rangle$.

Доказательство. Так как $(X + Y\sqrt{q})(X - Y\sqrt{q}) = (\alpha + \beta\sqrt{a})(\alpha - \beta\sqrt{a})$, мы имеем

$$N_{F(\sqrt{a},\sqrt{q})/F(\sqrt{a})}(\alpha + \beta\sqrt{a} + X + Y\sqrt{q}) =$$
$$= (\alpha + \beta\sqrt{a} + X + Y\sqrt{q})(\alpha + \beta\sqrt{a} + X - Y\sqrt{q}) = (\alpha + \beta\sqrt{a})(2X + 2\alpha).$$

Следовательно, так как очевидно, $\langle\langle q, N_{F(\sqrt{a},\sqrt{q})/F(\sqrt{a})}(\alpha + \beta\sqrt{a} + X + Y\sqrt{q}) \rangle\rangle = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} &\langle\langle q, \alpha + \beta\sqrt{a} \rangle\rangle \\ &\qquad \simeq \langle\langle q, (\alpha + \beta\sqrt{a}) N_{F(\sqrt{a},\sqrt{q})/F(\sqrt{a})}(\alpha + \beta\sqrt{a} + X + Y\sqrt{q}) \rangle\rangle \\ &\qquad\qquad \simeq \langle\langle q, 2X + 2\alpha \rangle\rangle, \end{aligned}$$

или, что равносильно $(\alpha + \beta\sqrt{a})\langle\langle q \rangle\rangle \simeq (2X + 2\alpha)\langle\langle q \rangle\rangle$. Лемма доказана.

Так как

$$((t^2 - a)y)^2 - \frac{t^2 - a}{(t^2 - a)y^2 - 1}((t^2 - a)y^2 - 1)^2 = t^2 - a,$$

и

$$((t^2 - a)x)^2 - \frac{t^2 - a}{(t^2 - a)y^2 - 1} f = (t^2 - a)(b^2 - ac^2) = N(b + c\sqrt{a})(t + \sqrt{a}),$$

мы получаем, что

$$\left\langle\left\langle \frac{t^2 - a}{(t^2 - a)y^2 - 1},\ t^2 - a \right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \frac{t^2 - a}{(t^2 - a)y^2 - 1} f,\ (t^2 - a)(b^2 - ac^2) \right\rangle\right\rangle = 0.$$

Следовательно, при построении формы φ можно положить $q = \frac{t^2 - a}{(t^2 - a)y^2 - 1}$. По лемме 2 получаем

$$(t + \sqrt{a})\langle\langle q \rangle\rangle \simeq (2(t^2 - a)y + 2t)\langle\langle q \rangle\rangle,$$

$$q(t+\sqrt{a})(b+c\sqrt{a})\langle\langle qf\rangle\rangle \simeq (2(t^2-a)x+2(bt+ac))\langle q,-f\rangle,$$

откуда

$$\varphi \simeq (2(t^2-a)y+2t)\langle 1,-q\rangle \perp (2(t^2-a)x+2(bt+ac))\langle q,-f\rangle.$$

Мы хотим доказать, что форма φ дает контрпример к 4-превосходности поля F. При этом нам не нужно знать точный вид довольно громоздких коэффициентов φ. Очевидно, что

$$(\varphi_{lF})_{\mathrm{an}} \simeq (\varphi_2)_{lF} \simeq (t+\sqrt{a})\langle 1,\ -f\rangle_{lF}.$$

В частности, $\dim(\varphi_{lF})_{\mathrm{an}} = 2$. Если форма $(\varphi_{lF})_{\mathrm{an}}$ определена над F, то существует $p \in F^*$ такой, что

$$(t+\sqrt{a})\langle 1,\ -f\rangle \simeq p\langle 1,\ -f\rangle,$$

то есть $\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})p\rangle\rangle_{lF} = 0$, что равносильно тому, что

$$\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})p\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a}, u+v\sqrt{a}\rangle\rangle$$

над $F(\sqrt{a})$ для некоторых $u,v \in F$. Мы покажем, что на самом деле это невозможно. Более точно, мы докажем следующее чуть более общее утверждение.

Лемма 3. *Для любых $u,v,p \in F$, $w \in k(\sqrt{a})$ имеем*

$$\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \not\simeq \langle\langle b+c\sqrt{a},\ u+v\sqrt{a}\rangle\rangle. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $e = b^2 - ac^2$. Если $e \notin ak^{*2}$, то есть l/k не является расширением Галуа, то вычеты либо в $t+\sqrt{a}$, либо в $t-\sqrt{a}$ левой и правой частей формулы (1) различны, что и доказывает лемму в этом случае.

Если $e \in ak^{*2}$, то требуется значительно более сложное рассуждение. Предположим, что

$$\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a},\ u+v\sqrt{a}\rangle\rangle \tag{1'}$$

для некоторых $u,v,p \in k(t,y)[x]$, и что при этом условии $m = \deg p$ минимально (в этом параграфе под deg мы понимаем степень относительно переменной x). В частности, многочлен p свободен от квадратов. Более того, можно предполагать, что $\deg(u+v\sqrt{a})$ минимальна при условии, что $\deg p = m$. Отсюда мы получаем, что $(t^2-a)x^2-e$ не делит p, так как в противном случае можно было бы заменить p на $-p\frac{(t^2-a)y^2-1}{(t^2-a)x^2-e}$, что противоречит минимальности $\deg p$. Также $(t^2-a)x^2-e$ не делит $u+v\sqrt{a}$, так как в противном случае изоморфизм

$$\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})w(b+c\sqrt{a})p\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a},\ \frac{u+v\sqrt{a}}{(t^2-a)x^2-e}((t^2-a)y^2-1)\rangle\rangle,$$

получаемый из (1′) прибавлением к обеим частям $\langle\langle b+c\sqrt{a}, f\rangle\rangle$, приводил бы к противоречию с минимальностью $\deg(u+v\sqrt{a})$.

Пусть $p=\prod p_i$, где $p_i\in k(t,y)[x]$ – неприводимые многочлены, $\deg p_i \geqslant 1$. Нам будет нужна следующая

Лемма 4. *Для каждого p_i элементы f и af не являются квадратами в $k(t,y)[x]/p_i$.*

Доказательство. Предположим, к примеру, что af есть квадрат в $k(t,y)[x]/p_1$. Рассмотрим два случая: a) $\deg p_1\geqslant 2$, b) $\deg p_1 = 1$.

Случай a).

Так как af является квадратом в $k(t,y)[x]/p_1$, мы получаем, что $P^2-af=p_1s$, для некоторых $P,s\in k(t,y)[x]$, причем $\deg P\leqslant \deg\ p_1-1$. Так как $\deg p_1\geqslant 2$ и $\deg f=2$, то $\deg(p_1s)\leqslant 2(\deg p_1-1)$, откуда $\deg s\leqslant \deg p_1-2$. Над полем $k(\sqrt{a},t,y,x)$ мы имеем

$$\langle\langle f, p_1s\rangle\rangle \simeq \langle\langle f,\ P^2-af\rangle\rangle \simeq \langle\langle af,\ P^2-af\rangle\rangle = 0,$$

так что

$$\langle\langle b+c\sqrt{a},\ u+v\sqrt{a}\rangle\rangle \simeq \langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \simeq \langle\langle af,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \simeq$$
$$\langle\langle af,\ (t+\sqrt{a})w\frac{p}{p_1}s\rangle\rangle \simeq \langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})w\frac{p}{p_1}s\rangle\rangle,$$

что дает противоречие с минимальностью $\deg p$, поскольку $\deg \frac{p}{p_1}s \leqslant \deg p-2$.

Случай b).

Пусть $p_1=Qx+P$. Мы можем предполагать, что $Q,P\in k(t)[y]$. Так как af является квадратом в $k(t,y)[x]/p_1$, мы заключаем, что

$$a\big((t^2-a)\frac{P^2}{Q^2}-e\big)\big((t^2-a)y^2-1\big)\in k(t,y)^{*2}.$$

Это влечет, что $(t^2-a)y^2-1$ является делителем $(t^2-a)P^2-eQ^2$, как многочлена от y. Отсюда следует, что существуют ненулевые многочлены $P_1,Q_1\in k(t)[y]$ и рациональная функция $g\in k(t)^*$

такие, что $\deg_y P_1$, $\deg_y Q_1 \leqslant 1$, и $(t^2-a)P_1^2 - eQ_1^2 = g((t^2-a)y^2-1)$ (здесь под $\deg_y$ мы понимаем степень относительно y). Легко видеть, что из этого следует, что $g\langle(t^2-a),-1\rangle \simeq \langle(t^2-a),-e\rangle$ над $k(t)$, противоречие, так как дискриминанты левой и правой частей последнего изоморфизма различны. Случай, когда f предполагается квадратом в $k(t,y)[x]/p_1$, рассматривается совершенно аналогично. Лемма 4 доказана.

Мы возвращаемся к доказательству леммы 3. По лемме 4 мы получаем, что каждый p_i является делителем многочлена $u+v\sqrt{a} \in k(\sqrt{a},t,y)[x]$, так как в противном случае вычеты в p_i (точнее, в некотором неприводимом делителе p_i над $k(\sqrt{a},t,y)[x]$) левой и правой частей изоморфизма $(1')$ были бы различны. Таким образом, мы получаем, что $u+v\sqrt{a} = p(u_1+v_1\sqrt{a})$, для некоторых $u_1, v_1 \in k(t,y)[x]$, откуда

$$\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a}\ , p(u_1+v_1\sqrt{a})\rangle\rangle \tag{2}$$

и, так как p свободен от квадратов, многочлены $u_1+v_1\sqrt{a}$ и p взаимно просты. Умножая на некоторый квадрат в $k(t)^*$, можно предполагать, что $v_{t^2-a}(p)$ равен либо 0, либо 1. Предположим, что $v_{t^2-a}(p)=1$. Тогда, применяя автоморфизм $W(F(\sqrt{a})) \to W(F(\sqrt{a}))$ над $W(k(\sqrt{a})(x,y))$, определяемый тем, что $t \to -t$, к обеим частям изоморфизма (2), записываемого в виде

$$\langle\langle f,\ (t-\sqrt{a})\frac{p}{t^2-a}w\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a},\ \frac{p}{t^2-a}(u_1+v_1\sqrt{a})(t^2-a)\rangle\rangle,$$

и заменяя $p(t,x,y)$ на $p(-t,x,y)(t^2-a)^{-1}$, мы сводим задачу к случаю $v_{t^2-a}(p)=0$.

Мы утверждаем, что $\deg(u_1+v_1\sqrt{a})=0$. Действительно, предположим, что $s \in k(\sqrt{a},t,y)[x]$ – неприводимый делитель многочлена $u_1+v_1\sqrt{a}$. Так как s не делит $((t^2-a)x^2-e)p$, мы получаем, что

$$\partial_s(\langle\langle b+c\sqrt{a},\ p(u_1+v_1\sqrt{a})\rangle\rangle) = \partial_s(\langle\langle f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle) = 1.$$

Путем того же рассуждения, что и в лемме 4, мы можем уменьшить $\deg(u_1+v_1\sqrt{a})$ в (2), что противоречит минимальности $\deg(u+v\sqrt{a})$ в $(1')$. Итак, мы заключаем, что у многочлена $u_1+v_1\sqrt{a}$ вообще нет неприводимых делителей, то есть $u_1, v_1 \in k(t,y)$. Из изоморфизма (2) следует, что

$$\langle\langle (b+c\sqrt{a})f,\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle \simeq \langle\langle b+c\sqrt{a},\ (t+\sqrt{a})(u_1+v_1\sqrt{a})w\rangle\rangle,$$

и, кроме того, правая часть последнего изоморфизма определена над $k(\sqrt{a},t,y)$. Обозначим ее через π. Так как π расщепляется квадратным корнем из

$$(b+c\sqrt{a})f=(b+c\sqrt{a})((t^2-a)y^2-1)((t^2-a)x^2-e),$$

мы заключаем, что $\pi_{k(\sqrt{a},t,y)(\tau)}=0$, где

$$\tau\simeq\langle\langle((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})(t^2-a),-((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})e\rangle\rangle.$$

Следовательно, либо $\pi=0$, либо

$$\begin{aligned}\pi\simeq\tau\simeq\langle\langle((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})(t^2-a),\\ -((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})e\rangle\rangle.\end{aligned}\tag{3}$$

С одной стороны, так как $v_{t^2-a}(p)=0$, мы имеем

$$\partial_{(t+\sqrt{a})}(\pi)=\partial_{(t+\sqrt{a})}(\langle\langle f(b+c\sqrt{a}),\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle)=b-c\sqrt{a},$$

так что $\pi\neq 0$, и, значит, выполняется (3). С другой стороны,

$$\partial_{(t-\sqrt{a})}(\pi)=\partial_{(t-\sqrt{a})}(\langle\langle f(b+c\sqrt{a}),\ (t+\sqrt{a})wp\rangle\rangle)=1,$$

но

$$\begin{aligned}\partial_{(t-\sqrt{a})}(\langle\langle((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})(t^2-a),\ -((t^2-a)y^2-1)(b+c\sqrt{a})e\rangle\rangle)=\\ =(b+c\sqrt{a})e=b-c\sqrt{a},\end{aligned}$$

противоречие, ввиду (3). Это доказывает лемму 3, а, значит и теорему 1.

Следствие 5. *Пусть k – поле и l/k – произвольное расширение полей четвертой степени. Тогда существует расширение F/k такое, что расширение lF/F не является 4-превосходным.*

Доказательство. Существует расширение k_1/k, являющееся либо кубическим, либо тривиальным, такое, что lk_1/k_1 – башня квадратичных расширений. Если верхний этаж этой башни не является композитом двух квадратичных расширений поля k_1, мы можем применить теорему 1. Противоположный случай рассмотрен в [5].

Если $k(\sqrt{b+c\sqrt{a}})/k$ не является расширением Галуа, то есть $e\notin k^{*2}\cup ak^{*2}$, то теорема 1 может быть усилена, и ее доказательство сильно упрощается. В этом случае имеет место следующее

Предложение 6. *Пусть k – поле, $a,b,c \in k$, $a \in k^* \setminus k^{*2}$, и пусть $e = b^2 - ac^2 \in k^* \setminus (k^{*2} \cup ak^{*2})$, $l = k(\sqrt{b + c\sqrt{a}})$. Пусть t – переменная, $F = k(t)$. Тогда существует четырехмерная форма φ над F такая, что имеет место следующее:*

для любого поля $\widetilde{l} \supset l$ такого, что $b - c\sqrt{a}$ не является квадратом в $\widetilde{l}$ и t трансцендентно над $\widetilde{l}$, форма $(\varphi_{\widetilde{l}F})_{\mathrm{an}}$ не определена над F. В частности, само поле l удовлетворяет этим условиям.

Доказательство. Пусть

$$\varphi \simeq \langle 2t,\ 2t(t^2 - a),\ -2(bt + ac),\ -2e(bt + ac)(t^2 - a)\rangle.$$

Легко видеть, что

$$\varphi_{F(\sqrt{a})} \simeq (t - \sqrt{a})\langle 1,\ -(b - c\sqrt{a})\rangle \perp (t + \sqrt{a})\langle 1,\ -(b + c\sqrt{a})\rangle,$$

откуда $\dim(\varphi_{\widetilde{l}F})_{\mathrm{an}} = 2$. Предположим, что форма $(\varphi_{\widetilde{l}F})_{\mathrm{an}}$ определена над F. Тогда существует $z \in F^*$ такой, что

$$(t - \sqrt{a})\langle 1,\ -(b - c\sqrt{a})\rangle \simeq z\langle 1,\ -(b - c\sqrt{a})\rangle,$$

то есть $\langle\langle b - c\sqrt{a},\ (t - \sqrt{a})z\rangle\rangle_{\widetilde{l}F} = 0$. С другой стороны, так как элемент $b - c\sqrt{a}$ не является квадратом в $\widetilde{l}$ и $z \in F^*$, то вычет этой 2-кратной формы Пфистера в $t - \sqrt{a}$ или $t + \sqrt{a}$ нетривиален – противоречие.

3. Непревосходность расширений степени $2n$ для нечетного n

В этом параграфе мы рассматриваем башни из двух расширений полей, одно из которых является расширением Галуа, а другое квадратичным.

Предложение 7. *Пусть k – поле, $l = k(\alpha, \beta)$ – конечное расширение Галуа нечетной степени $n > 1$. Предположим, что $\alpha \notin k$ и $\beta \notin k(\alpha)$. Пусть, далее, t, x, y – переменные, $a, b, d \in k^*$ такие, что $d, -ab, -abd \notin k^{*2}$. Положим $\varphi \simeq \langle a, b, x, abdx\rangle$, $K = k(t, x, y)$, $L = lK$, $E = L(\sqrt{-(xt^2 + a\alpha^2)(by^2 + abdx\beta^2)})$. Тогда*

1) $\dim(\varphi_E)_{\mathrm{an}} = 2$;
2) *форма $(\varphi_E)_{\mathrm{an}}$ не определена над K.*

Доказательство. Доказательство данного предложения напоминает доказательство теоремы 1.

1) Очевидно,

$$\varphi_L \simeq \langle xt^2 + a\alpha^2, ax(xt^2 + a\alpha^2), by^2 + abdx\beta^2, adx(by^2 + abdx\beta^2)\rangle,$$

следовательно, φ_E изотропна, и $(\varphi_E)_{\mathrm{an}} \simeq ax(xt^2 + a\alpha^2)\langle 1, -d\rangle$.

2) Предположим, что форма $(\varphi_E)_{\mathrm{an}}$ определена над K. Тогда существует $p \in K^*$ такой, что

$$ax(xt^2 + a\alpha^2)\langle 1, -d\rangle_E \simeq p\langle 1, -d\rangle_E,$$

то есть $\langle\langle d, ax(xt^2 + a\alpha^2)p\rangle\rangle_E = 0$. Это означает, что

$$\langle\langle d, ax(xt^2 + a\alpha^2)p\rangle\rangle_L \simeq \langle\langle -(xt^2 + a\alpha^2)(by^2 + abdx\beta^2), q\rangle\rangle_L \qquad (4)$$

для некоторого $q \in L^*$.

Можно предполагать, что $p \in k(t, x)[y]$, и $m = \deg p$ минимальна (в этом параграфе под deg мы понимаем степень относительно переменной y). Заметим также, что $by^2 + abdx\beta^2 \not| p$, так как в противном случае $by^2 + abdx(\sigma\beta)^2 | p$ для любого $\sigma \in G(l/k)$, и сравнение вычетов обеих частей (4) в $by^2 + abdx(\sigma\beta)^2$, при условии $\sigma\beta \neq \beta$, приводило бы к противоречию.

Пусть теперь $p = \prod p_i$, где $p_i \in k(t, x)[y]$ – неприводимые многочлены от переменной y.

Лемма 8. *Для каждого p_i элемент d не является квадратом в $k(t, x)[y]/p_i$.*

Доказательство. Предположим, например, что d есть квадрат в $k(t, x)[y]/p_1$. Мы получаем $P^2 - d = p_1 s$ для некоторых $P, s \in k(t, x)[y]$, $\deg P \leqslant \deg p_1 - 1$. Следовательно,

$$\deg s \leqslant 2(\deg p_1 - 1) - \deg p_1 = \deg p_1 - 2.$$

Так как $\langle\langle d, p_1 s\rangle\rangle \simeq \langle\langle d, P^2 - d\rangle\rangle = 0$, мы можем заменить в (4) делитель p_1 многочлена p на s, что противоречит минимальности $\deg p$. Лемма доказана.

Пусть $p_i = \prod p_{ij}$, где $p_{ij} \in l(t, x)[y]$ – неприводимые многочлены от y. Так как l/k – расширение Галуа нечетной степени, мы имеем $l(t, x)[y]/p_{ij} \simeq l(k(t, x)[y]/p_i)$, и, кроме того, $\deg[l(k(t, x)[y]/p_i) : k(t, x)[y]/p_i]$ нечетна. Следовательно, по лемме 8 элемент d не является квадратом в $l(k(t, x)[y]/p_i)$, а, значит, и в $l(t, x)[y]/p_{ij}$. Это означает, что форма (4) имеет ненулевые вычеты в каждом p_{ij}. Из этого следует, что $q = pf$, где $f \in l(t, x)[y]$, и многочлены

f и p взаимно просты. Таким образом, мы можем переписать (4) как

$$\langle\langle d, ax(xt^2+a\alpha^2)p\rangle\rangle_L \simeq \langle\langle -(xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2), pf\rangle\rangle_L. \qquad (5)$$

Точно так же, как и в лемме 2, мы можем предполагать, что в равенстве (5), где $\deg p = m$ фиксирована, $\deg f$ минимальна. Обозначим форму Пфистера в (5) через π. Заметим, что $by^2+abdx\beta^2$ не делит f, так как в противном случае можно было бы заменить f на $\frac{f}{(xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2)}$, что дает противоречие с минимальностью $\deg f$.

Лемма 9. $\deg f = 0$.

Доказательство. Пусть $f = \prod f_i$, где $f_i \in l(t,x)[y]$ – неприводимые многочлены от y. Так как f_i не появляется в левой части (5), то мы имеем $\partial_{f_i}(\pi) = 1$ для любого f_i. Предположим сначала, что, скажем, $\deg f_1 \geqslant 2$. Так как $\partial_{f_1}(\pi) = 1$, мы получаем, что

$$P^2 + (xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2) = f_1 s$$

для некоторых $P, s \in l(t,x)[y]$ таких, что $\deg P \leqslant \deg f_1 - 1$. Так как $\deg f_1 \geqslant 2$ мы имеем

$$\deg(P^2 + (xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2)) \leqslant 2(\deg f_1 - 1),$$

откуда $\deg s \leqslant \deg f_1 - 2$, и все доказано так же, как и в лемме 8. Теперь предположим, что $\deg f_1 = 1$, то есть $f_1 = R(y - \frac{P}{Q})$, где $P, Q \in l(x)[t]$, $R \in l(x,t)$. Так как $\partial_{f_1}(\pi) = 1$, мы получаем, что $-(xt^2+a\alpha^2)(bP^2+abdx\beta^2Q^2)$ является квадратом в $l(x)[t]$. В частности,

$$xt^2 + a\alpha^2 | bP^2 + abdx\beta^2Q^2.$$

Следовательно, существуют некоторые ненулевые многочлены $P_1, Q_1 \in l(x)[t]$ такие, что $\deg_t P_1, \deg_t Q_1 \leqslant 1$ и $xt^2+a\alpha^2 | b{P_1}^2 + abdx\beta^2Q_1^2$, то есть

$$b{P_1}^2 + abdx\beta^2Q_1^2 = g(xt^2+a\alpha^2)$$

для некоторого $g \in l(x)$. Легко видеть, что из этого следует, что $\langle b, abdx\rangle_{l(x)} \simeq \langle gx,\ ga\rangle$ – противоречие, так как дискриминанты левой и правой частей последнего изоморфизма различны. Лемма доказана.

Добавляя к обеим частям изоморфизма (5) форму Пфистера $\langle\langle d,\ pf\rangle\rangle$, мы можем переписать (5) как

$$\langle\langle d,\ ax(xt^2+a\alpha^2)f\rangle\rangle_L \simeq \langle\langle -d(xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2), pf\rangle\rangle_L. \qquad (6)$$

По лемме 9 левая часть последнего изоморфизма определена над $l(t,x)$. Более того, его правая часть расщепляется над $l(t,x)(\sqrt{-d(xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2)})$. Таким образом, так же, как и для формы π из параграфа 2, либо

a) $\langle\langle d,\ ax(xt^2+a\alpha^2)f\rangle\rangle_{l(t,x)} = 0$, либо

b) $\langle\langle d,\ ax(xt^2+a\alpha^2)f\rangle\rangle_{l(t,x)} \simeq$
$\langle\langle -bd(xt^2+a\alpha^2), -abx(xt^2+a\alpha^2)\rangle\rangle_{l(t,x)}$.

Предположим, что имеет место случай a). Можно предполагать, что $f \in l(x)[t]$, $p \in k(x,y)[t]$, и что f и p свободны от квадратов как многочлены от t. Очевидно, $xt^2+a\alpha^2|f$, так как в противном случае мы имели бы

$$d = \partial_{xt^2+a\alpha^2}(\langle\langle d,\ ax(xt^2+a\alpha^2)f\rangle\rangle) = \partial_{xt^2+a\alpha^2}(0) = 1,$$

противоречие. По аналогичной причине, если $\sigma\alpha \neq \alpha$ (такое σ существует, так как $\beta \notin k(\alpha)$), то $xt^2+a(\sigma\alpha)^2 \not| f$. Таким образом, из изоморфизма (6) следует, что $xt^2+a(\sigma\alpha)^2 \not| p$, если $\sigma\alpha \neq \alpha$, или, что равносильно, $xt^2+a\alpha^2 \not| p$.

$$\begin{aligned} &1 = \partial_{xt^2+a\alpha^2}(\langle\langle -d(xt^2+a\alpha^2)(by^2+abdx\beta^2),\ pf\rangle\rangle) = \\ &\overline{df_1(by^2+abdx\beta^2)p \mod (xt^2+a\alpha^2)} \in l(t)(u)^*/l(t)(u)^{*2}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Так как $\beta \notin k(\alpha)$, и степень $[k(\alpha,\beta):k]$ нечетна, мы получаем, что $\beta^2 \notin k(\alpha)$, и, следовательно, существует $\sigma \in G(l/k)$ такое, что $\sigma\alpha = \alpha$ и $\sigma(\beta^2) \neq \beta^2$. Применяя такое σ то (7), мы видим, что

$$\overline{d\sigma f_1(by^2+abdx(\sigma\beta)^2)p \mod (xt^2+a\alpha^2)} = 1. \qquad (8)$$

Объединяя (7) и (8) получаем, что

$$\overline{f_1\sigma f_1(by^2+abdx\beta^2)(by^2+abdx(\sigma\beta)^2) \mod (xt^2+a\alpha^2)} = 1.$$

Так как $\overline{f_1\sigma f_1 \mod (xt^2+a\alpha^2)} \in l(t,x,\sqrt{-ax})$ не зависит от y, и $\sigma(\beta^2) \neq \beta^2$, мы приходим к противоречию. Итак, случай a) невозможен.

Предположим теперь, что имеет место случай b), то есть

$$\langle\langle d,\ ax(xt^2+a\alpha^2)f\rangle\rangle_{l(t,x)} \simeq \langle\langle -bd(xt^2+a\alpha^2),\ -abx(xt^2+a\alpha^2)\rangle\rangle_{l(t,x)}.$$

Сравнивая вычеты в многочлене x в левой и правой частях последнего изоморфизма, получаем, что либо $-ab \in k^{*2}$, либо $-dab \in k^{*2}$, что не так по предположению. Следовательно, и случай b) невозможен, что и завершает доказательство предложения 7.

Следствие 10. *Пусть $n \geqslant 2$ – целое число, не являющееся нечетным простым. Тогда существует конечное 4-непревосходное расширение полей степени $2n$.*

Доказательство. Если n четно, то $2n = 2^k m$, где $k \geqslant 2$ и m нечетно. Пусть L/F – 4-непревосходное мультиквадратичное расширение степени 2^k (существование таких расширений доказано в [5]). Пусть, далее, φ – четырехмерная форма в соответствующем контрпримере. Рассмотрим расширение $L(t^{\frac{1}{m}})/F(t)$ степени $2n$. Применяя специализацию $t = 0$ (первое отображение вычета), легко видеть, что расширение $L(t)/F(t)$ является 4-непревосходным, причем форма $\varphi_{F(t)}$ доставляет соответствующий контрпример. Так как расширение $L(t^{\frac{1}{m}})/L(t)$ имеет нечетную степень, мы заключаем, что $\varphi_{F(t)}$ является также контрпримером для расширения $L(t^{\frac{1}{m}})/F(t)$.

Теперь предположим, что n нечетно, простое число $p \neq n$ делит n, и l/k – расширение Галуа степени n. Пусть $k \subset k_1 \subset l$ – промежуточное расширение, такое, что группа Галуа $G(l/k_1)$ – циклическая порядка p, $l = k(\beta)$ и $\alpha \in k_1 \setminus k$. Тогда расширение l/k и элементы α и β удовлетворяют условию предложения 7, что влечет за собой существование 4-непревосходного расширения степени $2n$.

4. Непревосходность расширений, определяемых гиперэллиптическими кривыми

В последнем параграфе настоящей работы мы даем примеры 4-непревосходных расширений L/F, где L – поле функций гиперэллиптической кривой над F. В этом случае расширение L/F является башней чисто трансцендентного расширения степени 1 и квадратичного расширения. Этот вопрос представляет интерес, так как поле функций коники всегда определяет превосходное расширение ([1, 3]). Более точно, имеет место следующее

Предложение 11. *Пусть k – поле, $a, b \in k^*$, форма Пфистера $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ анизотропна и $n > m \geqslant 1$ – целые числа. Пусть, далее, $F = k((t))$, где t – переменная, и X – гиперэллиптическая кривая над F, определяемая уравнением $y^2 = ax^{2n} + bx^{2m} - t$. Тогда форма $(\langle 1, -a, -b, t\rangle_{F(X)})_{\mathrm{an}}$ не определена над F.*

Доказательство. Так как гиперболическая плоскость $\langle 1, -(ax^{2n} + bx^{2m} - t)\rangle_{F(X)}$ является подформой формы $\langle 1, -a, -b, t\rangle_{F(X)}$, мы получаем, что форма $\langle 1, -a, -b, t\rangle_{F(X)}$ изотропна, откуда

$$\dim(\langle 1, -a, -b, t\rangle_{F(X)})_{\mathrm{an}} = 2.$$

Предположим, что существуют такие $d, e \in F^*$, что

$$(\langle 1, -a, -b, t\rangle_{F(X)})_{\mathrm{an}} \simeq \langle d, e\rangle_{F(X)},$$

или, что равносильно, форма $\varphi \simeq \langle 1, -a, -b, t, -d, -e\rangle$ становится гиперболичной над $F(X)$. Тогда мы имеем

$$(\varphi_{\mathrm{an}})_{F(x)} \simeq \langle\langle ax^{2n} + bx^{2m} - t\rangle\rangle \otimes \tau \tag{9}$$

для некоторой формы τ. Предположим, что $\dim \tau$ нечетна. Тогда $\mathrm{disc}(\varphi_{\mathrm{an}}) = ax^{2n} + bx^{2m} - t$. С другой стороны,

$$\mathrm{disc}(\varphi_{\mathrm{an}}) = -abdet \neq ax^{2n} + bx^{2m} - t \pmod{F(x)^{*2}},$$

противоречие. Следовательно, $\dim \tau$ четна, и, значит, $\dim \varphi_{\mathrm{an}} = 4$. Применяя первое отображение вычета (фактически, специализацию $x = 0$) к (9), мы заключаем, что φ_{an} подобна форме $\langle\langle -t, -c\rangle\rangle$ при некотором $c \in F^*$. Так как $\langle\langle -t, t\rangle\rangle = 0$, можно предполагать, что $c \in k^*$ и $-c \notin k^{*2}$. Далее, так как $\varphi_{F(X)} = 0$, имеем

$$ax^{2n} + bx^{2m} - t \in D(\langle -c, -t, -ct\rangle_{F(x)}).$$

Пусть r – минимальное неотрицательное целое число такое, что

$$t^{2r}(ax^{2n} + bx^{2m} - t) = -(cp_1^2 + tp_2^2 + ctp_3^2)$$

для некоторых $p_1, p_2, p_3 \in k[[t]][x]$ (такое r существует по теореме Касселса–Пфистера (см., например, [4])). Предположим, что $r \geqslant 1$. Тогда $p_1 = tq_1$, $q_1 \in k[[t]][x]$, и, следовательно,

$$t^{2r-1}(ax^{2n} + bx^{2m} - t) = -(p_2^2 + cp_3^2 + ctq_1^2).$$

Отсюда $\overline{p_2}^2 + c\overline{p_3}^2 = 0$, где $\overline{p_2}, \overline{p_3} \in k[x]$ – редукции многочленов p_2, p_3 по модулю идеала $(t) \subset k[[t]][x]$. Так как $-c \notin k^{*2}$, мы имеем $\overline{p_2} = \overline{p_3} = 0$, и, значит,

$$p_2 = tq_2,\ p_3 = tq_3,\ q_2,\ q_3 \in k[[t]][x].$$

Следовательно,

$$t^{2r-2}(ax^{2n} + bx^{2m} - t) = -(cq_1^2 + tq_2^2 + ctq_3^2),$$

противоречие с минимальностью r. Итак, мы заключаем, что $r = 0$, откуда

$$ax^{2n} + bx^{2m} - t = -(cp_1^2 + tp_2^2 + ctp_3^2),$$

что влечет $ax^{2n} + bx^{2m} = -c\overline{p_1^2}$. С другой стороны, очевидно, $\frac{-(ax^{2n}+bx^{2m})}{c} \notin k[x]^2$, противоречие, доказывающее предложение 9.

Литература

1. J. Kr. Arason, *Excellence of $F(\varphi)/F$ for 2-fold Pfister forms.* — Appendix II in [2] (1977).
2. R. Elman, T. Y. Lam, A. R. Wadsworth, *Amenable fields and Pfister extensions.* — Queen's Papers Pure Appl. Math. **46** (1977), 445–491.
3. M. Rost, *Quadratic forms isotropic over the function field of a conic.* — Math. Ann. **288** (1990), 511–513.
4. W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms.* Springer, Berlin et al., 1985.
5. A. S. Sivatski, *Nonexcellence of multiquadratic field extensions.* — J. Algebra **275** no. 2 (2004), 859–866.

Sivatski A. S. Nonexcellence of certain field extensions.

Consider towers of fields $F_1 \subset F_2 \subset F_3$, where F_3/F_2 is a quadratic extension and F_2/F_1 is an extension, which is either quadratic, or of odd degree, or purely transcendental of degree 1. We construct numerous examples of the above types such that the extension F_3/F_1 is not 4-excellent. Also we show that if k is a field, $\operatorname{char} k \neq 2$ and l/k is an arbitrary field extension of forth degree, then there exists a field extension F/k such that the forth degree extension lF/F is not 4-excellent.

С.-Петербургский
электротехнический университет
E-mail: sivatsky@AS3476.spb.edu

Поступило 9 ноября 2006 г.