Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

И. К. Редчук

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В настоящей статье дается обзор приложений разделяющих функций в теории представлений колчанов и алгебр в линейных и метрических пространствах, а также демострируется применение этих функций к вопросам спектральной теории графов.

1. Разделяющие функции и теория представлений

Разделяющие функции впервые появились при решении некоторых классов матричных задач. В работе [1] показано, что эти функции "разделяют" схемы и расширенные схемы Дынкина, однако, как отмечали авторы этой работы, разделяющие функции возникают и в тех случаях, в которых схемы Дынкина естественно ввести нельзя.

Так, в работах, посвященных представлениям диадических [2] и триадических [3] множеств введение числовой функции

$$\mu(n_1, n_2, n_3) = n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 + n_1n_2n_3$$

позволяет существенно упростить формулировку критериев конечной представимости и ручности названных множеств.

В [4] вводится понятие нормы бинарного отношения. Пусть R – произвольное бинарное отношение на конечном множестве $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $R(i, j) = 1$ при iRj и $R(i, j) = 0$ в противном случае. Сопоставим R квадратичную форму

$$f_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} R(i, j)x_ix_j;$$

нормой отношения R называется число

$$\|R\| = \min_{\sum_{i=1}^{n} x_i=1} f_R(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В работе [1] для произвольного частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ вводится числовая функция $P(S)$: $P(S) = \| \leq \|^{-1}$. В терминах функции P критерии конечной представимости (см. [5]) и ручности (см. [6]) формулируются в виде $P(S) < 4$ и $P(S) = 4$ соответственно [1].

Функция P характеризует *P-точные частично упорядоченные множества*, т. е. такие, что $P(S', \leq) < P(S, \leq)$ при $S' \subset S$ [1, п. 2], которые в некоторой степени объясняют строение критических частично упорядоченных множеств, содержащихся в критериях конечной представимости и ручности. В работе [7] вводится понятие *антимонотонного* частично упорядоченного множества, которое обобщает понятие P-точности. Там получены явные и простые формулы для вычисления $P(S)$, из которых элементарно выводятся списки критических частично упорядоченных множеств для критериев конечной представимости и ручности, оригинальные доказательства которых достаточно громоздки.

Если S_k – примитивное частично упорядоченное множество, т. е. S_k есть объединение k непересекающихся цепей порядков $n_1, \ldots, n_k$, элементы которых попарно несравнимы, то

$$P(S_k) = \rho(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{n_i - 1}{n_i + 1}\right).$$

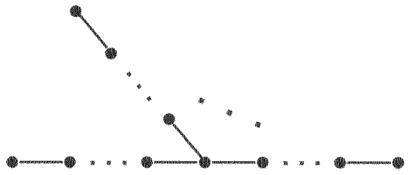
При $k = 3$ имеем $\rho(n_1, n_2, n_3) \leq 4$ тогда и только тогда, когда $\mu(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \leq 4$.

Отождествляя множество S_k с вектором $(n_1, \ldots, n_k)$, можно рассматривать числовую функцию ρ (от произвольного числа переменных k), определенную на $\mathbb{N}$ по вышеуказанной формуле, и естественным образом доопределить ее, если значения некоторых ее переменных равны ∞. При $k = 3$ и конечных переменных эта функция (с точностью до постоянных множителя и слагаемого) совпадает с функцией $n_1^{-1} + n_2^{-1} + n_3^{-1}$:

$$\rho(n_1, n_2, n_3) = 6 - 2\sum_{i=1}^{3} (n_i + 1)^{-1}.$$

Последняя функция играет важную роль в теории групп Коксетера, систем корней и др. [8]. Эту функцию использовал еще Мебиус [9] для описания порожденных отражениями конечных групп перемещений в сферической геометрии.

Заметим, что решения неравенства $\rho(n_1, \ldots, n_k) < 4$ и уравнения $\rho(n_1, \ldots, n_k) = 4$ соответствуют графам и расширенным графам Дынкина, имеющим звездный тип, т. е. есть объединение конечного числа ветвей, “склеенных” в одной вершине:



А именно: если $w = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ — решение неравенства $\rho(n_1, n_2, \dots, n_k) < 4$ (соотв. уравнения $\rho(n_1, n_2, \dots, n_k) = 4$), то компоненты n_i целочисленного вектора w соответствуют числу вершин на ветвях некоторого звездного графа Дынкина (соотв. расширенного графа Дынкина).

В [1, п. 6–8] функции ρ и μ применяются при изучении представлений маркированных колчанов, введенных в [10], являющихся обобщением колчанов Габриеля [11] и содержащих в себе большинство известных матричных задач.

В работе [12] изучаются алгебры

$$A_{P_1, P_2, \dots, P_N} = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \dots, x_s \mid P_i(x_i) = 0,\ i = \overline{1, s}, \sum_{i=1}^{s} x_i = 0 \rangle,$$

где $P_1, P_2, \dots, P_s$ — полиномы, $\deg P_i = n_i \geq 2$, $i = \overline{1, s}$. Пусть $S_{n_1, n_2, \dots, n_s}$ — звездный граф, имеющий s ветвей с $n_1, n_2, \dots, n_s$ вершинами на каждой ветви. В [12] доказано следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Алгебра $A_{P_1, P_2, \dots, P_s}$ конечномерна, если и только если соответствующий граф $S_{n_1, n_2, \dots, n_s}$ есть граф Дынкина; рост алгебры полиномиален, если и только если граф $S_{n_1, n_2, \dots, n_s}$ есть расширенный граф Дынкина $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$ или $\widetilde{E}_8$; в остальных случаях алгебра содержит как подалгебру свободную алгебру с двумя образующими (т. е. имеет экспоненциальный рост).*

Как следует из сказанного выше, этот результат можно переформулировать так: алгебра $A_{P_1, P_2, \dots, P_s}$ конечномерна при

$$\rho(n_1, n_2, \dots, n_s) < 4,$$

имеет полиномиальный рост при $\rho(n_1, n_2, \dots, n_s) = 4$, имеет экспоненциальный рост при $\rho(n_1, n_2, \dots, n_s) > 4$.

Более того, как заметил А.В. Ройтер, если алгебра $A_{P_1,P_2,\ldots,P_s}$ конечномерна, то

$$\dim A_{P_1,P_2,\ldots,P_s} = \frac{4}{4-\rho(n_1,n_2,\ldots,n_s)}.$$

Как оказалось, разделяющие функции находят свое применение и при исследовании $*$-представлений алгебр и колчанов в пространствах с метрикой. В [13] изучались представления в гильбертовом пространстве $*$-алгебр, порожденных линейно связанными ортопроекторами. Пусть

$$\mathcal{P}_{t,\alpha} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \ldots, p_t \mid p_k^2 = p_k = p_k^*, \sum_{k=1}^{t} p_k = \alpha e\rangle.$$

В упомянутой работе было описано множество Σ_t тех значений α, при которых категория представлений алгебры $\mathcal{P}_{t,\alpha}$ не пуста. Как заметил несколько позднее А.В. Ройтер, дискретная часть этого множества может быть описана числовыми функциями ρ_t:

$$\begin{aligned} \rho_t(0) &= 0, \\ \rho_t(k+1) &= \frac{t}{t-\rho_t(k)}, \end{aligned} \tag{1}$$

$t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 4$. При этом оказывается, что для случая $t = 4$ имеет место тождество $\rho_4 \equiv \rho$.

В работе [15] функции ρ_t, $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ были доопределены на целочисленных векторах аналогично ρ и получены некоторые их свойства. Там же изучались локально-скалярные представления графов в гильбертовых пространствах [16], квадрат индекса которых целый (в частности, расширенных графов Дынкина). Из этих представлений были выделены некоторые стандартные представления. При помощи функторов Кокстера, определенных (для локально-скалярных представлений) в [16], были получены явные формулы для характеров стандартных представлений в терминах функций ρ_t. Также было доказано, что в каждой размерности, которая есть сингулярный действительный корень графа (см., например, [17]) существует единственное стандартное представление. В [14] этот результат обобщен на произвольный простой двудольный граф (т. е. граф без кратных ребер и петель, множество вершин которого имеет вид $G_v = \overset{\circ}{G}_v \sqcup \overset{\bullet}{G}_v$, и если $g \in \overset{\circ}{G}_v$ и вершина h связана с g, то $h \in \overset{\bullet}{G}_v$).

Подобные формулы для характеров стандартных представлений в случае звездных графов были получены (в несколько других терминах) в [18]. Используя эти формулы, в [18] доказано, что $*$-алгебра, ассоциированная со звездным графом, содержащим расширенный граф Дынкина как собственный подграф, имеет бесконечномерное неприводимое $*$-представление.

2. Разделяющие функции и спектры звездных графов

Пусть G – некоторый простой граф, G_v – множество вершин графа G, G_e – множество ребер ($G_e \subset G_v \times G_v$). Обозначим $M(g) = \{h \in G_v \,|\, (h, g) \in G_e\}$. Назовем вершину g графа G *точкой ветвления*, если $|M(g)| \geqslant 3$. Граф G называется *звездным графом*, если G – дерево и G имеет не более одной точки ветвления. Для звездного графа G множество G_v может быть представлено в виде

$$G_v = B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_s,$$

где $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i, j = \overline{0, s}$, $B_0 = \{g_0\}$, g_0 – точка ветвления в G (если она существует) и $g, h \in B_i$ для некоторого i, если и только если путь минимальной длины с началом в g и концом в h не содержит g_0. Множества B_i называются *ветвями* графа G; если $|B_i| = n_i$, то соответствующий звездный граф будем обозначать $S_{s;n_1,n_2,\ldots,n_s}$ или просто $S_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$.

Спектром $\sigma(G)$ графа G называется спектр его матрицы инцидентности. Поскольку последняя симметрична (мы предполагаем графы неориентированными), то спектр любого графа действителен. Обозначим $\sigma^+(G) = \{\lambda \in \sigma(G) \,|\, \lambda > 0\}$, $\sigma_0(G) = \sigma(G) \setminus \{0\}$. Число $r = \max\{\sigma(G)\}$ называется индексом графа G. Известно (см., например, [19]), что индекс произвольного связного графа G – простое собственное значение, и соответствующее собственное подпространство порождается вектором с положительными координатами. Такой вектор называется *главным собственным вектором графа G*.

Связь разделяющих функций ρ_t с индексами звездных графов была установлена в [14]. Ниже мы докажем более общее утверждение. Зададим функции ρ_t теми же формулами (1) для произвольного $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$\rho_t(0) = 0, \quad \rho_t(n+1) = t/(t - \rho_t(n))$$

(в [14] предполагалось $t \geqslant 1$). При этом, если $t = \rho_t(n)$ для некоторых t, n, то $\rho_t(n+1)$ не определено; в этом случае будем писать $\rho_t(n+1) = \infty$ и полагать $\rho_t(n+2) = 0$.

Зададим также при $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$ последовательность $\{v_n(t)\}$:

$$v_0(t) = 0, \quad v_1(t) = 1, \quad v_{n+2}(t) = \sqrt{t} v_{n+1}(t) - v_n(t). \tag{2}$$

Легко проверяется (см. [14]), что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\rho_t(n) = \sqrt{t} \frac{v_n(t)}{v_{n+1}(t)}. \tag{3}$$

Теорема 2.1. *Пусть $S_{n_1,n_2,\dots,n_s}$ – звездный граф: $G_v = B_0 \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_s$, $B_k = \{g_1^k, \dots, g_{n_k}^k\}$, $k = \overline{1,s}$, $B_0 = \{g_0\}$, причем вершины в ветвях B_k занумерованы так, что $g_i^k \in M(g_{i+1}^k)$, $i = \overline{1, n_k - 1}$, $g_{n_k}^k \in M(g_0)$.*

1. *Для любого $t = \lambda^2$ такого, что $\lambda \in \sigma^+(G)$ либо $t = \rho_t(n_1, n_2, \dots, n_s)$, либо существуют такие k, l, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq s$, что $t = \rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1)$.*
2. *Если либо $\rho_t(n_1, n_2, \dots, n_s) = t$, либо существуют такие k, l, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq s$, что $\rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1) = t$, то $\sqrt{t} \in \sigma^+(G)$.*
3. *Индекс графа G равен $\sqrt{t_{\max}}$, где $t_{\max}$ — максимальный корень уравнения $\rho_t(n_1, n_2, \dots, n_s) = t$ относительно t.*
4. *Компоненты $y_m^k = y(g_m^k)$, $y_0 = y(g_0)$ главного собственного вектора y графа G вычисляются (с точностью до общего ненулевого сомножителя) по формулам*

$$y_0 = \sqrt{t}, \quad y_m^k = t^{(m-n_k)/2} \cdot \prod_{i=m}^{n_k} \rho_t(i), \quad m = \overline{1, n_k},\ 1 \leq k \leq s.$$

Доказательство.

1. Пусть $\lambda = \sqrt{t} \in \sigma^+(G)$, x — соответствующий собственный

вектор, $x_m^k = x(g_m^k)$, $x_0 = x(g_0)$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{gathered}
\lambda x_1^k = x_2^k,\\
\lambda x_2^k = x_1^k + x_3^k,\\
\lambda x_3^k = x_2^k + x_4^k,\\
\dots\dots\dots\dots\\
\lambda x_{n_k}^k = x_{n_{k-1}}^k + x_0,\ k = \overline{1,s}\\
\lambda x_0 = x_{n_1}^1 + \dots + x_{n_s}^s
\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда для всех $k = \overline{1,s}$

$$\begin{gathered}
x_2^k = \lambda x_1,\\
x_{i+2}^k = \lambda x_{i+1}^k - x_i^k,\ i = \overline{1, n_k - 2},\\
x_0 = \lambda x_{n_k}^k - x_{n_k - 1}^k,
\end{gathered}$$

отсюда получим, что

$$\begin{gathered}
x_i^k = v_i(t)x_1,\ i = \overline{2, n_k}\\
x_0 = v_{n_k+1}(t)x_1,
\end{gathered} \tag{5}$$

здесь $v_n(t)$ – последовательность, определенная в (2).

Если $v_{n_k+1}(t) \neq 0$ для всех k, то из (5) следует $x_{n_k}^k = \frac{v_{n_k}(t)}{v_{n_k+1}(t)} x_0$. Тогда, домножая последнее равенство системы (4) на $\lambda \neq 0$ получим, что

$$\lambda^2 x_0 = \sum_{k=1}^{s} \frac{\lambda v_{n_k}}{v_{n_k+1}} x_0. \tag{6}$$

Из (5) получим, что $x_i^k = \frac{v_i(t)}{v_{n_k+1}(t)} x_0$, $i = \overline{1, n_k}$, $k = \overline{1,s}$. Тогда $x_0 \neq 0$, иначе все компоненты собственного вектора были бы нулевыми. Сокращая обе части равенства (6) на x_0 и учитывая формулу (3), получим

$$t = \sum_{k=1}^{s} \rho_t(n_k) = \rho(n_1, n_2, \dots, n_s).$$

Если же $v_{n_k+1}(t) = 0$ для некоторого k, то из (3) следует, что $\rho_t(n_k) = \infty$, а значит, $t = \rho_t(n_k - 1)$. Тогда из (5) получаем, что

$x_0 = 0$. Предположим, что $\rho_t(n_j - 1) \neq t$ для всех остальных $j \neq k$, $1 \leq j \leq s$. Тогда $x_i^j = \frac{v_i(t)}{v_{n_j+1}(t)} x_0 = 0$ для всех $j \neq k$, $i = \overline{1, n_j}$ и, учитывая последнее равенство из (4), имеем $x_{n_k}^k = 0$, а значит $x_1^k = \frac{x_{n_k}^k}{v_{n_k}(t)} = 0$ и, следовательно, $x_i^k = 0$ для всех $i = \overline{1, n_k}$. Так как все компоненты собственного вектора не могут быть нулевыми, приходим к противоречию; следовательно, найдется еще одно $l \neq k$ такое, что $\rho_t(n_l - 1) = t$.

2. Пусть t – такое, что при некотором k имеем $\rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1) = t$, $k \neq l$, то есть $\rho_t(n_k) = \rho_t(n_l) = \infty$. Положим $x_0 = x_i^j = 0$ для всех $j = \overline{1, s}$ таких, что $j \neq k$ и $j \neq l$, $x_i = v_{n_k - i+1}(t)$, $x_h = -v_{n_l - h+1}(t)$, $i = \overline{1, n_k}$, $h = \overline{1, n_l}$. Легко проверить, что при $\lambda = \sqrt{t}$ заданный таким образом вектор x удовлетворяет системе (4), то есть $\lambda \in \sigma^+(G)$.

Пусть теперь $\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = t$. Тогда $v_{n_k+1}(t) \neq 0$ для всех $k = \overline{1, s}$. В этом случае зададим собственный вектор x так: $x_0 = 1$, $x_i^k = \frac{v_i(t)}{v_{n_k+1}(t)}$. Как легко убедиться, равенства (4) здесь также будут верны, то есть снова $\lambda = \sqrt{t} \in \sigma^+(G)$.

3. Пусть r – индекс графа G, $t = r^2$. Тогда по доказанному в п. 1 либо $\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = t$, либо существуют $k, l, k \neq l$ такие, что $\rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1) = t$. Второй случай невозможен, поскольку тогда компонента главного собственного вектора в вершине g_0 была бы нулевой (формулы (5)).

4. Пусть $r = \sqrt{t}$ – индекс, а y – главный собственный вектор графа G. Поскольку все его компоненты ненулевые, для любого $k = \overline{1, s}$ имеем $v_{n_k+1} \neq 0$, а значит, учитывая (6) и полагая $y_0 = r$, получим

$$y_m^k = r \frac{v_m(t)}{v_{n_k+1}(t)} = \frac{1}{r^{n_k - m}} \prod_{i=m}^{n_k} r \frac{v_i(t)}{v_{i+1}(t)} = \frac{1}{t^{(n_k - m)/2}} \prod_{i=m}^{n_k} \rho_t(i).$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Граф G называется целым, если он имеет целочисленный спектр. Проблема описания целых графов была поставлена в [20]. В настоящее время получены все целые графы для некоторых специальных типов графов, например кубических [21] или с ограничениями на степени вершин графа [22]. В [23] было дано полное описание целых деревьев, диаметр которых (т. е. наибольший из минимальных путей между двумя любыми вершинами) не превышает 3. Для деревьев больших диаметров были получены некоторые (иногда бесконечные) классы, см., например, [24, 25]. Ниже мы опишем все звездные целые графы, см. [26].

Предложение 2.2 [15]. *Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ список всех целочисленных векторов $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, удовлетворяющих уравнению $\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = t$, имеет вид*

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{t}), \quad (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{t-1}), \quad (\underbrace{1, 3, 3, \ldots, 3}_{t-1}), \quad (\underbrace{1, 2, 5, 5, \ldots, 5}_{t-1}). \quad (7)$$

Известно (см. [19]), что из графов с индексом, меньшим 2 (т. е. графов Дынкина) целочисленными будут только графы A_1 (граф из одной вершины) и A_2 (две вершины, соединенные ребром). Из теоремы 2.1 и предложения 2.2 следует, что звездный граф имеет целый индекс $r \geq 2$, если и только если соответствующий целочисленный вектор $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ содержится в списке (7), причем $t = r^2$.

Предложение 2.3 [19]. *Если граф G двудольный и $\lambda \in \sigma(G)$, то $-\lambda \in \sigma(G)$.*

Используя теорему 2.1 и предложение 2.3, проверим, каковы будут остальные элементы спектров графов из списка (7) при $t \geq 4$.

1. Граф $S_{t;\,1,1,\ldots,1}$. Уравнение $\rho_\tau(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \tau$ имеет вид $t \cdot 1 = \tau$, поэтому новых значений, кроме $\sqrt{t}$, не получаем. Уравнение $\rho_\tau(0) = \tau$ не имеет решений для $\tau > 0$. Таким образом, по теореме 2.1

$$\sigma_0(S_{t;\,1,1,\ldots,1}) = \{\sqrt{t}, -\sqrt{t}\}.$$

2. Граф $S_{t-1;\,2,2,\ldots,2}$. Уравнение $\rho_\tau(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \tau$ имеет вид $(t-1)\cdot\tau/(\tau-1) = \tau$, и снова новых значений, кроме $\sqrt{t}$, не получаем. Уравнение $\rho_\tau(1) = \tau$ имеет решение $\tau = 1$; ветвей с $n_k = 2$, больше одной. Следовательно,

$$\sigma_0(S_{t-1;\,2,2,\ldots,2}) = \{\sqrt{t}, -\sqrt{t}, 1, -1\}.$$

3. Граф $S_{t-1;\,1,3,3,\ldots,3}$. Уравнение $\rho_\tau(2) = \tau$ имеет решение $\tau = 2$ и ветвей с $n_k = 3$ больше одной. Поэтому

$$\sqrt{2} \in \sigma_0(S_{t-1;\,1,3,3,\ldots,3}).$$

4. Граф $S_{t-1;\,1,2,5,5,\dots,5}$. Уравнение $\rho_\tau(4)=\tau$ имеет решение $\tau=3$ и ветвей с $n_k=5$ больше одной при $t>4$. Если же $t=4$, то уравнение $\rho_\tau(1,2,5)=\tau$ имеет вид $1+\frac{\tau}{\tau-1}+\frac{\tau^2-3\tau+1}{(\tau-1)(\tau-3)}=\tau$, корнем которого является $\tau=(\sqrt{5}+3)/2=\big((\sqrt{5}+1)/2\big)^2$. Поэтому

$$\sqrt{3}\in\sigma_0(S_{t-1;\,1,2,5,5,\dots,5}) \text{ при } t>4,$$
$$(\sqrt{5}+1)/2\in\sigma_0(S_{3;\,1,2,5}).$$

Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 2.4 [26]. *Все целые звездные графы исчерпываются графами* A_1, $S_{t;\,1,1,\dots,1}$ *и* $S_{t-1;\,2,2,\dots,2}$, *где* $t=r^2$ *для некоторого* $r\in\mathbb{N}$.

Литература

1. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов.* — Укр. мат. журн. **54**, No. 6 (2002), 18–54.
2. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечнопредставимые диадические множества.* — Укр. мат. журн. – **52**, No. 6 (2000), 1363–1396.
3. К. И. Белоусов, Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Конечно-представимые триадические множества.* — Алгебра и анализ **9**, No. 4 (1997), 3–27.
4. A. V. Roiter, *The norm of a relation.* – Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras, Proc. Ottawa (1984). Lect. Notes Math. **1177** (1984), 269–272.
5. М. М. Клейнер, *Частично упорядоченные множества конечного типа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, Исследования по теории представлений **28** (1972), 32–41.
6. Л. А. Назарова, *Частично упорядоченные множества бесконечного типа.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **39** (1975), 963–991.
7. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, М. Н. Смирнова, *Антимонотонные квадратичные формы и частично упорядоченные множества.* — Алгебра и анализ No. 6 (2005).
8. Н. Бурбаки, *Группы Ли и алгебры Ли, главы* IV–VI. Мир, М. (1972). 331 с.
9. A. Möbius A., *Theorie der symmetrischen Figuren.* — Gessammelte Werke, t. II, Leipzig (Hirzel) (1886), 561–708.
10. A. V. Roiter, *Representations of marked quivers.* — Publ. House Beijing Normal Univ. **2** (2001), 417–423.
11. P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen* I. — Manuscripta Math. **6** 1972, 71–103.
12. М. А. Власенко, А. С. Меллит, Ю. С. Самойленко, *Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром.* — Функц. анализ и прилож. **39**, вып. 3 (2005).
13. С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, *О суммах проекторов.* — Функц. анализ и прилож. **36** вып. 3 (2002), 20–35.

14. И. К. Редчук, *Разделяющие функции, спектральная теория графов и локально-скалярные представления в гильбертовых пространствах.* — Укр. Мат. Жур. **58**, No. 1 (2006), 36–46.
15. И. К. Редчук, А. В. Ройтер, *Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции.* — Укр. Мат. Жур. **56**, No. 6 (2004), 796–809.
16. С. А. Кругляк, А. В. Ройтер, *Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств.* – Функц. анализ и прил. **39**, вып. 2 (2005), 13–30.
17. V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, II. — J. Algebra **78** (1982), 141–162.
18. S. Albeverio, V. Ostrovskyi, Yu. Samoilenko, *On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras.* — J. of Algebra in press.
19. D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs.* Academic press, New York (1979), 368 pp.
20. F. Harary, A. J. Schwenk, *Which graphs have integral spectra?* In: *Graphs and Combinatorics.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg –New York (1974), 45–51.
21. F. C. Bussemaker, D. Cvetkovic, *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs.* — Univ. Beograd Publ. Elektotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz. No. 544–No. 576 (1976), 43–48.
22. D. Cvetkovic, I. Gutman, N. Trinajstic, *Conjugated molecules having integrtal graph specrta.* — Chem Phys. Letters 29 (1974), 65–68.
23. M. Capobianco, S. Maurer, D. McCarthy, J. Molluzzo, *A colection of open problems.* — Ann. New York Acad. Sci. (1980), 582–583.
24. X. L. Li, L. G. Wang, *Integral trees – a survey.* — Chinese J. Eng. Math. **17** (2000), 91–93, 96.
25. L. G. Wang, X. L. Li, *Integral trees with diameter* 5 *and* 6. — Discrete Math. **297** (2005), 128–143.
26. M. Watanabe, A. J. Schwenk, *Integral starlike trees.* — J. Austral. Math. Soc., Ser. A 28 (1979) No. 1, 120–128.

Redchuk I. K. Separating functions and their applications.

In the present paper the survey of applications of separating functions in the theory of representations of quivers and algebras in linear and metric spaces is given. Application of these functions to the problems of spectral graph theory is also demonstrated.

Институт математики
Национальной академии наук Украины,
Киев, Украина

E-mail: red@imath.kiev.ua

Поступило 4 декабря 2006 г.