Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

С. А. Кругляк, Л. А. Назарова, $\boxed{\text{А. В. Ройтер}}$

ОРТОСКАЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЧАНОВ В КАТЕГОРИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Тридцать лет назад (см. [1]) в трудах И. М. Гельфанда, В. А. Пономарева, П. Габриэля и авторов было показано, что ряд задач линейной алгебры допускает содержательное изучение как на наивном языке приведения наборов матриц с помощью тех или иных допустимых преобразований, так и в категорно-функторных терминах. При этом одни и те же задачи возникали в теории представлений конечномерных алгебр, теории групп и модулей Хариш-Чандра.

Здесь нужно прежде всего упомянуть представления колчанов и частично упорядоченных множеств. Было доказано, в частности, что конечно представимые (соотв. ручные) колчаны соответствуют графам (соотв. расширенным графам) Дынкина [2, 3]. В [4] был указан путь перенесения этих результатов в гильбертовы пространства, построены функторы Кокстера и доказан аналог теоремы Габриэля для локально-скалярных представлений (в дальнейшем мы будем называть их ортоскалярными, считая этот термин более удачным).

Этой работой мы начинаем изучение аналогичных представлений колчанов ручного типа (соответствующих расширенным графам Дынкина), имея целью описание всех неразложимых ортоскалярных представлений, анонсированное в [5].

Представления колчанов в категории гильбертовых пространств естественно классифицировать с точностью до унитарной эквивалентности [4, 6]. Категорию таких представлений можно рассматривать как подкатегорию в категории всех представлений, при этом объекты, неразложимые в подкатегории, вообще говоря, становятся разложимыми в “большей” категории. Это не случается с неразложимыми ортоскалярными представлениями достаточно большого класса колчанов.

Доказательство этого факта и его приложения приводятся в п. 1.

Представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, описаны, с точностью до эквивалентности, в [3].

В п. 2 речь идет о классификации неразложимых ортоскалярных представлений графа $\widetilde{D}_4$. Размерности таких представлений есть корни графа $\widetilde{D}_4$. Для сингулярных корней [7] неразложимые представления могут быть получены из простейших функторами Кокстера [17]. Результаты п. 1 и работы [3] позволяют из регулярных корней рассматривать только наименьший мнимый корень $(2;1,1,1,1)$, в других размерностях представления разложимы.

В работах [8–15] и других изучались представления $*$-алгебр над $\mathbb{C}$, порожденных линейно связанными проекторами. В [16] устанавливается связь между ортоскалярными представлениями некоторых графов (деревьев, в число которых попадают и графы Дынкина) и представлениями таких $*$-алгебр, и эту связь мы будем использовать.

В п. 2 классифицируются неразложимые регулярные ортоскалярные представления графа $\widetilde{D}_4$. Ответ, полученный для соответствующей $*$-алгебры в [10, 11], нельзя считать, с нашей точки зрения, удовлетворительным и окончательным. Мы получим явные формулы, выражающие матричные элементы матриц представления через характер [4] ортоскалярного представления и два “свободных” действительных параметра.

1. О неразложимости в категории представлений колчана и ее подкатегории ортоскалярных представлений

1.1. Колчан Q с множеством вершин Q_v, $|Q_v| = N$ и множеством стрелок Q_a назовем *разделенным,* если $Q_v = \overset{\circ}{Q} \sqcup \overset{\bullet}{Q}$, и для любой $\alpha \in Q_a$ ее начало $t_\alpha \in \overset{\circ}{Q}$ и конец $h_\alpha \in \overset{\bullet}{Q}$. Колчан Q *однократный,* если однократны все его стрелки (т. е. если $\alpha \neq \beta$, то либо $t_\alpha \neq t_\beta$, либо $h_\alpha \neq h_\beta$). Вершины из $\overset{\circ}{Q}$ будем называть *четными,* из $\overset{\bullet}{Q}$ — *нечетными.*

Пусть $m = |\overset{\bullet}{Q}|$, $n = |\overset{\circ}{Q}|$, $\overset{\bullet}{Q} = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $\overset{\circ}{Q} = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Представление T колчана Q ставит в соответствие вершине $i \in Q_v$ конечномерное линейное пространство $T(i)$, а стрелке $\alpha : j \to i$, $\alpha \in Q_a$ линейное отображение $T_{ij} : T(j) \to T(i)$.

Представление T однократного разделенного колчана при фиксированных базисах пространств $T(i)$, $i \in G_v$ можно ассоциировать с матрицей, разделенной на m горизонтальных и n вертикальных полос, т. е. матрицей

$$T = [\, T_{i_l, j_k} \,] \begin{array}{l} k = \overline{1, n} \\ l = \overline{1, m} \end{array}.$$

При этом будем считать, что $T_{i_l, j_k} = 0$, если не существует $\alpha \in Q_a$ такой, что $t_\alpha = j_k$, $h_\alpha = i_l$.

Пусть $\operatorname{Rep} Q$ – категория представлений колчана Q, объекты которой есть представления, а морфизм представления T в представление $\widetilde{T}$ определяется как семейство линейных отображений $C = \{C_i\}_{i \in Q_v}$ таких, что для каждой $\alpha \in Q_v$ с $t_\alpha = j$, $h_\alpha = i$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} T(j) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "C_j"'] & T(i) \arrow[d, "C_i"'] \\ \widetilde{T}(j) \arrow[r, "\widetilde{T}(\alpha)"] & \widetilde{T}(i) \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативна, т. е. $C_i T_{ij} = \widetilde{T}_{ij} C_j$.

Пусть представления $T, \widetilde{T}$ разделенного однократного колчана заданы в матричной форме матрицами

$$T = [\, T_{i_l, j_k} \,] \begin{array}{l} k = \overline{1, n} \\ l = \overline{1, m} \end{array} \quad \text{и} \quad \widetilde{T} = [\, \widetilde{T}_{i_l, j_k} \,] \begin{array}{l} k = \overline{1, n} \\ l = \overline{1, m} \end{array}.$$

Пусть $C : T \to \widetilde{T}$ – морфизм представлений, $C = \{C_i\}_{i \in Q_v}$. Введем матрицы $A = \operatorname{diag}\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_m}\}$, $B = \operatorname{diag}\{C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_n}\}$. Тогда из коммутативности диаграмм (1) следует

$$AT = \widetilde{T} B. \tag{2}$$

Будем в дальнейшем говорить, что $C = (A, B)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – категория унитарных (конечномерных гильбертовых) пространств. Обозначим через $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$ подкатегорию в $\operatorname{Rep} Q$, объекты которой есть представления T, для которых $T(i)$ – унитарные пространства ($i \in Q_v$), а морфизмы $C : T \to \widetilde{T}$ – те из морфизмов в $\operatorname{Rep} Q$, для которых, кроме (1), коммутативными будут и диаграммы

$$\begin{tikzcd} T(j) \arrow[d, "C_j"'] & T(i) \arrow[l, "T(\alpha)^*"'] \arrow[d, "C_i"'] \\ \widetilde{T}(j) & \widetilde{T}(i) \arrow[l, "\widetilde{T}(\alpha)^*"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

т. е. будет выполняться равенство

$$BT^* = \widetilde{T}^* A. \tag{4}$$

Два представления T, $\widetilde{T}$ из $\operatorname{Rep} Q$ эквивалентны в $\operatorname{Rep} Q$, если в $\operatorname{Rep} Q$ найдется обратимый морфизм $C : T \to \widetilde{T}$.

Два представления T, $\widetilde{T}$ из $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$ эквивалентны в $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$, если в $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$ найдется обратимый морфизм $C : T \to \widetilde{T}$. Можно показать, что T, $\widetilde{T}$ эквивалентны в $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда они унитарно эквивалентны (см., например, [6]), т. е. обратимый морфизм C можно выбрать состоящим из унитарных матриц C_i.

Обозначим

$$\overrightarrow{T}_i = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline T_{i,j_1} & T_{i,j_2} & \cdots & T_{i,j_n} \\ \hline \end{array}$$

$$T_j^{\downarrow} = \begin{array}{|c|}\hline T_{i_1,j} \\ \hline T_{i_2,j} \\ \hline \vdots \\ \hline T_{i_m,j} \\ \hline \end{array}$$

Представление T разделенного однократного колчана Q из категории $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$ назовем *ортоскалярным* (в [4] такие представления называются локально-скалярными), если каждому $i \in Q_v$ сопоставлено вещественное положительное число χ_i, и выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_i \cdot \overrightarrow{T}_i^{\,*} &= \chi_i I_i \text{ при } i \in \overset{\bullet}{Q}, \\ T_j^{\downarrow *} \cdot T_j^{\downarrow} &= \chi_j I_j \text{ при } j \in \overset{\circ}{Q}, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь I_i — матрица единичного оператора в $T(i)$.

Определим категорию $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q,\mathcal{H})$ как полную подкатегорию в $\operatorname{Rep}(Q,\mathcal{H})$, объекты которой есть ортоскалярные представления колчана Q.

Ортоскалярному представлению T разделенного однократного колчана Q сопоставим два N-мерных вектора ($N = m + n$): *размерность* $d = \{d(j)\}_{j\in Q_v}$ *представления* T, где $d(j) = \dim T(j)$, и *характер* $\chi = \{\chi(j)\}_{j\in Q_v}$ *представления* T, $\chi(j) = \chi_j$ определены выше в (5). Легко видеть, что

$$\sum_{l=1}^{m} d(i_l)\chi(i_l) = \sum_{k=1}^{n} d(j_k)\chi(j_k)$$

(сумма квадратов длин строк матрицы представления T равна сумме квадратов длин столбцов).

Два ортоскалярных представления T и $\widetilde{T}$ эквивалентны, если существуют такие унитарные матрицы $U = \operatorname{diag}\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_m}\}$ и $V = \operatorname{diag}\{V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_n}\}$, что

$$UT = \widetilde{T}V, \text{ или}$$
$$\widetilde{T}_{i_l,j_k} = U_{i_l} T_{i_l,j_k} V^*_{j_k}. \tag{6}$$

Здесь матрицы U_{i_l} имеют размерность $d_{i_l} \times d_{i_l}$, а V_{j_k} – размерность $d_{j_k} \times d_{j_k}$.

Замечание 1. Заметим, что по колчану Q можно построить $*$-колчан $\widehat{Q}$, добавив к каждой стрелке $\alpha_{ij} : j \to i$ дополнительно стрелку $\alpha^*_{ij} : i \to j$. При этом категория $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q,\mathcal{H})$ и категория ортоскалярных $*$-представлений $*$-колчана $\widehat{Q}$ отождествляются.

Замечание 2. Пусть $C = (A, B)$ – морфизм представления T в представление $\widetilde{T}$ в категории $\operatorname{Rep} Q$, т. е. выполняется равенство (2):

$$AT = \widetilde{T}B$$

и A, B есть унитарные операторы, тогда $C = (A, B)$ есть морфизм представления T в представление $\widetilde{T}$ и в категории $\operatorname{Rep}(Q,\mathcal{H})$, т. е. выполняется равенство (4):

$$BT^* = \widetilde{T}^*A.$$

Действительно, из (2) следует $T^*A^* = B^*\widetilde{T}^*$ или, учитывая унитарность A и B, имеем $T^*A^{-1} = B^{-1}\widetilde{T}^*$. Поэтому $BT^* = \widetilde{T}^*A$.

Замечание 3. Пусть $C = (A, B)$ – морфизм представления T в представление T (эндоморфизм представления T) в категории $\operatorname{Rep} Q$, т. е.

$$AT = TB, \tag{7}$$

и A, B – самосопряженные операторы, тогда $C = (A, B)$ есть эндоморфизм представления T и в категории $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$, т. е. и

$$BT^* = T^*A.$$

Действительно, (8) получается из (7) операцией сопряжения.

1.2. Представление T колчана Q называется *точным*, если $T(i) \neq 0$ при всех $i \in Q_v$ ($d(i) \neq 0$). *Носителем* представления T называется множество $Q_v^T = \{i \in Q_v \,|\, T(i) \neq 0\}$. Характер ортоскалярного представления определен однозначно на носителе Q_v^T (и не однозначно вне носителя). Если представление точно, то характер ортоскалярного представления определен однозначно и обозначается χ_T; в общем случае обозначим через $\{\chi_T\}$ множество всех характеров представления T. Ясно, что если T и $\widetilde{T}$ эквивалентны, то $\{\chi_T\} = \{\chi_{\widetilde{T}}\}$.

Естественным образом определяются разложимые представления (при этом, если $T = T_1 \oplus T_2$ в категории $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$, то $T_1(i) \oplus T_2(i)$ означает ортогональную сумму унитарных пространств), и если T, T_1, T_2 – точные ортоскалярные представления, то $\chi_{T_1} = \chi_{T_2} = \chi_T$.

Представление T будем называть *шуровским* в категории $\operatorname{Rep} Q$ (соответственно, $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$, $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q, \mathcal{H})$), если его кольцо эндоморфизмов в этой категории одномерно (изоморфно $\mathbb{C}$).

Очевидно, если T – шуровское представление, то T неразложимо (в соответствующей категории).

Замечание 4. Если T – неразложимое представление в категории $\mathcal{R} = \operatorname{Rep}(Q, \mathcal{H})$, то T – шуровское представление.

Действительно, алгебра $\mathfrak{A} = \operatorname{End}_{\mathcal{R}} T$ есть конечномерная $*$-алгебра. Если $C = (A, B) \in \operatorname{End}_{\mathcal{R}} T$, то $C^* = (A^*, B^*)$. Если $C \in \operatorname{Rad} \mathfrak{A}$, то $CC^* = (AA^*, BB^*) \in \operatorname{Rad} \mathfrak{A}$ и CC^* – нильпотентный элемент, поэтому AA^*, BB^* нильпотентны и положительны. Значит, $C = (0, 0)$, и алгебра $\mathfrak{A}$ полупростая. С другой стороны, алгебра $\mathfrak{A}$ локальна как алгебра эндоморфизмов неразложимого представления. Значит, $\mathfrak{A} \cong \mathbb{C}$.

Лемма 1. *Пусть* $Z = [\,z_{ij}\,]\begin{smallmatrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}\end{smallmatrix}$, $W = [\,w_{ij}\,]\begin{smallmatrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}\end{smallmatrix}$ *– матрицы над полем* $\mathbb{C}$, *имеющие одинаковые положительные длины* ($|\overrightarrow{x}|$, $|y^{\downarrow}|$) *соответствующих строк и соответствующих столбцов. Пусть* $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ *– матрицы над* $\mathbb{R}$, $a_i > 0$, $b_j > 0$ *при* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *и пусть* $AZ = WB$. *Тогда* $Z = W$.

Доказательство. Обозначим через K число ненулевых элементов в каждой из матриц Z, W (из-за $AZ = WB$ это число общее для Z и W). Очевидно, $K \geq \max(m, n)$, так как в матрицах Z, W нет нулевых строк либо столбцов.

Доказательство проведем индукцией по тройкам чисел (m, n, K): будем считать, что $(m_1, n_1, K_1) < (m_2, n_2, K_2)$, если $m_1 \leq m_2$, $n_1 \leq n_2$ и хотя бы одно неравентсво строгое, либо если $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, но $K_1 < K_2$.

а) Базу индукции получаем при $m = 1$, либо $n = 1$, либо $K = \max(m, n)$.

Пусть $m = 1$. Из

$$[a_1z_{11}, a_1z_{12}, \dots, a_1z_{1n}] = [w_{11}b_1, w_{12}b_2, \dots, w_{1n}b_n]$$

и $|z_{1j}| = |w_{1j}|$ (последнее следует из равенства длин соответствующих столбцов матриц Z и W), где $z_{1j} \neq 0$ и $w_{1j} \neq 0$ при $j = \overline{1,n}$, следует, что $a_1 = b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, но тогда $[z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n}] = [w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1m}]$.

Случай $n = 1$ аналогичен предыдущему.

Пусть теперь, для определенности, $1 < m \leq n$. Тогда $K \geq n$.

Пусть $K = n$. В этом случае в каждом столбце матриц Z и W есть ровно один ненулевой элемент. Рассмотрим соответствующие ненулевые элементы z_{ij} и w_{ij} матриц Z и W. Из $AZ = WB$ следует, что $a_iz_{ij} = w_{ij}b_j$. Так как $|z_{ij}| = |w_{ij}|$, то $a_i = b_j$, но тогда $z_{ij} = w_{ij}$ и, следовательно, $Z = W$.

б) Пусть $K > n \geq m > 1$.

Так как матрицы Z и W имеют одинаковые длины соответствующих строк и столбцов (по предположению), а матрицы AZ и WB – в силу равенства матриц, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &a_i^2\left(|z_{i1}|^2 + \cdots + |z_{in}|^2\right) = |w_{i1}|^2b_1^2 + \cdots + |w_{in}|^2b_n^2, \\ &|z_{i1}|^2 + \cdots + |z_{in}|^2 = |w_{i1}|^2 + \cdots + |w_{in}|^2, i = \overline{1,m}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$a_1^2|z_{1j}|^2+\dots+a_m^2|z_{mj}|^2=\left(|w_{1j}|^2+\dots+|w_{mj}|^2\right)b_j^2,$$
$$|z_{1j}|^2+\dots+|z_{mj}|^2=|w_{1j}|^2+\dots+|w_{mj}|^2,$$
$$j=\overline{1,n}; \tag{10}$$

$$a_i^2=\frac{|w_{i1}|^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}|w_{ij}|^2}b_1^2+\dots+\frac{|w_{in}|^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}|w_{ij}|^2}b_n^2,\ i=\overline{1,m}; \tag{11}$$

$$b_j^2=a_1^2\frac{|z_{1j}|^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}|z_{ij}|^2}+\dots+a_m^2\frac{|z_{mj}|^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}|z_{ij}|^2},\ j=\overline{1,n}. \tag{12}$$

В формулах (11)–(12) в правых частях равенств при a_i^2, b_j^2 стоят коэффициенты ≤ 1.

Будем считать (возможно, после перестановки строк и столбцов), что $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_m$ и $b_1\leq b_2\leq\dots\leq b_n$.

Пусть w_{1r} – первый и w_{1s} – последний ненулевой элемент в 1-й строке матрицы W, $1\leq r\leq s\leq n$. Тогда

$$a_1^2=\sum_{k=r}^{s}\frac{|w_{1k}|}{\sum\limits_{j=r}^{s}|w_{1j}|^2}b_k^2\geq b_r^2\sum_{k=r}^{s}\frac{|w_{1k}|^2}{\sum\limits_{j=r}^{s}|w_{1j}|^2}=b_r^2.$$

С другой стороны,

$$b_1^2=\sum_{l=1}^{m}\frac{|z_{l1}|}{\sum\limits_{i=1}^{m}|z_{i1}|^2}a_i^2\geq a_1^2\sum_{l=1}^{m}\frac{|z_{l1}|^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}|z_{i1}|^2}=a_1^2,$$

т. е. $a_1^2\geq b_r^2\geq b_1^2\geq a_1^2$. Поэтому $a_1^2=b_r^2$, а тогда из $AZ=WB$ следует, что $z_{1r}=w_{1r}$.

Заменим элементы w_{1r} и z_{1r} в W и Z нулями, и если в результате у матриц W, Z появятся нулевые строки либо нулевые столбцы, выбросим их. В результате мы получим матрицы $\widehat{W}$, $\widehat{Z}$, удовлетворяющие условиям леммы и имеющие либо меньшее число нулевых элементов при той же размерности $(m\times n)$, либо матрицы с меньшим числом строк или столбцов (и одновременно с меньшим числом ненулевых элементов). По предположению индукции $\widehat{W}=\widehat{Z}$, а тогда, очевидно, и $W=Z$.

Опираясь на лемму, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть Q – разделенный однократный колчан и T – его неразложимое (в категории $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q,\mathcal{H})$) ортоскалярное представление. Тогда T – неразложимое шуровское представление в категории $\operatorname{Rep} Q$.*

Доказательство. Пусть $C = (A, B)$ – эндоморфизм представления T в категории $\operatorname{Rep} Q$, т. е. $AT = TB$. Можно считать, что A и B – обратимые матрицы, добавив в случае необходимости к A и B подходящие скалярные матрицы с одним и тем же скаляром на диагонали.

Пусть $A = XU$, $B = VY$ – полярные разложения матриц A и B, где U, V – унитарны, X, Y – положительные невырожденные матрицы (при этом можно считать, что U, V, X, Y имеют такую же блочно-диагональную структуру, как A и B). Пусть, кроме того,

$$X = U_1^* \widetilde{X} U_1,\ Y = V_1 \widetilde{Y} V_1^*,$$

где U_1, V_1 – унитарные матрицы, $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ – диагональные матрицы с положительными числами на диагонали. Тогда

$$U_1^* \widetilde{X} U_1 U T = T V V_1 \widetilde{Y} V_1^*$$

или

$$\widetilde{X}(U_1 U T V_1) = (U_1 T V V_1)\widetilde{Y}.$$

Так как длины соответствующих строк и столбцов матриц U_1UTV_1 и U_1TVV_1 равны из-за ортоскалярности представления T, по лемме 1

$$U_1 U T V_1 = U_1 T V V_1,$$

а тогда, после сокращения,

$$UT = TV.$$

Так как U, V – унитарные матрицы, то по замечанию 2 (U, V) – эндоморфизм неразложимого в $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q,\mathcal{H})$ ортоскалярного представления, а тогда по замечанию 4 матрицы U и V скалярны с одним и тем же скаляром на диагонали.

“Сократим” равенство

$$XUT = TVY$$

на скалярные матрицы U и V, получим

$$XT = TY,$$

где матрицы X и Y самосопряженные.

Тогда по замечанию 3 (X, Y) есть эндоморфизм ортоскалярного неразложимого представления T в категории $\mathrm{Rep}_{\mathrm{os}}(Q, \mathcal{H})$ и (по замечанию 4) X и Y – скалярные с одним и тем же скаляром на диагонали. В результате такими же будут и произведения скалярных матриц $XU = A$ и $VY = B$, а, значит, представление T – шуровское в категории $\mathrm{Rep}\, Q$.

Так как, очевидно, у разложимого представления есть нескалярный эндоморфизм, представление T неразложимо в $\mathrm{Rep}\, Q$.

Замечание 5. Условие однократности колчана не является существенным, лемма 1 легко обобщается на случай колчана с кратными стрелками.

Замечание 6. Если снять с колчана Q условие разделенности, теорема 1 перестает быть верной. Так, пусть колчан Q есть петля

Пусть T – его неразложимое ортоскалярное представление с матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Условие ортоскалярности в этом случае выглядит так (см. [4]):

$$TT^* + T^*T = 3I.$$

Неразложимость T в $\mathrm{Rep}_{\mathrm{os}}(Q, \mathcal{H})$ проверяется так: легко подсчитать, что из $CT = TC$ и $CT^* = T^*C$ следует, что C — скалярная матрица.

Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; легко проверить, что $AT = TA$, так что A задает нескалярный обратимый эндоморфизм представления T в $\mathrm{Rep}\, Q$ (и представление T разложимо в $\mathrm{Rep}\, Q$).

1.3. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим следующую $*$-алгебру:

$$\mathcal{P}_n = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \mid p_i = p_i^2 = p_i^* \rangle,$$

а через $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ – категорию, объекты которой есть $*$-представления π алгебры $\mathcal{P}_n$ в категории конечномерных гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ $(\pi(p_i) = P_i,\ P_i : H_0 \to H_0,\ P_i^2 = P_i^* = P_i)$, а морфизм C_0 из представления π в пространстве H_0 в представление $\widetilde{\pi}$ в пространстве $\widetilde{H}_0$ определяется как линейное отображение $C_0 : H_0 \to \widetilde{H}_0$ со свойством

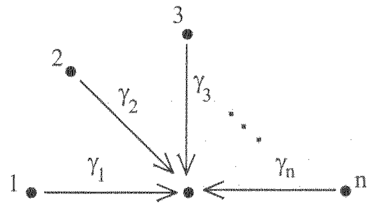
$$C_0 P_i = \widetilde{P}_i C_0 P_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Категорию $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ можно трактовать [18] как категорию n-ок подпространств конечномерных гильбертовых пространств. Если π – представление алгебры $\mathcal{P}_n$ в H_0 $(\pi(p_i) = P_i)$, то поставим ему в соответствие n-ку подпространств $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ пространства H_0; здесь $H_i = \operatorname{Im} P_i,\ i = \overline{1, n}$. Морфизм из $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ в $(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_n)$ определяется естественным образом как линейное отображение $C : H_0 \to \widetilde{H}_0$, для которого $C(H_i) \subset \widetilde{H}_i$ при $i = \overline{1, n}$. Категория $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ и категория n-ок подпространств конечномерных гильбертовых пространств эквивалентны. Классификации n-ок подпространств в линейных пространствах посвящены работы [19–21] и другие.

Представление π алгебры $\mathcal{P}_n$ будем называть ортоскалярным, если найдутся положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi(p_i) = I_0$$

$(I_0$ – единичный оператор в пространстве $H_0)$. Через $\mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ обозначим в $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ полную подкатегорию ортоскалярных представлений. С другой стороны, через Q_n обозначим колчан



Пусть $\mathcal{K}(Q_n)$ – полная подкатегория в $\operatorname{Rep} Q_n$ тех представлений T, для которых $T(\gamma_i)^* T(\gamma_i)$ есть скалярный оператор, отличный от нулевого в пространстве $T(i)$, а $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(Q_n, \mathcal{H})$ в категории $\mathcal{K}(Q_n)$ – полная подкатегория ортоскалярных представлений.

Лемма 2. *Категории $\mathcal{K}(Q_n)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ эквивалентны. Категории $\mathrm{Rep}_{\mathrm{os}}(Q_n,\mathcal{H})$ и $\mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ эквивалентны.*

Доказательство. Построим функтор $F:\mathcal{K}(Q_n)\to\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$. Пусть T – представление из $\mathcal{K}(Q_n)$ и $T(\gamma_i)^*T(\gamma_i)=\alpha_i I_i$. Введем обозначение $\frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}T(\gamma_i)=\Gamma_i$, тогда $\Gamma_i^*\Gamma_i=I_i$, и $\Gamma_i\Gamma_i^*=P_i$ есть ортопроектор. Пусть представление π алгебры $\mathcal{P}_n$ задается равенствами $\pi(p_i)=P_i$. Положим $F(T)=\pi$.

Пусть $C=\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}:T\to\widetilde{T}$ – морфизм в категории $\mathcal{K}(Q_n)$:

$$C_0T(\gamma_i)=\widetilde{T}(\gamma_i)C_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Тогда

$$\sqrt{\alpha_i}C_0\Gamma_i=\sqrt{\widetilde{\alpha}_i}\widetilde{\Gamma}_iC_i,\tag{14}$$

а так как $\widetilde{\Gamma}_i^*\widetilde{\Gamma}_i=\widetilde{I}_i$, то

$$C_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_i}}\,\widetilde{\Gamma}_i^*C_0\Gamma_i.\tag{15}$$

После подстановки C_i в (14), получим

$$C_0\Gamma_i=\widetilde{\Gamma}_i\widetilde{\Gamma}_i^*C_0\Gamma_i,$$

и, после умножения равенства справа на Γ_i^*,

$$C_0P_i=\widetilde{P}_iC_0P_i,$$

т. е. $C_0:\pi\to\widetilde{\pi}$ – морфизм в категории $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$.

Положим $F(C)=C_0$, тогда F — функтор из $\mathcal{K}(Q_n)$ в $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$.

Пусть $C_0:\pi\to\widetilde{\pi}$ – морфизм в $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$, где C_0 — линейное отображение из H_0 в $\widetilde{H}_0$. Построим отображения $C_i:H_i\to\widetilde{H}_i$, где $H_i=\operatorname{Im}P_i$, $\widetilde{H}_i=\operatorname{Im}\widetilde{P}_i$, по формулам (15). Если Γ_i, $\widetilde{\Gamma}_i$ – естественные вложения пространств H_i, соответственно $\widetilde{H}_i$ в пространство H_0, соответственно $\widetilde{H}_0$ ($P_i=\Gamma_i\Gamma_i^*$, $\widetilde{P}_i=\widetilde{\Gamma}_i\widetilde{\Gamma}_i^*$), то

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(\gamma_i)C_i&=\sqrt{\widetilde{\alpha}_i}\widetilde{\Gamma}_iC_i=\sqrt{\widetilde{\alpha}_i}\widetilde{\Gamma}_i\sqrt{\frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_i}}\widetilde{\Gamma}_i^*C_0\Gamma_i\\&=\sqrt{\alpha_i}\widetilde{P}_iC_0P_i\Gamma_i=\sqrt{\alpha_i}C_0P_i\Gamma_i=\sqrt{\alpha_i}C_0\Gamma_i=C_0T(\gamma_i),\end{aligned}$$

т. е. $C=\{C_i\}_{i=\overline{0,n}}$ есть морфизм в $\mathcal{K}(Q_n)$ такой, что $F(C)=C_0$. Так как C_i формулами (15) по C_0 восстанавливаются однозначно, F – полный и унивалентный функтор. Каждое представление в $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$ получается из некоторого представления в $\mathcal{K}(Q_n)$, следовательно, F – функтор эквивалентности категорий.

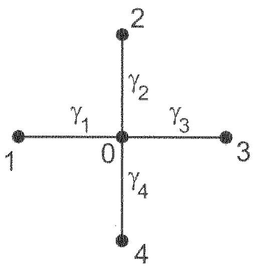
Ограничение F на $\mathrm{Rep}_{\mathrm{os}}(Q_n,\mathcal{H})$ дает эквивалентность $\mathrm{Rep}_{\mathrm{os}}(Q_n,\mathcal{H})$ и $\mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$.

Следствием леммы 2 и теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Если $(H_1,H_2,\ldots,H_n)$ – n-ка подпространств конечномерного гильбертового пространства H_0, и соответствующая n-ка ортопроекторов $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ задает неразложимое представление в категории ортоскалярных представлений $\mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ ($\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iP_i=I_0$ для некоторого набора чисел $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$), то эта n-ка ортопроекторов есть шуровский объект в категории $\mathcal{K}(\mathcal{P}_n)$, а соответствующий набор подпространств – неразложимый шуровский объект в категории n-ок подпространств конечномерного гильбертового пространства.*

2. О регулярных локально-скалярных представлениях графа $\widetilde{D}_4$ в гильбертовых пространствах

2.1. Пусть $\mathcal{H}$ – категория конечномерных гильбертовых пространств, $\widetilde{D}_4$ – расширенный граф Дынкина



Напомним [4], что представление Π графа $\widetilde{D}_4$ сопоставляет каждой вершине i ($i=\overline{0,4}$) пространство $H_i\in\mathcal{H}$, каждому ребру γ_i – пару взаимосопряженных линейных операторов $\Pi(\gamma_i)=\{\Gamma_{i0};\Gamma_{0i}\}$, где $\Gamma_{0i}:H_i\to H_0$, $\Gamma_{i0}=\Gamma_{0i}^*$.

Морфизм $C:\Pi\to\widetilde{\Pi}$ – это семейство $C=\{C_i\}_{i=\overline{0,4}}$ операторов

$C_i : \Pi(i) \to \widetilde{\Pi}(i)$ таких, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r, "\Gamma_{ji}"] \arrow[d, "C_i"'] & H_j \arrow[d, "C_j"'] \\ \widetilde{H}_i \arrow[r, "\widetilde{\Gamma}_{ji}"] & \widetilde{H}_j \end{tikzcd}$$

коммутативны, т. е. $C_j\Gamma_{ji} = \widetilde{\Gamma}_{ji}C_i$.

Пусть M_i – множество вершин, соединенных с вершиной i ребром, $A_i = \sum_{j\in M_i}\Gamma_{ij}\Gamma_{ji}$. Для ортоскалярного представления Π [4] все операторы A_i скалярны; $A_i = \alpha_i I_{H_i}$, где I_{H_i} – тождественный оператор в пространстве H_i. Поскольку A_i – положительный оператор, то $\alpha_i \geq 0$. Вектор $\{\dim \Pi(i)\}$ есть размерность конечномерного представления Π_i; если $A_i = f(i)I_{H_i}$, то $\{f(i)\}$ – характер ортоскалярного представления Π.

В дальнейшем через $\mathrm{Rep}\,(\widetilde{D}_4, f)$ будем обозначать категорию конечномерных локально-скалярных представлений графа $\widetilde{D}_4$ в $\mathcal{H}$ с фиксированным характером f.

Будем считать, что $\alpha_i = f(i) > 0$, $i = \overline{0,4}$ и характер нормирован: $f(0) = \alpha_0 = 1$.

С другой стороны, рассмотрим следующую $*$-алгебру над полем $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{P}_{4,f} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \,|\, p_i = p_i^* = p_i^2,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i p_i = e\rangle,$$

где $\alpha_i = f(i)$, e – единица алгебры, и $\mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{4,f}$ – категорию конечномерных $*$-представлений алгебры $\mathcal{P}_{4,f}$.

Пусть $\Pi \in \mathrm{Rep}\,(\widetilde{D}_4, f)$, $\Pi(i) = H_i$, $\pi(\gamma_i) = \{\Gamma_{i,0}; \Gamma_{0,i}\}$. Построим представление π алгебры $\mathcal{P}_{4,f}$ следующим образом:

$$\pi(p_i) = \frac{1}{\alpha_i}\Gamma_{0,i}\cdot\Gamma_{i,0} = P_i.$$

Если $C : \Pi \to \widetilde{\Pi}$ – морфизм в $\mathrm{Rep}\,(\widetilde{D}_4, f)$, то $C_0 : \pi \to \widetilde{\pi}$ – морфизм в $\mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{4,f}$ (C_0 – оператор, сплетающий представления π и $\widetilde{\pi}$). Определим функтор

$$\Phi : \mathrm{Rep}\,(\widetilde{D}_4, f) \to \mathrm{Rep}\,\mathcal{P}_{4,f},$$

полагая $\Phi(\Pi) = \pi$, $\Phi(C) = C_0$. Легко видеть, что функтор Φ есть функтор эквивалентности категорий.

Пусть $\pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{4,f}$ есть представление в пространстве H_0. Положим $H_i = \operatorname{Im} P_i$, $i = \overline{1,4}$; $\Gamma_{0,i} : H_i \to H_0$ – естественное вложение пространства H_i в H_0, тогда, полагая $\Pi(\gamma_i) = \{\Gamma_{0,i}; \Gamma_{0,i}^*\}$, получим представление из $\operatorname{Rep}(\widetilde{D}_4, f)$. Если $C_0 : \pi \to \widetilde{\pi}$, положим $C_i = C_0\big|_{H_i}$. Если $\Phi^{(-1)}(\pi) = \Pi$, $\Phi^{(-1)}(C_0) = \{C_i\}_{i=\overline{0,4}}$, то $\Phi\Phi^{(-1)} \sim I_{\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{4,f}}$, $\Phi^{(-1)}\Phi \sim I_{\operatorname{Rep}(\widetilde{D}_4, f)}$.

2.2. Рассмотрим представление $*$-алгебры $\mathcal{P}_{4,f}$ при

$$0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \alpha_4 < 1, \ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 2.$$

(в других случаях представления $*$-алгебр $\mathcal{P}_{4,f}$ функторами Кокстера сводятся к простейшим [17]).

Сделаем в алгебре $\mathcal{P}_{4,f}$ замену образующих [10]:

$$\begin{array}{lll} x = \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 - \frac{1}{2}\beta_1 e, & & \beta_1 = (2 - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)/2, \\ y = \alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_3 - \frac{1}{2}\beta_2 e, & \text{где} & \beta_2 = (2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)/2, \\ z = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \frac{1}{2}\beta_3 e, & & \beta_3 = (2 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)/2. \end{array} \tag{16}$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2)/4, \\ \gamma_2 &= (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2)/4, \\ \gamma_3 &= (-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)/4. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \gamma_3$ и $0 \le \gamma_2$.

Новые образующие x, y, z удовлетворяют системе соотношений

$$\begin{array}{ll} \{y, z\} = \gamma_1 e, & \\ \{z, x\} = \gamma_2 e, & (x + y + z)^2 = \alpha_4^2 e. \\ \{x, y\} = \gamma_3 e, & \end{array} \tag{17}$$

Из равентв (16) следует, что

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-x+y+z}{2\alpha_1} + \frac{1}{2}e,\\ p_2 &= \frac{x-y+z}{2\alpha_2} + \frac{1}{2}e,\\ p_3 &= \frac{x+y-z}{2\alpha_3} + \frac{1}{2}e,\\ p_4 &= \frac{-x-y-z}{2\alpha_4} + \frac{1}{2}e. \end{aligned} \tag{18}$$

2.3. Пусть $\gamma_3 = 0$, тогда из $0 \le \gamma_2 \le \gamma_3$ следует, что $\gamma_2 = 0$, а тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$ (этот случай рассмотрен в [9]), а значит и $\gamma_1 = 0$.

Система соотношений (17) в этом случае приобретает вид

$$\begin{aligned} \{y,z\} &= 0,\\ \{z,x\} &= 0, \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}e.\\ \{x,y\} &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть π – двумерное неразложимое представление алгебры $\mathcal{P}_{4,f}$ и $\pi(x) = X$, $\pi(y) = Y$, $\pi(z) = Z$.

a) Пусть $Z = 0$. Матрицу X, как матрицу самосопряженного оператора, можно диагонализировать. Из соотношений антикоммутации следует, что тройка $X, Y, Z = 0$ будет неразложимой лишь в случае, когда диагонализированная матрица X имеет вид $\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Тогда $Y = \begin{bmatrix} 0 & y_{12} \\ \overline{y}_{12} & 0 \end{bmatrix}$, $y_{12} \neq 0$, и допустимыми преобразованиями элемент y_{12} можно сделать положительным. Следовательно, мы имеем случай

$$X = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda > 0, \mu > 0.$$

b) Пусть $Z \neq 0$ и $X = 0$. Тогда матрицу Y можно диагонализировать, приводя к виду $Y = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\mu > 0$ (в иных случаях тройка матриц оказывается разложимой). Тогда из $\{y, z\} = 0$ следует, что $Z = \begin{bmatrix} 0 & z_{12} \\ \overline{z}_{12} & 0 \end{bmatrix}$ и допустимыми преобразованиями (не меняя Y) матрицу Z можно привести к виду $Z = \begin{bmatrix} 0 & i\nu \\ i\nu & 0 \end{bmatrix}$, $\nu > 0$. С помощью унитарной матрицы $U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ преобразованием UXU^*, UYU^*, UZU^* тройку матриц X, Y, Z приведем к виду

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \nu \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}; \quad \mu > 0, \nu > 0.$$

c) Пусть $X \neq 0$, $Z \neq 0$, $Y = 0$. В этом случае матрицы X, Y, Z можно привести к виду

$$X = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \nu \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix};$$
$$\lambda > 0, \quad \nu > 0.$$

d) $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $Z \neq 0$. В этом случае матрицы X, Y, Z можно привести к виду

$$X = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \nu \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix};$$
$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \nu \neq 0.$$

Таким образом, объединяя эти случаи, можно считать, что

$$X = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \nu \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix},$$

где $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \dfrac{1}{4}$ (следует из (19)), и

либо $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$;
либо $\lambda = 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$;
либо $\lambda > 0$, $\mu = 0$, $\nu > 0$.

По формулам (18)

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \mu + \nu i \\ \mu - \nu i & \frac{1}{2} + \lambda \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda & -\mu + \nu i \\ -\mu - \nu i & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix},$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda & \mu - \nu i \\ \mu + \nu i & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\mu - \nu i \\ -\mu + \nu i & \frac{1}{2} + \lambda \end{bmatrix}.$$

Если $\mu + \nu i = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\, e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\, e^{i\varphi}$ то, переходя к унитарно-эквивалентному представлению с помощью матрицы

$U=\begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, можем считать, что

$$P_1=\begin{bmatrix} \frac12-\lambda & \sqrt{\frac14-\lambda^2}\\ \sqrt{\frac14-\lambda^2} & \frac12+\lambda\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix} \frac12+\lambda & e^{i\chi}\sqrt{\frac14-\lambda^2}\\ e^{-i\chi}\sqrt{\frac14-\lambda^2} & \frac12-\lambda\end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix} \frac12+\lambda & -e^{i\chi}\sqrt{\frac14-\lambda^2}\\ -e^{-i\chi}\sqrt{\frac14-\lambda^2} & \frac12-\lambda\end{bmatrix},\ P_4=\begin{bmatrix} \frac12-\lambda & -\sqrt{\frac14-\lambda^2}\\ -\sqrt{\frac14-\lambda^2} & \frac12+\lambda\end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$0\le\lambda<1/2, \text{ и}$$
$$0<\chi<\pi/2 \text{ при } \lambda=0,$$
$$-\pi/2<\chi\le\pi/2 \text{ при } 0<\lambda<1/2.$$

2.4. Пусть $\gamma_3\ne 0$, тогда из $\{x,y\}=\gamma_3 e$ следует, что $X\ne 0$ и $Y\ne 0$. Более того, X и Y не имеют нулевых собственных чисел. Действительно, пусть после диагонализации матрица X приобретает вид $X=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$. В матрицах Y и Z либо $y_{12}\ne 0$, либо $z_{12}\ne 0$ (иначе тройка матриц разложима). Из $\{x,y\}=\gamma_3 e$, $\{x,z\}=\gamma_2 e$ следует, что $(\lambda_1+\lambda_2)z_{12}=0$ и $(\lambda_1+\lambda_2)y_{12}=0$. Поэтому можно считать, что $-\lambda_1=\lambda_2=\lambda\ne 0$, $\lambda>0$. Такие же рассуждения годятся и для Y.

Пусть $X=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$. Из $\{x,y\}=\gamma_3 e$ следует, что $y_{11}=-\frac{\gamma_3}{2\lambda}$, $y_{22}=\frac{\gamma_3}{2\lambda}$; из $\{x,z\}=\gamma_2 e$ следует, что $z_{11}=-\frac{\gamma_2}{2\lambda}$, $z_{22}=\frac{\gamma_2}{2\lambda}$:

$$X=\lambda\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad Y=\frac{1}{2\lambda}\begin{bmatrix}-\gamma_3 & y_{12}\\ \overline{y}_{12} & \gamma_3\end{bmatrix},\quad Z=\frac{1}{2\lambda}\begin{bmatrix}-\gamma_2 & z_{12}\\ \overline{z}_{12} & \gamma_2\end{bmatrix}.$$

Из $\{y,z\}=\gamma_1 e$ следует, что

$$\frac{1}{4\lambda^2}\begin{bmatrix}2\gamma_2\gamma_3+y_{12}\overline{z}_{12}+\overline{y}_{12}z_{12} & 0\\ 0 & 2\gamma_2\gamma_3+y_{12}\overline{z}_{12}+\overline{y}_{12}z_{12}\end{bmatrix}=\gamma_1 I,$$

то есть

$$y_{12}\overline{z}_{12}+\overline{y}_{12}z_{12}=4\gamma_1\lambda^2-2\gamma_2\gamma_3. \tag{21}$$

Перейдем к унитарно-эквивалентному представлению с помощью унитарной матрицы $U=\begin{bmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ таким образом, чтобы $y_{12}+z_{12}=r_1$ было положительным вещественным; при этом $-y_{12}+z_{12}$ останется, вообще говоря, комплексным, $-y_{12}+z_{12}=r_2e^{i\chi}$.

Тогда из (17) следует, что

$$(X+Y+Z)^2 =$$
$$\frac{1}{4\lambda^2}\begin{bmatrix} (2\lambda^2+\gamma_2+\gamma_3)^2+(y_{12}+z_{12})^2 & 0 \\ 0 & (2\lambda^2+\gamma_2+\gamma_3)^2+(y_{12}+z_{12})^2. \end{bmatrix} = \alpha_4^2 I.$$

и

$$r_1^2 = (y_{12}+z_{12})^2 = 4\alpha_4^2\lambda^2 - (2\lambda^2+\gamma_2+\gamma_3)^2,$$

откуда легко получить, что

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{-4\lambda^4 + 2(\alpha_1^2+\alpha_4^2)\lambda^2 - \frac{1}{4}(\alpha_4^2-\alpha_1^2)^2} \\ &= \sqrt{-4\left(\lambda^2 - \frac{(\alpha_4^2-\alpha_1^2)^2}{4}\right)\left(\lambda^2 - \frac{(\alpha_4^2+\alpha_1^2)^2}{4}\right)}, \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_4-\alpha_1}{2} \le \lambda \le \frac{\alpha_4+\alpha_1}{2}.$$

$$\begin{cases} y_{12}+z_{12} = r_1, \\ -y_{12}+z_{12} = r_2 e^{i\chi}, \end{cases} \text{ поэтому } \begin{cases} y_{12} = (r_1 - r_2 e^{i\chi})/2, \\ z_{12} = (r_1 + r_2 e^{i\chi})/2, \end{cases}$$

$y_{12}\overline{z}_{12} + \overline{y}_{12} z_{12} = (r_1^2 - r_2^2)/2 = 4\gamma_1\lambda^2 - 2\gamma_2\gamma_3$ (последнее равенство следует из (21)).

Таким образом,

$$r_2^2 = r_1^2 + 4\gamma_2\gamma_3 - 8\gamma_1\lambda^2 = -4\lambda^4 + 2(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\lambda^2 - \frac{1}{4}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^2 \ge 0$$

и

$$\begin{aligned} -y_{12}+z_{12} = r_2 e^{i\chi} &= e^{i\chi}\sqrt{-4\lambda^4 + 2(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\lambda^2 - \frac{1}{4}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^2} \\ &= e^{i\chi}\sqrt{-4\left(\lambda^2 - \frac{(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^2}{4}\right)\left(\lambda^2 - \frac{(\alpha_3^2+\alpha_2^2)^2}{4}\right)}, \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2} \le \lambda \le \frac{\alpha_3+\alpha_2}{2}.$$

Теперь мы можем непосредственно найти операторы представления P_1, P_2, P_3, P_4 по матрицам X, Y, Z, следуя формулам (18).

В соответствии с п. 2.1 по проекторам $P_i : H_0 \to H_0$ построим изометрии $\Gamma_{0,i} : H_i \to H_0$, $i = \overline{1,4}$ и получим регулярные неразложимые локально-скалярные представления графа $\widetilde{D}_4$:

$$\Gamma_{0,1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda^2+\alpha_1\lambda-(\alpha_4^2-\alpha_1^2)/4}{2\alpha_1\lambda}} \\ \sqrt{\frac{-\lambda^2+\alpha_1\lambda+(\alpha_4^2-\alpha_1^2)/4}{2\alpha_1\lambda}} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{0,2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-\lambda^2+\alpha_2\lambda+(\alpha_3^2-\alpha_2^2)/4}{2\alpha_2\lambda}} \\ e^{-i\chi}\sqrt{\frac{\lambda^2+\alpha_2\lambda-(\alpha_3^2-\alpha_2^2)/4}{2\alpha_2\lambda}} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{0,3} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-\lambda^2+\alpha_3\lambda-(\alpha_3^2-\alpha_2^2)/4}{2\alpha_3\lambda}} \\ -e^{-i\chi}\sqrt{\frac{\lambda^2+\alpha_3\lambda+(\alpha_3^2-\alpha_2^2)/4}{2\alpha_3\lambda}} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{0,4} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda^2+\alpha_4\lambda+(\alpha_4^2-\alpha_1^2)/4}{2\alpha_4\lambda}} \\ -\sqrt{\frac{-\lambda^2+\alpha_4\lambda-(\alpha_4^2-\alpha_1^2)/4}{2\alpha_4\lambda}} \end{bmatrix}.$$

$$0 < (\alpha_4-\alpha_1)/2 \le \lambda \le \min\left((\alpha_2+\alpha_3)/2,\, (\alpha_1+\alpha_4)/2\right), \quad -\pi < \chi \le \pi.$$

Напомним, что ортопроекторы P_i восстанавливаются по формулам $P_i = \Gamma_{0i} \cdot \Gamma_{0i}^*$, $i = \overline{1,4}$.

Таким образом, неразложимые регулярные локально-скалярные (не обязательно нормированные) представления графа $\widetilde{D}_4$ зависят от 6 действительных параметров (4-х из 5-ти параметров α_1', α_2', α_3', α_4', α_0', связанных соотношением $\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' = 2\alpha_0'$, $\alpha_i = \frac{\alpha_i'}{\alpha_0'}$, и параметров λ и χ).

Литература

1. A. V. Roiter, *Matrix Problems.* Proc. Intern. Congress Math., Helsinki (1978), 319–322.
2. P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen.* I. — *Manuscripta Math.* **6** (1972), 71–103.
3. Л. А. Назарова, *Представления колчанов бесконечного типа.* — Изв. АН СССР, Сер. Мат. **37** (1973), 752–791.
4. С. А. Кругляк, А. В. Ройтер, *Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств.* — Функц. анализ и прил. **39**, No. 2 (2005), 13–30.
5. A. V. Roiter, S. A. Kruglyak, and L. A. Nazarova, Matrix Problems in Hilbert Spaces. http://arxiv.org/math.RT/0605728
6. А. В. Ройтер, *Боксы с инволюцией.* — В кн.: *Представления и квадратичные формы.* **155**, АН УССР, Инст. мат., Киев (1979), 124–126.

7. И. К. Редчук, А. В. Ройтер, *Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции.* — Укр. мат. журн. **56**, No. 6 (2004), 796–809.
8. Ю. Н. Беспалов, *Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями.* — Укр. мат. журн. **44**, No. 3 (1992), 269–277.
9. V. Ostrovskyi and Yu. Samoilenko. *Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras.* I. *Representations by bounded operators.* Reviews in Mathematics and Mathematical Physics, 11, pt.1. Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1999. iv+261 pp. ISBN: 90-5823-042-2
10. Д. В. Галинский, С. А. Кругляк, *Представления $*$-алгебр, порожденных линейно связанными ортопроекторами.* — (На украинском языке). Вестн. Киевского ун-та, Сер. физ.-мат. наук, No. 2 (1999), 24–31.
11. D. V. Galinsky, *Representations of $*$-algebras generated by orthogonal projections satisfying a linear relation.* — Methods Funct. Anal. Topology **4** (1998), No. 3, 27–32.
12. D. V. Galinsky, M. A. Muratov, *On representations of algebras generated by sets of three and four orthoprojections.* — Spectral and evolutionary problems, Vol. 8 (Sevastopol, 1997), 15–22, Tavria Publ., Simferopol, 1998.
13. С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, *О суммах проекторов.* — Функ. анализ прил. **36**, вып. 3 (2002), 20–35.
14. S. Kruglyak, A. Kyrychenko, *On four orthogonal projections that satisfy the linear relation $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = I$, $\alpha_i > 0$.* Symmetry in nonlinear mathematical physics, Part 1, 2 (Kyiv, 2001), Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., 43, Part 1, 2, Natsional. Akad. Nauk Ukrai"ni, Inst. Mat., Kiev (2002), 461–465.
15. A. Strelets, *Description of the representations of the algebras generated by four linearly related idempotents.* — J. Algebra Appl. **4**, No. 6 (2005), 671–681.
16. S. Kruglyak, S. Popovich, Yu. Samoilenko. *The spectral problem and $*$-representations of algebras associated with Dynkin graphs.* — J. Algebra Appl. 4, No. 6 (2005), 761–776.
17. S. A. Kruglyak, *Coxeter functors for a certain class of $*$-quivers and $*$-algebras.* — Methods Funct. Anal. Topology **8**, No. 4 (2002), 49–57.
18. M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space.* — Adv. Math. **201**, No. 2 (2006), 263–317.
19. I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space.* – in: Hilbert space operators and operator algebras. Proc. Internat. Conf., Tihany (1970), 163–237. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 5, North-Holland, Amsterdam (1972).
20. S. Brenner, *Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces.* — J. Algebra **6** (1967), 100–114.
21. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, *Представления частично упорядоченных множеств.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР **28** (1972), 5–31.

Kruglyak S. A., Nazarova L. A., Roiter A. V. Orthoscalar representations of quivers in the category of Hilbert spaces.

As it is known, finitely presented quivers correspond to Dynkin graphs (Gabriel, 1972) and tame quivers — to extended Dynkin graphs (Dono-

van and Freislich, Nazarova, 1973). In the article "Locally scalar representations of graphs in the category of Hilberts spaces" (Func. Anal. and Apps., 2005) authors showed the way to transfere these results to Hilbert spaces, constructed Coxeter functors and proved an analogue of Gabriel theorem for locally scalar representations (up to the unitary equivalence).

The category of locally scalar representations of a quiver can be considered as a subcategory in the category of all representations (over the field $\mathbb{C}$). In the present paper we study the connection between indecomposability of locally scalar representations in the subcategory and in the category of all representations (it is proved that for wide enough class of quivers indecomposability in the subcategory implies indecomposability in the category).

For a quiver, corresponding to extended Dynkin graph $\widetilde{D}_4$ locally scalar representations which cannot be obtained from the simplest by Coxeter functors (regular representations) are classified.

Институт математики
Национальной академии наук Украины,
Киев, Украина
E-mail: red@imath.kiev.ua

Поступило 4 декабря 2006 г.