Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

ОБ УНИВЕРСАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧАХ ПОГРУЖЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ЯДРОМ

В настоящей работе мы завершаем изучение универсально разрешимых задач погружения с циклическим ядром, которой посвящены работы [1–3]. Напомним формулировку этой задачи. Пусть

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1. \tag{1}$$

точная последовательность конечных групп. Говорят, что она определяет универсально разрешимую задачу погружения, если задача погружения, связанная с этой последовательностью, разрешима для любого расширения Галуа K/k с группой F, причем в качестве K можно брать и алгебру Галуа. В работе [1] было показано, что класс универсально разрешимых задач с циклическим ядром простого порядка совпадает с классом полупрямых задач. Аналогичные результаты для циклической группы нечетного порядка и порядка 8 были доказаны в работах [2, 3]. В настоящей работе мы доказываем этот результат в случае произвольной циклической 2-группы.

Этим рассмотрение универсально разрешимых задач погружения с циклическим ядром завершается (напомним, что при абелевом ядре задача всегда редуцируется к p-группам).

Отличие рассмотрения случая циклического ядра нечетного порядка и циклической 2-группы состоит в том, что полная группа автоморфизмов циклической 2-группы не является циклической. Когда группа F действует на ядре A как циклическая группа, это отличие отсутствует. Поэтому мы вправе считать, что группа F действует на A как группа с двумя образующими. Мы считаем также, что F действует на ядре как полная группа автоморфизмов, поскольку иное не вызывает никаких принципиальных отличий.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 06-01-00741а.

1°. Пусть A – циклическая группа порядка 2^n с образующим элементом a; как сказано выше, мы считаем что группа F действует на A как полная группа автоморфизмов. Пусть F_1 – подгруппа в F, состоящая из элементов, действующих на A тривиально, тогда $F_0 = F/F_1$ является абелевой группой с образующими σ_0 и τ_0, причем действие группы F_0 на A задается формулами $a^{\tau_0} = a^{-1}$ и $a^{\sigma_0} = a^5$. Таким образом, τ_0 имеет порядок два, а σ_0 – порядок 2^{n-2}. Обозначим через σ и τ некоторые прообразы в группе F элементов σ_0 и τ_0 соответственно.

2°. Рассмотрим сначала случай, когда группа F имеет более двух образующих.

Теорема 1. *Класс универсально разрешимых задач погружения, связанный с точной последовательностью* (1), *является классом полупрямых задач, если группа F имеет более двух образующих.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Рассмотрим минимальный контрпример, т.е. задачу погружения, связанную с точной последовательностью (1), которая не является полупрямым расширением, но для которой любая сопутствующая задача является уже полупрямой задачей.

Будем считать, что группа F имеет образующие σ, τ, $\omega_1, \ldots, \omega_m$, причем $\omega_1, \ldots, \omega_m$ выбраны так, что они действуют на ядре A тривиально. Пусть F_2 – подгруппа в F, порожденная коммутаторами $[F, F]$, образующими $\omega_2, \ldots, \omega_m$ и степенями $\sigma^{2^{n-2}}$, τ^2 и ω_1^2.

Обозначим через $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ и $\overline{\omega}_1$ прообразы в группе G элементов σ, τ и ω_1 соответственно. Пусть G_ω – подгруппа индекса 2 в G, не содержащая $\overline{\omega}_1$, тогда G_ω – полупрямое расширение подгруппы A с помощью F_ω, где $F_\omega = \varphi(G_\omega)$. Следовательно, в группе G_ω существует подгруппа $\bar{F}_\omega$, изоморфная F_ω и пересечение которой с ядром A состоит только из единицы.

Пусть $\bar{H}_0$ – подгруппа в $\bar{F}_\omega$, состоящая из элементов, перестановочных с элементами группы A. Покажем, что $\bar{H}_0$ – нормальный делитель в G. Пусть $G_{1\omega}$ – подгруппа индекса 4 в G, не содержащая $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$, кроме того, положим $F_{1\omega} = \varphi(G_{1\omega})$.

Заметим, что элементы $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ и $\overline{\omega}$ действуют в G сопряжением и нам достаточно показать, что $\bar{H}_0$ замкнуто относительно действия рассматриваемых элементов. Заметим, что $\bar{H}_0^{\overline{\sigma}} = \bar{H}_0$ и $\bar{H}_0^{\overline{\tau}} = \bar{H}_0$, так как $\bar{H}_0$ – нормальный делитель в группе $\bar{F}_\omega$. Остается показать, что $\bar{H}_0^{\overline{\omega}} = \bar{H}_0$. Предположим противное, и пусть существует $h \in \bar{H}_0$ такой, что $[h, \overline{\omega}] \in \bar{H}_0$. Так как $\overline{\omega}$ действует на a тривиально, то группа $G_{1\omega}$ не является полупрямым расширением A с помощью $F_{1\omega}$, что противоречит выбору расширения G.

Положим $G_2 = G/\bar{H}_0$, тогда $G_2/A = F_1$. Таким образом, мы показали, что класс когомологий $f \in H^2(F, A)$ является подъемом класса $f_2 \in H^2(F_2, A)$ и задача погружения, связанная с точной последовательностью (1), в нашем случае является подъемом задачи погружения, связанной с точной последовательностью

$$1 \to A \to G_2 \to F_2 \to 1.$$

Напомним, что F_2 – абелева группа с образующими σ_1, τ_1, ω_1, причем, $\sigma_1^{2^{n-2}} = 1$, $\tau_1^2 = 1$, $\omega_1^2 = 1$. Обозначим подгруппу в F_2, порожденную σ_1, через F_σ. Тогда группы когомологий $H^1(F_\sigma, A)$ и $H^2(F_\sigma, A)$ нулевые, и из точной последовательности Хохшильда–Серра

$$H^1(F_\sigma, A) \to H^2(F_2/F_\sigma, F^{F_\sigma}) \xrightarrow{\lambda} H^2(F_2, A) \to H^2(F_\sigma, A)$$

следует, что гомоморфизм подъема λ является изоморфизмом. Полагая $F_2/F_\sigma = F_3$ и $G_3 = G_2/F_\sigma$, мы получаем, что класс $f \in H^2(F, A)$ является подъемом некоторого класса $f_3 \in H^2(F_3, A^{F_\sigma})$.

Пусть τ_2, ω_2 – образующие группы F_3 и a_0 – элемент порядка 2 в группе A^{F_σ}. Группа $H^2(F_3, A^{F_\sigma})$ является группой Клейна. Расширения $1 \to A^{F_\sigma} \to H_2 \xrightarrow{\psi_2} F_2 \to 1$ и $1 \to A^{F_\sigma} \to H_3 \xrightarrow{\psi_3} F_3 \to 1$, соответствующие образующим группы $H^2(F_3, A^{F_\sigma})$, задаются равенствами $\overline{\tau}_2^2 = a_0$, $\overline{\omega}_2^2 = 1$, $[\overline{\tau}_2, \overline{\omega}_2] = 1$ для группы H_2 и равенствами $\overline{\tau}_2^2 = 1$, $\overline{\omega}_2^2 = 1$, $[\overline{\tau}_2, \overline{\omega}_2] = a_0$ для группы H_3, где $\overline{\tau}_2$, $\overline{\omega}_2$ – прообразы τ_2 и ω_2 соответственно.

Выберем теперь расширение k_3/k с группой F_3, которое не погружается в расширение с группой G_3. Пусть k – локальное поле с полем вычетов порядка 2, не содержащее $\sqrt{-1}$ и имеющее достаточно высокую нечетную степень над $\mathbb{Q}_2$ (полем 2-адических чисел). Если класс когомологий f_3 соответствует группе H_2, то в качестве k_3 можно выбрать поле $k(\sqrt{-1}, \sqrt{d})$, где $d \in k^*$ и символ Гильберта $(-1, d)$ равен единице, причем $(\sqrt{-1})^{\sigma_2} = -\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^{\tau_2} = \sqrt{-1}$, $(\sqrt{d})^{\sigma_2} = \sqrt{d}$, $(\sqrt{d})^{\tau_2} = -\sqrt{d}$. При другом значении класса f_3 в качестве k_3 возьмем поле $k(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, где d_1, $d_2 \neq -1$ и символ Гильберта $(d_1, d_2) = -1$. Тогда условие разрешимости задачи $(k_3/k, G_3, A^{F_\sigma})$ в зависимости от значения класса f_3 состоит в распадении либо алгебры кватернионов $[-1,-1]$, либо алгебры кватернионов $[d_1, d_2]$ над полем k. Таким образом, обе рассматриваемые алгебры не распадаются, и следовательно, задача погружения $(k_3/k, G_3, A^{F_\sigma})$ неразрешима. Заметим, что любая сопутствующая брауэровская задача для задачи погружения $(k_3/k, G, \alpha)$, где α – гомоморфизм $G \to F_2$, кроме соответствующей расширению G_3, разрешима, следовательно, последняя задача также разрешима (см. [6], гл. IV, §2). Таким образом, для решения K задачи $(k_3/k, G, \alpha)$, задача погружения $(k/k, G, \varphi)$ будет неразрешимой, что противоречит универсальной разрешимости для расширения G. Теорема доказана.

3°. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда группа F в расширении (1) имеет две образующие σ и τ. В этом случае, рассматривая расширения k/k, связанные с точной последовательностью (1), мы будем предполагать, что, во-первых, поле k является локальным, не содержащим корней из 1 степени 2^n, кроме ± 1, и во-вторых, подгруппе F_1 группы F, действующей тривиально на ядро A, соответствует круговое подполе $k_0 \subset k$, причем, $\xi^\sigma = \xi^\tau$ и $\xi^\tau = \xi^{-1}$, где ξ – первообразный корень степени 2^n из единицы.

Теорема 2. *Класс универсально разрешимых задач погружения, связанных с точной последовательностью* (1), *является классом полупрямых задач погружения в случае, когда группа F имеет две образующие.*

Доказательство. Докажем наше утверждение от противного, предполагая, что существует универсально разрешимая задача погружения, рассматривается в более узком классе полей, указанном выше, для которой расширение (1) не является полупрямым. Будем предполагать, что этот пример является минимальным, т.е. любая сопутствующая ему задача является уже полупрямой.

Напомним, что F_1 – это подгруппа в F, состоящая из элементов, действующих тривиально на ядро A. При доказательстве теоремы мы рассмотрим несколько случаев в зависимости от структуры группы F_1.

1. Будем предполагать, что F_1 либо единичная группа, либо группа периода 2, причем группа F является центральным рас-

ширением подгруппы F_1 с помощью F_0. Пусть $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ – прообразы в G элементов σ и τ соответственно. Заметим, что в группе G существует подгруппа $\bar{F}_1$, изоморфная F_1, и кроме того, $\bar{F}_1 \cap A = 1$. Покажем, что $\bar{F}_1$ – нормальный делитель в G.

Пусть $b \in \bar{F}_1$ и $b^{\overline{\sigma}} = ba_0$, где a_0 – элемент порядка 2 в A. Тогда подгруппа G_τ индекса 2 в G не является полупрямым произведением группы $F_\tau = \varphi(G_\tau)$ и A. Аналогично показывается, что невозможно равенство $b^{\overline{\tau}} = ba_0$, т.е. $\bar{F}_1$ – нормальный делитель в G. Таким образом, в рассматриваемом случае класс когомологий $f \in H^2(F, A)$ является подъемом некоторого класса $f_0 \in H^2(F_0, A)$. Доказательство утверждения теоремы в этом случае заканчивается аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.

2. Пусть теперь группа F_1 – абелева 2-группа, причем F не является центральным расширением F_1 с помощью F_0. Пусть C_1 – подгруппа в F_1, состоящая из элементов порядка 2, лежащих в ее центре, а $\bar{C}_2$ – подгруппа в F_1/C_1, состоящая из элементов порядка 2, лежащих в ее центре. Обозначим через C_2 полный прообраз в F_1 подгруппы $\bar{C}_2$ относительно гомоморфизма $F_1 \to F_1/C_1$. Тогда в группе C_2 существует некоторый элемент c, для которого выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: $[c, \sigma] \neq 1$, $[c, \tau] \neq 1$, $c^2 \neq 1$. Обозначим через c_1 один из неединичных автоморфизмов $[c, \tau], [c, \sigma]$ или c^2. Заметим, что c_1 – элемент порядка 2, содержащийся в C_1. Подгруппа $C_0 = \{1, c_1\}$ является нормальным делителем в группе F. Как и ранее, C_0 является нормальным делителем и в группе G. Пусть $G_1 = G/C_0$ и

$$1 \to A \to G_1 \to F_1 \to 1 \tag{2}$$

– точная последовательность. По индукционному предположению существует расширение K_1/k локальных полей с группой Галуа F_1, для которого задача погружения (2) неразрешима. Вообще говоря, расширение K_1/k может не погружаться в расширение Галуа с группой F. Заменим поле K_1 на такое поле, для которого, во-первых, осталась бы неразрешимой задача погружения (2) и, во-вторых, оно погружалось бы в поле с группой Галуа F.

Рассмотрим в поле K_1 подполе K_2, инвариантное относительно автоморфизмов $c, [c, \sigma]$ и $[c, \tau]$. Пусть $K_3 = K_2(\sqrt{\mu})$ – подполе в K_1, инвариантное относительно автоморфизмов $[c, \sigma]$ и $[c, \tau]$. Напомним, что c_1 – это один из неединичных автоморфизмов

$[c,\tau]$, $[c,\sigma]$ или c^2. Выберем $m \in k^*$ в зависимости от значения c_1. Если $c_1 = c^2$ или $c_1 = [c,\tau]$, то выберем m так, чтобы символ Гильберта $(m,-1)$ равнялся -1, но символ $(m,2)$ был бы равен 1. Если $c_1 = [c,\sigma]$, то символ $(m,2)$ должен быть равен -1, а символ $(m,-1)$ равен единице. Заменим поле $K_3 = K_2(\sqrt{\mu})$ на $K_3' = K_2(\sqrt{\mu m})$. Погружение поля K_3' в поле с группой F – это центральная задача погружения, ядро которой порождено элементами c^2, $[c,\tau]$ и $[c,\sigma]$ и при указанном выборе элемента m она разрешима. Кроме того, получившееся решение K наследует неразрешимость задачи погружения (1).

3. Рассмотрим теперь общий случай, когда группа F_1 имеет произвольную структуру, т.е. будем считать, что ее коммутант $[F_1,F_1]$ не равен единице. Заметим, что если $[F_1,F_1]$ имеет период 2 и лежит в центре группы F_1, то рассуждения проводятся аналогично предыдущему случаю.

Иначе, можно дать непосредственное доказательство нашего утверждения. Действительно, пусть D_1 – центр порядка 2 группы $[F_1,F_1]$ и $\bar{D}_2$ – центр порядка 2 группы $[F_1,F_1]/D_1$. Пусть D_2 – полный прообраз $\bar{D}_2$ относительно гомоморфизма $[F_1,F_1] \to [F_1,F_1]/D_1$. Заметим, что гомоморфизм подъема $H^2(F/[F_1,F_1],A) \to H^2(F,A)$ является изоморфизмом, следовательно, класс $f \in H^2(F,A)$, соответствующий расширению G, является подъемом некоторого класса $\bar{f} \in H^2(F/[F_1,F_1],A)$. Факторизуя F по подгруппе D_1, мы можем воспользоваться индукционным предположением, т.е. считать, что существует локальное расширение $\bar{K}$ с группой Галуа F/D_1, для которого рассматриваемая задача является неразрешимой. Далее нам остается изменить $\bar{K}$ так, чтобы оно погружалось бы в расширение с группой F. Пусть $\bar{K}_1$ – подполе поля $\bar{K}$, принадлежащее подгруппе $\bar{D}_2$. Рассмотрим задачу погружения $(\bar{K}_1/k,F,D_2)$ локальных полей. Условием ее разрешимости является разрешимость всех сопутствующих брауэровских задач, что эквивалентно разрешимости задачи $(\bar{K}_1/k,F/D_1,\bar{D}_2)$. Но последняя задача разрешима и поле $\bar{K}$ является ее решением, следовательно, разрешима и задача $(\bar{K}_1/k,F,D_2)$. Теорема доказана.

Литература

1. Б. Б. Лурье, *О универсально разрешимых задачах погружения.* — Труды МИАН, **(183)** (1990), 121–126.

2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсально разрешимая задача погружения с циклическим ядром.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **265** (1999), 189–197.
3. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсальная задача погружения с циклическим ядром порядка* 8. — Зап. научн. сем. ПОМИ, **281** (2001), 210–220.
4. J.-P. Serre, *Cohomologie négligeable*, Algébre et geometrie, Resume des Cours et Travaux Rarùs. College de France, 1993–94.
5. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа.* М., Мир. 1968. 208 с.
6. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* М. Наука, 1990, 270 с.

Ishkhanov V. V. and Lur'e B. B. On universally solvable embedding problems with cyclic kernel.

It is proved that the universally solvable imbedding problem with cyclic kernel is semidirect.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 ноября 2006 г.