Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

Е. В. Дыбкова

НАДГРУППЫ ДИАГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЕ НАД ПРОСТЫМ АРТИНОВЫМ КОЛЬЦОМ. I

В ряде работ мы рассматривали подгруппы классических линейных групп, объединяемых понятием гиперболической унитарной группы. В [9, 10, 12, 13] нам удалось показать, что если такие группы рассматриваются над телом, удовлетворяющим нескольким естественным ограничениям, то решетка подгрупп гиперболической унитарной группы, содержащих все диагональные матрицы, может быть описана примерно в тех же терминах, в каких для алгебраически замкнутого поля А. Борель и Ж. Титс в [4] описали подгруппы редуктивных групп, содержащие расщепимый максимальный тор, а З. И. Боревич в [1] описал надгруппы диагональной группы в полной линейной группе над любым полем, имеющим не менее 7 элементов. Позднее результат Боревича был в [2] перенесен на широкий класс полулокальных колец, а затем это обобщение было существенно усилено Н. А. Вавиловым в [5] – там было установлено, в частности, что решетка надгрупп диагональной группы над простым артиновым кольцом допускает стандартное описание, если это кольцо отлично от кольца квадратных матриц второго порядка над полем из двух элементов.

В представляемой работе мы доказываем, что в духе наших предыдущих результатов из [9, 10, 12, 13] могут быть описаны наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы над большинством простых артиновых колец. Рассматриваемая задача примыкает к работам [14, 15, 6, 3], где описывались подгруппы полной линейной группы, содержащие все клеточно-диагональные матрицы фиксированного строения.

1. Гиперболическая унитарная группа. Начнем с того, что коротко напомним определение групп, о которых идет речь; в используемом здесь виде это определение впервые появилось в работах Э. Бака [16, 17]. Относительно подробностей, с которыми связаны упоминаемые ниже факты, сошлемся на монографию А. Хана и О. Т. О'Миры [19], а также статьи [18, 8, 11].

В основе определения гиперболической унитарной группы лежат понятия форменного параметра и форменного кольца. Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо с 1, на котором действует антиавтоморфизм $\widehat{\ }$. Условимся называть этот антиавтоморфизм *обобщенной инволюцией*, если для некоторого обратимого λ из R, удовлетворяющего условию $\widehat{\lambda}\lambda = 1$, квадрат нашего антиавтоморфизма является внутренним автоморфизмом R, задаваемым λ, то есть $\hat{\hat{\alpha}} = \lambda\alpha\lambda^{-1}$ при всех $\alpha \in R$. Соответствующий элемент λ мы фиксируем, называя его в дальнейшем *определяющим скаляром* для данной обобщенной инволюции (следует отметить, что первоначально Бак брал центральный λ; относительно более общей ситуации, рассматривавшейся в работах С. Т. С. Уолла, см. монографию [19]). Пара $(\widehat{\ }, \lambda)$ определяет в кольце R две аддитивные группы

$$\Lambda^{\min} = \{\alpha - \widehat{\alpha}\lambda \mid \alpha \in R\} \quad \text{и} \quad \Lambda^{\mathrm{Max}} = \{\alpha \in R \mid \alpha = -\widehat{\alpha}\lambda\},$$

первая из которых содержится во второй: $\Lambda^{\min} \leqslant \Lambda^{\mathrm{Max}}$. Лежащая между ними подгруппа Λ называется *форменным параметром* кольца R, если $\widehat{\alpha}\Lambda\alpha \leqslant \Lambda$ для любого $\alpha \in R$, а *форменное кольцо над* R – это пара (R, Λ). Естественным образом определяется *изоморфизм* форменных колец: если (R_1, Λ_1) – форменное кольцо над R_1, соответствующее обобщенной инволюции $\widehat{\ }$ с определяющим скаляром λ_1, а (R_2, Λ_2) – форменное кольцо над R_2, соответствующее обобщенной инволюции $\widetilde{\ }$ с определяющим скаляром λ_2, то изоморфизм (R_1, Λ_1) на (R_2, Λ_2) – это кольцевой изоморфизм $\phi : R_1 \to R_2$, для которого $\widetilde{\phi(\alpha)} = \phi(\widehat{\alpha})$ при любом $\alpha \in R_1$, $\phi(\lambda_1) = \lambda_2$ и $\phi(\Lambda_1) = \Lambda_2$.

Сами подгруппы $\Lambda^{\min}$ и Λ^{Max} являются форменными параметрами – минимальным и максимальным, соответственно. Полностью множество форменных параметров можно описать в терминах $\Lambda^{\mathrm{Max}}/\Lambda^{\min}$: если на этой факторгруппе ввести структуру правого R-модуля, положив

$$\left(\alpha + \Lambda^{\min}\right)\beta = \widehat{\beta}\alpha\beta + \Lambda^{\min},$$

то множество всех форменных параметров нашего кольца окажется в биективном соответствии с множеством всех подмодулей такого модуля. Добавим к этому, что в некоторых ситуациях форменный параметр определяется обобщенной инволюцией и элементом λ однозначно: например, это так, если в центре $Z(R)$ кольца R существует такой элемент ν, что сумма $\nu+\widehat{\nu}$ обратима; в частности, форменный параметр определен однозначно, если 2 – обратимый элемент кольца R.

Как уже было сказано, определение форменного параметра жестко связано с обобщенной инволюцией и определяющим скаляром. Укажем в этом контексте на стандартный прием, позволяющий переходить к новой обобщенной инволюции и *почти не меняющий* форменный параметр: если Λ – форменный параметр, связанный с обобщенной инволюцией $\widehat{\ }$ и определяющим скаляром λ, а β – обратимый элемент кольца R, то равенство $\widetilde{\alpha} = \beta\widehat{\alpha}\beta^{-1}$ задает на нашем кольце новую обобщенную инволюцию $\widetilde{\ }$ с определяющим скаляром $\lambda' = \beta\widehat{\beta}^{-1}\lambda$, относительно которых аддитивная группа $\Lambda' = \beta\Lambda$ является форменным параметром. Следуя [19], в этой ситуации мы будем говорить, что форменное кольцо (R,Λ') получено из (R,Λ) *скэйлингом при помощи* β. В частном случае, когда R – тело, скэйлинг позволяет перейти к форменному кольцу, у которого форменный параметр либо равен 0, либо содержит 1, – соответствующее форменное кольцо принято называть *нормализованным*. Отметим, что нормализованное форменное кольцо над телом соответствует обычной инволюции, т.е. антиавтоморфизму с тождественным квадратом, а ее определяющий скаляр – это 1 или -1.

Вернемся к обобщенной инволюции $\widehat{\ }$ и форменному кольцу (R,Λ) над произвольным R. Гиперболическую унитарную группу над форменным кольцом мы определяем в матричных терминах, используя при этом следующие обозначения. Для натурального числа n строки и столбцы квадратной матрицы $a=(a_{ij})$ четного порядка $2n$ мы индексируем множеством

$$\Omega = \{1,2,\dots,n,-n,\dots,-2,-1\},$$

обозначая через $\varepsilon(i)$ знак индекса i : $\varepsilon(i)=1$ при $i>0$ и $\varepsilon(i)=-1$ при $i<0$. Если матрица a обратима, то под a'_{ij} понимается элемент матрицы a^{-1}, стоящий на позиции (ij), а под $S_{i,-i}(a)$ – *i-ая характеристическая сумма матрицы* a:

$$S_{i,-i}(a) = \sum_{l>0} a_{il}a'_{l,-i}.$$

Наконец, для каждого индекса i из Ω символом Λ_i обозначается аддитивная группа

$$\Lambda_i = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}}\Lambda = \begin{cases} \Lambda & \text{при } i < 0 \quad \text{и} \\ \lambda^{-1}\Lambda & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

С учетом этих обозначений *гиперболическую унитарную группу* $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ *степени* $2n$ *над форменным кольцом* (R, Λ) можно определить как подгруппу полной линейной группы $\mathrm{GL}(2n, R)$, состоящую в точности из всех тех матриц a, для которых при всех индексах выполняются условия

$$a'_{ij} = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}}\widehat{a}_{-j,-i}\lambda^{\frac{\varepsilon(j)+1}{2}} \quad \text{и} \quad S_{i,-i}(a) \in \Lambda_i.$$

Следует уточнить, что второе из упомянутых условий существенно только в том случае, когда форменный параметр Λ отличен от максимального. Заметим также, что при скэйлинге форменного кольца новая гиперболическая унитарная группа оказывается сопряженной в группе $\mathrm{GL}(2n, R)$ со старой, а в качестве сопрягающей матрицы можно взять диагональную:

$$\mathrm{U}(2n, R, \beta\Lambda) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \beta e \end{pmatrix} \mathrm{U}(2n, R, \Lambda) \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \beta^{-1} e \end{pmatrix}$$

(здесь и далее под e понимается единичная матрица соответствующего порядка).

Мы ставим перед собой задачу описания надгрупп группы $\Delta(2n, R, \Lambda)$ диагональных матриц, содержащихся в гиперболической унитарной группе $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Группа $\Delta(2n, R, \Lambda)$ порождается *элементарными диагональными унитарными матрицами*

$$D_i(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ii} + \lambda^{\frac{\varepsilon(i)-1}{2}}\left(\widehat{\theta} - 1\right)\lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}}e_{-i,-i} \qquad \text{при обратимых } \theta \text{ из } R$$

(через e_{ij} обозначена матрица с 1 на позиции (ij) и нулями в остальных местах); понятно, что такие матрицы не зависят от форменного параметра нашего форменного кольца (они описываются только обобщенной инволюцией и ее определяющим скаляром), так что присутствие Λ в обозначении диагональной группы в известном смысле излишне.

Далее в этой работе мы будем говорить и о простейших унипотентных матрицах, содержащихся в $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, называя их *унитарными трансвекциями*: это матрицы

$$T_{i,-i}(\alpha) = e + \alpha e_{i,-i} \quad \text{при } \alpha \in \Lambda_i$$

– их мы называем *унитарными трансвекциями длинного корневого типа*, заимствуя терминологию групп Шевалле, – и для $i \neq \pm j$ матрицы

$$T_{ij}(\beta) = e + \beta e_{ij} - \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-1}{2}} \widehat{\beta} \lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} e_{-j,-i} \quad \text{при} \quad \beta \in R$$

– *унитарные трансвекции короткого корневого типа*. Заметим в заключение этого раздела работы, что при скэйлинге форменного кольца элементарные диагональные матрицы переходят в элементарные диагональные, а унитарные трансвекции – в унитарные трансвекции (того же типа).

2. Форменные сети и соответствующие им подгруппы. Напомним (см. [1]), что квадратная матрица $\sigma = (\sigma_{ij})$ из m^2 идеалов кольца R называется *сетью идеалов порядка* m в данном кольце, если при любых индексах имеют место включения $\sigma_{ij}\sigma_{jk} \leqslant \sigma_{ik}$. С таким образом описанной матрицей из идеалов З. И. Боревич связал *сетевую подгруппу* $\mathrm{G}(\sigma)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(m, R)$. В общем случае определение этой подгруппы сложнее, но для многих хороших колец (в частности, для всех полулокальных) $\mathrm{G}(\sigma)$ состоит из матриц, сравнимых с единичной по модулю данной сети: $a \in \mathrm{G}(\sigma)$, если $a_{ij} - \delta_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех индексах (как обычно, δ_{ij} – символ Кронекера). Если $m = 2n$ и (R, Λ) – произвольное форменное кольцо над R, то можно говорить о пересечении $\mathrm{U}(\sigma) = \mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ – *сетевой подгруппе гиперболической унитарной группы*. Как мы показали в [10, 13], если обобщенная инволюция не определяет однозначно форменный параметр кольца, то важную роль для описания решетки подгрупп $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ играют некоторые подгруппы сетевой группы $\mathrm{U}(\sigma)$, которые в [8] мы назвали форменными сетевыми. Такие подгруппы, описание которых мы сейчас приведем, являются естественным обобщением рассмотренных Э. Баком в [17] нормальных подгрупп гиперболической унитарной группы, соответствующих форменным идеалам форменного кольца. Отметим, что хотя в [8] и последующих наших статьях 2002–2005 гг. определения форменной сети и соответствующей ей подгруппы давались только в предположении центральности определяющего скаляра, такие определения легко переформулировать в более общей ситуации, что мы и сделаем здесь.

Каждая сетевая подгруппа гиперболической унитарной группы соответствует сети, идеалы которой удовлетворяют равенствам $\sigma_{ij} = \widehat{\sigma_{-j,-i}}$ при всех индексах, – такие сети мы назвали *унитарными*. Взяв произвольную унитарную сеть σ, свяжем с каждым индексом i две аддитивные группы

$$\Gamma_i^{\min} = \left\{\alpha - \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}}\widehat{\alpha}\lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\right\} \quad \text{и} \quad \Gamma_i^{\mathrm{Max}} = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i$$

– легко проверяется, что первая из них содержится во второй. Столбец

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_{-1} \end{pmatrix}$$

из $2n$ подгрупп аддитивной группы кольца R мы назвали *набором форменных сетевых параметров сети* σ, если для любых индексов справедливы включения

$$\Gamma_i^{\min} \leqslant \Gamma_i \leqslant \Gamma_i^{\mathrm{Max}} \;\; \text{и} \;\; \alpha\Gamma_j\lambda^{\frac{\varepsilon(j)-1}{2}}\widehat{\alpha}\lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} \leqslant \Gamma_i \;\; \text{при всех} \;\; \alpha \in \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Приведя это определение, следует сразу оговориться, что во многих ситуациях данной унитарной сети можно сопоставить ровно один набор ее форменных сетевых параметров: например, это так, если обобщенная инволюция однозначно определяет форменный параметр кольца R. В частности, одной унитарной сети могут соответствовать несколько различных наборов Γ только в том случае, когда 2 не имеет обратного в данном кольце.

Пара (σ, Γ) (мы назвали такую пару *форменной сетью*) определяет в группе $\mathrm{U}(\sigma)$ подгруппу

$$\mathrm{U}(\sigma, \Gamma) = \{a \in \mathrm{U}(\sigma) \mid S_{i,-i}(a) \in \Gamma_i \quad \text{при каждом индексе} \quad i\}$$

– *форменную сетевую подгруппу форменной сети* (σ, Γ) (именно эта подгруппа и является обобщением баковской подгруппы, соответствующей форменному идеалу кольца). И вновь сделаем замечание, аналогичное приведенному выше: во многих случаях подгруппа $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$ совпадает с $\mathrm{U}(\sigma)$ – например, если в нашем кольце 2 является обратимым элементом.

В наших предыдущих работах (как и в работах З. И. Боревича) использовались преимущественно *D-сети*, то есть сети с единичными идеалами на главной диагонали, а также форменные D-сети. Более того, мы ограничивались рассмотрением форменных D-сетей, для которых побочная диагональ σ определяется остальными идеалами и форменными сетевыми параметрами: понимая под $\langle\Gamma_i\rangle$ идеал, порожденный Γ_i, мы назвали форменную D-сеть *точной*, если $\sigma_{i,-i}=\sum\limits_{k\neq\pm i}\sigma_{ik}\sigma_{k,-i}+\langle\Gamma_i\rangle$ для любого индекса i.

С каждой форменной D-сетью мы связываем еще две подгруппы, которые могут быть несколько меньше группы $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$, но описываются достаточно простой системой образующих. Первая из них – это *элементарная форменная сетевая подгруппа* $\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)$, порожденная содержащимися в $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$ унитарными трансвекциями обоих типов:

$$\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)=\langle T_{ij}(\alpha),T_{i,-i}(\beta)\mid j\neq\pm i,\ \alpha\in\sigma_{ij},\ \beta\in\Gamma_i\rangle\,.$$

Другая подгруппа, которую мы называем *надэлементарной форменной сетевой*, получается присоединением к $\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)$ диагональных матриц:

$$\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)=\Delta(2n,R,\Lambda)\cdot\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma).$$

Следует отметить, что форменные D-сети и подгруппы $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$, $\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)$ и $\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)$ хорошо ведут себя при скэйлинге форменного кольца в следующем смысле: если скэйлинг проведен при помощи β, то при $\Gamma_i'=\beta^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}}\Gamma_i\beta^{-\frac{1+\varepsilon(i)}{2}}$ пара (σ,Γ') – форменная D-сеть над $(R,\beta\Lambda)$, причем в новой гиперболической унитарной группе мы имеем

$$\mathrm{U}(\sigma,\Gamma')=\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta e\end{pmatrix}\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta^{-1}e\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma')=\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta e\end{pmatrix}\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta^{-1}e\end{pmatrix}\qquad\text{и}$$

$$\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma')=\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta e\end{pmatrix}\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)\begin{pmatrix}e&0\\0&\beta^{-1}e\end{pmatrix}.$$

Этот раздел работы мы закончим формулировкой ранее полученного нами результата по описанию надгрупп диагональной группы в случае, когда в качестве R берется некоторое тело. Поясним, что через $N_U(\sigma,\Gamma)$ обозначен нормализатор группы $U(\sigma,\Gamma)$ в $U(2n,R,\Lambda)$, а под $\mathbb{F}_q$ понимается конечное поле из q элементов.

Теорема 1. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо над телом R, удовлетворяющее следующим ограничениям:*

(1) *R отлично от полей $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_5$ при $\Lambda = 0$,*

(2) *$R \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{11}$ при $\Lambda = R$,*

(3) *$R \neq \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{25}$ при $0 \lneqq \Lambda \lneqq R$.*

Тогда для произвольного натурального числа n и для любой наддиагональной подгруппы H группы $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$ существует единственная точная форменная сеть (σ,Γ) порядка $2n$ над форменным кольцом (R,Λ), удовлетворяющая включениям

$$\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma) \leqslant H \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma,\Gamma).$$

Добавим, что ограничения на форменные кольца в условии теоремы существенны: для всех 14 форменных колец, исключенных из рассмотрения, можно указать конкретные надгруппы диагональной группы, не удовлетворяющие сформулированному утверждению.

3. Форменные кольца над простым артиновым кольцом. *Везде далее в этой работе под R понимается простое артиново кольцо.* Теорема Веддербёрна позволяет считать, что R – полное матричное кольцо над телом:

$$R = \mathrm{M}(m,T) \quad \text{для некоторого натурального числа } m \text{ и какого-то тела } T.$$

При этом тело T мы будем считать подкольцом R, отождествляя $\alpha \in T$ с матрицей αe; по понятным причинам мы будем также полагать $m \geqslant 2$.

Хорошо известно (см., например, [7, гл. 2, §5, теорема 8]), как устроены все антиавтоморфизмы кольца R.

Предложение 1. *Для произвольного антиавтоморфизма $\widehat{\ }$ кольца $R = \mathrm{M}(m,T)$ существует такой антиавтоморфизм $\widetilde{\ }$ тела T и такая матрица b из $\mathrm{GL}(m,T)$, что для произвольной матрицы a выполняется равенство*

$$\widehat{a} = b\widetilde{a}^{\,t} b^{-1},$$

где под $\widetilde{a}^{\,t}$ понимается матрица, полученная из a заменой каждого элемента на его образ относительно $\widetilde{\ }$ с последующим транспонированием.

Было бы, конечно, естественно в связи с приведенным описанием как-то выделять антиавтоморфизмы $a \to \widetilde{a}^{\,t}$, соответствующие антиавтоморфизмам тела. Для наших целей, однако, представляется более целесообразным взять за основу несколько иначе описываемые антиавтоморфизмы R. При фиксированном антиавтоморфизме $\widetilde{\ }$ тела T мы будем обозначать через a^* матрицу, получаемую из a заменой a_{ij} на $\widetilde{a_{ij}}$ и последующим отражением относительно *побочной* диагонали; таким образом определяемый антиавтоморфизм $a \to a^*$ мы будем называть *стандартным антиавтоморфизмом R, соответствующим* $\widetilde{\ }$. Для более точного описания связи элементов матриц a и a^* условимся через ${}^{\times}$ обозначать биекцию множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ на себя, при которой

$$i^{\times} = m + 1 - i \quad \text{для всякого} \quad i$$

(отметим, что такая биекция инволютивна: $i^{\times\times} = i$). С учетом этого обозначения элементы наших двух матриц связаны соотношением $a^*_{ij} = \widetilde{a_{j^{\times} i^{\times}}}$. Другими словами, для всех a из R имеет место равенство $a^* = p\,\widetilde{a}^{\,t}\,p$, где p – мономиальная матрица с 1 на побочной диагонали:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным следствием предложения 1 является следующее утверждение.

Предложение 2. *Произвольный антиавтоморфизм кольца R является композицией некоторого стандартного антиавтоморфизма и внутреннего автоморфизма кольца R.*

Надо заметить, что антиавтоморфизм $\widetilde{\ }$ тела T, сопоставляемый предложением 2 антиавтоморфизму $\widehat{\ }$ кольца R, определен однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма тела T – это следует из того, что все стандартные антиавтоморфизмы действуют одинаково на любую матричную единицу e_{ij}. В частности, если T – поле, то антиавтоморфизм $\widetilde{\ }$ сопоставляется антиавтоморфизму $\widehat{\ }$ однозначно и, следовательно, матрица b, для которой $\widehat{a} = ba^* b^{-1}$ при всех $a \in R$, определена однозначно с точностью до обратимого скалярного множителя.

Нас, разумеется, интересуют не просто антиавтоморфизмы кольца R, а его обобщенные инволюции. Мы покажем сейчас, что обобщенные инволюции R тесно связаны с обобщенным инволюциями тела T.

Предложение 3. *Предположим, что для антиавтоморфизма* $\widehat{\ }$ *кольца* R*, антиавтоморфизма* $\widetilde{\ }$ *тела* T *и матрицы* $b \in \mathrm{GL}(m, T)$ *имеет место равенство* $\widehat{a} = ba^* b^{-1}$ *при всех* $a \in R$*. Тогда*

(1) *если* $\widehat{\ }$ *– обобщенная инволюция кольца* R *с определяющим скаляром* l*, то* $\lambda = b^* b^{-1} l$ *– элемент тела* T*, удовлетворяющий равенству* $\widetilde{\lambda}\lambda = 1$*, а антиавтоморфизм* $\widetilde{\ }$ *является обобщенной инволюцией с определяющим скаляром* λ*;*

(2) *если* $\widetilde{\ }$ *– обобщенная инволюция тела* T *с определяющим скаляром* λ*, то* $\widehat{\ }$ *– обобщенная инволюция кольца* R *с определяющим скаляром* $b(b^*)^{-1}\lambda$*.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\ }$ – обобщенная инволюция. Из условия предложения следует, что при всех a из R справедливо равенство

$$\widehat{\widehat{a}} = b(b^{-1})^* a^{**} b^* b^{-1} = lal^{-1},$$

и, следовательно, для $\lambda = b^* b^{-1} l$ мы имеем тождество

$$a^{**} \lambda = \lambda a.$$

Все матричные единицы e_{ij} квадратом стандартного антиавтоморфизма * не меняются, а это в силу леммы 9 из [7, гл. 2, §5] означает, что λ – ненулевой элемент тела T. Для доказательства равенства $\widetilde{\lambda}\lambda = 1$ достаточно воспользоваться условием $\widehat{l}\, l = e$. Ясно, что в таком случае $\widetilde{\ }$ – обобщенная инволюция с определяющим скаляром λ.

Второе утверждение предложения легко проверяется непосредственным вычислением. □

Разобравшись с обобщенными инволюциями, перейдем к обсуждению форменных параметров и форменных колец для простого артинова кольца. Ссылка на скэйлинг позволяет ограничиться рассмотрением стандартных обобщенных инволюций кольца R (матрицу b для стандартной обобщенной инволюции мы всегда будем считать единичной), когда в силу предложения 3 обобщенные инволюции на теле и на матричном кольце имеют один и тот же определяющий скаляр.

Итак, пусть $\tilde{}$ – некоторая обобщенная инволюция на теле T с определяющим скаляром λ и * – соответствующая стандартная обобщенная инволюция на R. Мы покажем сейчас, что между множеством $FP(T)$ форменных параметров тела и множеством $FP(R)$ форменных параметров матричного кольца имеется естественное биективное соответствие.

Предложение 4. *Отображение Ψ_{fp}, сопоставляющее форменному параметру L кольца R множество*

$$\Psi_{\mathrm{fp}}(L) = \{\alpha \in T \mid \alpha e_{ii\mathsf{x}} \in L \text{ для некоторого индекса } i\},$$

является изоморфизмом решетки $FP(R)$ на решетку $FP(T)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\alpha e_{ii\mathsf{x}}$ принадлежит L для *какого-то* индекса i, то $\alpha e_{jj\mathsf{x}}$ принадлежит L для *любого* j – достаточно обратиться к равенству

$$e^*_{i\mathsf{x}j\mathsf{x}}(\alpha e_{ii\mathsf{x}})e_{i\mathsf{x}j\mathsf{x}} = e_{ji}(\alpha e_{ii\mathsf{x}})e_{i\mathsf{x}j\mathsf{x}} = \alpha e_{jj\mathsf{x}}.$$

Поэтому если α принадлежит $\Psi_{\mathrm{fp}}(L)$, то для описанной выше матрицы p мы имеем $\alpha p \in L$. Легко понять, что верно и обратное, то есть $\Psi_{\mathrm{fp}}(L)$ мы можем описать как совокупность тех α, для которых $\alpha p \in L$. Отсюда следует, что $\Psi_{\mathrm{fp}}(L)$ – подгруппа аддитивной группы тела T, причем имеются включения $\Lambda^{\min} \leqslant \Psi_{\mathrm{fp}}(L) \leqslant \Lambda^{\mathrm{Max}}$. Добавим к этому, что если $\alpha p \in \Psi_{\mathrm{fp}}(L)$ и β – произвольный элемент тела T, то L принадлежит произведение

$$(\beta e)^*(\alpha p)(\beta e) = (\widetilde{\beta}\alpha\beta)p,$$

а это значит, что $\Psi_{\mathrm{fp}}(L)$ – форменный параметр тела. Совершенно очевидно, что из $L_1 \leqslant L_2$ следует $\Psi_{\mathrm{fp}}(L_1) \leqslant \Psi_{\mathrm{fp}}(L_2)$. Остается убедиться в сюръективности Ψ_{fp}: несложно проверить, что для произвольного $\Lambda \in FP(T)$ матричное множество

$$L = \left\{a \in R \mid a_{ij} = -\widetilde{a_{j\mathsf{x}i\mathsf{x}}} \cdot \lambda \text{ при всех } i,j \text{ и } a_{ii\mathsf{x}} \in \Lambda \text{ при всех } i\right\}$$

является форменным параметром R, для которого $\Psi_{\mathrm{fp}}(L) = \Lambda$. $\square$

Непосредственным следствием доказанного предложения является следующее утверждение о гиперболических унитарных группах.

Предложение 5. *Предположим, что* (T,Λ) *– форменное кольцо над телом* T *и* $L=\Psi_{\rm fp}^{-1}(\Lambda)$ *для стандартной обобщенной инволюции* *. *Матрица* a *из* $\mathrm{GL}(2n,R)$ *принадлежит группе* $\mathrm{U}(2n,R,L)$ *тогда и только тогда, когда* a *как матрица из* $\mathrm{GL}(2mn,T)$ *принадлежит группе* $\mathrm{U}(2mn,T,\Lambda)$.

В первом разделе работы мы привели определение нормализованного форменного кольца над телом – напомним, что оно связано с инволюцией тела. Если форменное кольцо (T,Λ) нормализовано и * – соответствующая стандартная инволюция на R, то для построенного выше отображения $\Psi_{\rm fp}$ форменное кольцо $(R,{\Psi_{\rm fp}}^{-1}(\Lambda))$ мы будем называть *нормализованным форменным кольцом над* R (определяющий скаляр λ при этом равен 1 или -1), а соответствующее ему нормализованное форменное кольцо (T,Λ) над телом T – *ассоциированным с* $(R,{\Psi_{\rm fp}}^{-1}(\Lambda))$. Наши предыдущие рассуждения показывают, что скэйлингом любое форменное кольцо над R можно превратить в нормализованное. Ассоциированное с получаемым при этом нормализованным форменным кольцом над R форменное кольцо над T мы будем называть также ассоциированным с исходным форменным кольцом над R – ясно, что оно определено однозначно с точностью до изоморфизма.

4. Форменные сети над простым артиновым кольцом. *В этом разделе работы под* (R,L) *понимается нормализованное форменное кольцо над* R, *а под* (T,Λ) *– ассоциированное с* (R,L) *форменное кольцо над телом* T; *под* λ *понимается общий определяющий скаляр для соответствующих инволюций.* Для обозначения действующей на T инволюции вместо $\tilde{}$ мы будем употреблять более традиционный значок $\bar{}$.

Начнем с небольшого замечания, связанного с условием $m\geqslant 2$ и касающегося ранее использованной терминологии.

Предложение 6. *Любая форменная* D*-сеть над* (R,L) *точна.*

Доказательство. Неточность форменной D-сети (σ,Γ) означала бы, что для некоторого индекса i идеал $\sigma_{i,-i}$ отличен от $\sum\limits_{j\neq\pm i}\sigma_{ij}\sigma_{j,-i}+\langle\Gamma_i\rangle$. Из определений сети и ее набора форменных сетевых параметров следует, что указанная сумма всегда содержится в $\sigma_{i,-i}$, поэтому рассматриваемая ситуация для простого кольца R возможна только при $\sigma_{i,-i}=R$ и $\langle\Gamma_i\rangle=0$. Но при

$\sigma_{i,-i} = R$ форменный сетевой параметр Γ_i содержит аддитивную группу $L^{\min} = \{a - a^* \mid a \in R\}$. Остается заметить, что группе $L^{\min}$ принадлежит ненулевая матрица m-ого порядка $e_{11} - \lambda e_{mm}$. $\square$

Для произвольного натурального числа n наряду с форменными сетями порядка $2n$ над (R, L) мы будем рассматривать специальным образом описываемые форменные сети порядка $2nm$ над (T, Λ): такую форменную сеть (τ, B) условимся называть m-*клеточной*, если при разбиении сети τ на блоки m-ого порядка

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^{11} & \dots & \tau^{1,-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau^{-1,1} & \dots & \tau^{-1,-1} \end{pmatrix}$$

каждый блок τ^{kl} состоит из m^2 одинаковых идеалов тела T, а при разбиении столбца B на подстолбцы высоты m

$$B = \begin{pmatrix} B^1 \\ \dots \\ B^{-1} \end{pmatrix}$$

каждый B^k состоит из m одинаковых форменных сетевых параметров. Легко заметить, что произвольная m-клеточная форменная D-сеть точна: если $\tau_{i,-i} = T$ – идеал из блока $\tau^{k,-k}$, то для некоторого индекса $j \neq \pm i$ в этом же блоке содержится единичный идеал τ_{ij}, причем идеал $\tau_{j,-i}$ также единичный, поскольку входит в диагональный блок.

Возьмем теперь форменную D-сеть (σ, Γ) порядка $2n$ над форменным кольцом (R, L). Для каждой пары индексов k и l обозначим через τ^{kl} квадратную матрицу из m^2 единичных идеалов тела T, если $\sigma_{kl} = R$, или нулевых идеалов – при $\sigma_{kl} = 0$, а затем из полученных блоков составим квадратную матрицу τ порядка $2mn$. Далее, для каждого индекса k обозначим через B^k столбец высоты m, все компоненты которого одинаковы и равны $\Psi_{\mathrm{fp}}(\Gamma_k)$ при $\sigma_{k,-k} = R$ или нулевые – при $\sigma_{k,-k} = 0$; из полученных столбцов составим столбец $B = B^k$ высоты $2mn$. Определенную таким образом пару (τ, B) обозначим через $\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma, \Gamma)$.

Предложение 7. Ψ_{fn} *является биекцией множества всех форменных D-сетей порядка $2n$ над форменным кольцом (R, L) на множество всех m-клеточных форменных D-сетей порядка $2mn$ над фор-*

менным кольцом (T,Λ)*, причем* $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)=\mathrm{U}\left(\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)\right)$ *и* $\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)=\mathrm{U}_0\left(\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)\right)$ *для произвольной форменной* D*-сети* (σ,Γ) *над* (R,L)*.*

Доказательство. Прежде всего надо убедиться в том, что $(\tau,B)=\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)$ – форменная D-сеть. Достаточно очевидно, что τ – унитарная D-сеть. Легко понять также, что для произвольного индекса i справедливы включения

$$\{\alpha-\overline{\alpha}\lambda \mid \alpha\in\tau_{i,-i}\}\leqslant B_i\leqslant\tau_{i,-i}\cap\Lambda:$$

при $\tau_{i,-i}=0$ эти включения тривиальны, а при $\tau_{i,-i}=T$ они следуют из того,что B_i является образом относительно Ψ_{fp} некоторого форменного параметра кольца R. Остается убедиться в справедливости включений $\alpha B_j\overline{\alpha}\leqslant B_i$ при $\alpha\in\tau_{ij}$. Если B_i и B_j принадлежат одному столбцу B^k, то это очевидно. Если же B_i принадлежит столбцу B^k, а B_j – столбцу B^l при $k\neq l$, причем α и B_j – ненулевые, то мы имеем $\sigma_{kl}=\sigma_{l,-l}=R$, откуда получаем $\sigma_{k,-k}=R$ и можно воспользоваться следующим из определения Γ включением $\Gamma_l\leqslant\Gamma_k$. Таким образом, (τ,B) действительно является форменной D-сетью; ясно, что она m-клеточная. Равенства $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)=\mathrm{U}\left(\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)\right)$ и $\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)=\mathrm{U}_0\left(\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)\right)$, как несложно понять, следуют из определения отображений Ψ_{fp} и Ψ_{fn}.

Инъективность Ψ_{fn} вполне понятна, убедимся в его сюръективности. Пусть (τ,B) – произвольная m-клеточная форменная D-сеть над форменным кольцом (T,Λ). Если мы положим при всех индексах $\sigma_{kl}=R$ для единичной клетки τ^{kl} и $\sigma_{kl}=0$ для нулевой клетки, то получим, как легко проверить, унитарную D-сеть σ. Затем положим $\Gamma_k=0$ при $\sigma_{k,-k}=0$, а при $\sigma_{k,-k}=R$ возьмем $\Gamma_k=\Psi_{\mathrm{fp}}^{-1}(B_i)$ для B_i из столбца B^k. Ясно, что таким образом определенные группы Γ_k удовлетворяют включениям

$$\{a-a^*\lambda \mid a\in\sigma_{k,-k}\}\leqslant\Gamma_k\leqslant\sigma_{k,-k}\cap L.$$

Что же касается условия $a\Gamma_l a^*\leqslant\Gamma_k$ при $a\in\sigma_{kl}$, то оно следует из включения $\alpha B_j\overline{\alpha}\leqslant B_i$ при $\alpha\in\tau_{ij}$ Тем самым мы показали, что (σ,Γ) – форменная D-сеть над (R,L). Равенство $\Psi_{\mathrm{fn}}(\sigma,\Gamma)=(\tau,B)$ очевидно. □

5. Строение решетки надгрупп диагональной группы. Сформулируем теперь основной результат представляемой работы.

Теорема 2. *Пусть* (R,L) *– форменное кольцо над простым артиновым кольцом* R*, не являющимся телом,* (T,Λ) *– ассоциированное* *с (R, L) форменное кольцо, причем тело T содержит не менее 7 элементов и выполняются следующие ограничения*

(1) $T \neq \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{11}$ *при* $\Lambda = T$,

(2) $T \neq \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{25}$ *при* $0 \lneqq \Lambda \lneqq T$.

Тогда для произвольного натурального числа n и для любой подгруппы H группы $\mathrm{U}(2n, R, L)$, содержащей все диагональные унитарные матрицы, существует единственная форменная D-сеть (σ, Γ) порядка $2n$ над (R, L), удовлетворяющая включениям

$$\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma, \Gamma).$$

Доказательство. Мы, разумеется, можем считать, что (R, L) – нормализованное форменное кольцо над R. Описание подгрупп $\mathrm{U}(2n, R, L)$, содержащих группу $\Delta(2n, R, L)$, означает описание подгрупп $\mathrm{U}(2mn, T, \Lambda)$, содержащих группу $\Delta_m(2mn, T, \Lambda)$ всех клеточно-диагональных унитарных матриц с клетками m-ого порядка на диагонали. Поскольку $\Delta_m(2mn, T, \Lambda)$ содержит группу $\Delta(2mn, T, \Lambda)$, для каждой из рассматриваемых подгрупп H в силу теоремы 1 существует ровно одна точная форменная сеть (τ, B) порядка $2mn$ над форменным кольцом (T, Λ), которая удовлетворяет включениям

$$\mathrm{U}_0(\tau, B) \leqslant H \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\tau, B). \tag{1}$$

Мы покажем сейчас, что форменная D-сеть (τ, B) является m-клеточной, рассматривая *m-клеточную запись* $\tau = (\tau^{kl})$, $B = (B^k)$ этой форменной сети.

Как было показано в [9–13], (τ, B) – наибольшая точная форменная сеть над (T, Λ), удовлетворяющая включению $\mathrm{U}_0(\tau, B) \leqslant H$, и она может быть описана следующим образом

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \{\alpha \in T \mid T_{ij}(\alpha) \in H\} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j, \\ B_i &= \{\beta \in \Lambda \mid T_{i,-i}(\beta) \in H\}, \\ \tau_{i,-i} &= \sum_{j \neq \pm i} \tau_{ij}\tau_{j,-i} + \langle B_i \rangle \quad \text{и} \quad \tau_{ii} = T. \end{aligned}$$

Поскольку H содержит группу $\Delta_m(2mn, T, \Lambda)$, все идеалы всех диагональных клеток τ^{kk} – единичные. Из определения набора форменных сетевых параметров тогда следует, что все компоненты столбца B^k одинаковы, и остается доказать, что при любых

$k \neq l$ клетка τ^{kl} составлена из одинаковых идеалов. Сделать это достаточно просто. Если такая клетка содержит единичный идеал τ_{ij}, а τ_{rj} и τ_{is} – другие идеалы данной клетки при каких-то $r \neq i$ и $s \neq j$, то идеалы τ_{ri} и τ_{js} входят в диагональные клетки τ^{kk} и τ^{ll}, соответственно, а потому $\tau_{ri} = \tau_{js} = T$. Но тогда из включений $\tau_{ri}\tau_{ij} \leqslant \tau_{rj}$ и $\tau_{ij}\tau_{js} \leqslant \tau_{is}$, даваемых определением сети τ, мы получаем $\tau_{rj} = \tau_{is} = T$. Другими словами, если клетка содержит хотя бы один единичный идеал, то все идеалы соответствующих столбца и строки этой клетки совпадают с T; ясно, что в таком случае все идеалы данной клетки равны T.

Итак, мы установили, что (τ, B) – m-клеточная форменная D-сеть, а это значит, что для форменной D-сети $(\sigma, \Gamma) = {\Psi_{\mathrm{fn}}}^{-1}(\tau, B)$ над (R, L) имеют место включения, описанные в формулировке теоремы. Единственность (σ, Γ) следует из предложения 7 и единственности точной форменной сети (τ, B), удовлетворяющей условиям (1). $\square$

В заключение отметим, что за рамками нашего описания остались гиперболические унитарные группы над теми простыми артиновыми кольцами, с которыми ассоциировано форменное кольцо над маленьким полем, являющееся исключением в теореме 1. Понятно, что какие-то исключения быть должны, – не вдаваясь в подробности, сошлемся на существование несложного контрпримера для кольца $R = \mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Нам кажется, что список исключений в теореме 2 можно существенно сократить, но здесь детально обсуждать эту тему мы не будем.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. МИАН СССР **148** (1978), 43–57.
3. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. МИАН СССР **165** (1984), 24–42.
4. А. Борель, Ж. Титс, *Редуктивные группы.* — Математика. Периодич. сб. перев. иностр. статей **11**:1 (1967), 43–111; **11**:2, 3–31.
5. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та **1** (1981), 10–15.

6. Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу клеточно-диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та **1** (1983), 16–21.
7. Н. Джекобсон, *Теория колец.* — М., ИЛ (1947).
8. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах в гиперболической унитарной группе.* — Алгебра и анализ **9**:4 (1997), 79–86.
9. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
10. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики* 2. — Алгебра и анализ **10**:4 (1998), 113–129.
11. Е. В. Дыбкова, *О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 154–206.
12. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 121–135.
13. Е. В. Дыбкова, *Теорема Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн.семин. ПОМИ **321** (2005), 136–167.
14. В. А. Койбаев, *О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та **13** (1982), 33–40.
15. В. А. Койбаев, *Подгруппы полной линейной группы над конечным полем, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц.* — Структурные свойства групп, Орджоникидзе, Северо-Осетинский ун-т (1982), 6–16.
16. A. Bak, *On modules with quadratic forms.* — Lect. Notes Math. **108** (1969), Springer, Berlin et al., 55–66.
17. A. Bak, K-*theory of forms.* — Ann. Math. Stud. **98** (1981), Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y.
18. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7**:2 (2000), 159–196.
19. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).

Dybkova E. V. Overgroups of the diagonal group in the hyperbolic unitary group over a simple Artin ring.

We consider overgroups of the diagonal subgroup in the hyperbolic unitary group over a simple Artin ring. We have proved that in most cases the lattice of the subgroups in question admits the standard description. In particular, this holds for all infinite rings. In our previous papers the

similar result was obtained for fields and skew field.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 30 октября 2006 г.