Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

В. Голубовски

ПОДГРУППЫ БЕСКОНЕЧНЫХ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

1. Введение

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей 1, $G = \mathrm{UT}(\infty, R)$ – группа всех бесконечных (индексированных семейством натуральных чисел $\mathbb{N}$) верхних унитреугольных матриц над R. Множество N_m всех матриц a из G, первые m столбцов которых совпадают с соответствующим столбцом единичной матрицы e, является нормальным делителем в группе G, причем фактор-группа $G/N_m \simeq \mathrm{UT}(m, R)$ нильпотентна. Поэтому G является пронильпотентной группой как обратный предел конечномерных унитреугольных групп G/N_m.

Решетка подгрупп группы G по сравнению с решеткой подгрупп стабильной унитреугольной группы $\mathrm{UT}(R)$ (прямого предела групп $\mathrm{UT}(m, R)$ при естественном вложении) исследована слабо. В случае конечного поля K группа $\mathrm{UT}(K)$ счетна, в то время как $\mathrm{UT}(\infty, K)$ несчетна, так как, например, содержит бесконечное декартовое произведение $\mathrm{UT}(2, K) \times \mathrm{UT}(2, K) \times \dots$. Кроме того, $\mathrm{UT}(K)$ локально конечна и не содержит свободных подгрупп. Явные примеры свободных подгрупп в $\mathrm{UT}(\infty, K)$ построены в [4] для $\mathrm{char}(K) = 2$ и в [15] для char $(K) = 0$ или $p > 2$. В [16] доказано, что в случае конечных полей почти все в смысле категории Бэра k-порожденные подгруппы в $\mathrm{UT}(\infty, K)$ являются свободными группами ранга k (здесь k конечно или счетно).

Поэтому проблема нахождения порождающих множеств несвободных подгрупп в $\mathrm{UT}(\infty, K)$ может оказаться, в зависимости от подгруппы, достаточно сложной. Так, известно, что так называемая Ноттингемская группа [8] и первая группа Григорчука являются подгруппами в $\mathrm{UT}(\infty, K)$. Недавно Ю. Г. Леонов в [3] получил весьма неочевидное рекуррентное описание порождающих матриц для группы Григорчука в $\mathrm{UT}(\infty, K)$, подобной матричной характеризации естественных порождающих Ноттингемской группы пока нет. Это показывает, что проблема нахождения порождающих семейств несвободных подгрупп в группе $\mathrm{UT}(\infty, K)$ представляет самостоятельный интерес. Следует отметить также, что она тесно связана с аналогичной проблемой для групп подстановочных автоматов, поскольку $\mathrm{UT}(\infty, K)$ может рассматриваться как подгруппа этой группы при надлежащем выборе автомата [1].

В данной работе мы вводим в рассмотрение специальные бесконечные матрицы, которые называем стринг-матрицами или просто стрингами. Показываем, что для любого ассоциативного кольца R подгруппа $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ конечно строчных матриц в $\mathrm{UT}(\infty, R)$ порождается стрингами. Это дает возможность выделить большую подрешетку в решетке подгрупп группы $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$, естественным образом ассоциированную с ростами натуральнозначных функций. Для наименьшей подгруппы в этой решетке, называемой группой квазидиагональных матриц, устанавливается совсем простое множество порождающих. А именно, порождающими являются 1-квазидиагональные матрицы, которые можно рассматривать как обобщение обычных элементарных трансвекций.

На наш взгляд, этот результат представляет интерес, поскольку подгруппа квазидиагональных матриц в $\mathrm{UT}(\infty, R)$ несчетна и указать порождающие в этом случае достаточно трудно. Тем не менее наши порождающие устроены просто и естественно.

В конечномерном случае группа верхних унитреугольных матриц является силовской p-подгруппой группы $\mathrm{GL}\,(n, K)$ для конечного поля K (см. [5, 26]). Она является примером унипотентной подгруппы в группах Шевалле [25]. Ряд других свойств $\mathrm{UT}(n, R)$ отмечен в [22]. Заметим также, что лишь совсем недавно была решена проблема нахождения копредставления $\mathrm{UT}(n, K)$ в случае конечных полей вычетов (см. [6, 7]).

2. Порождение стрингами

Мы говорим, что бесконечная $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ матрица $a = (a_{ij})$ над кольцом R унитреугольна, если $a_{ii} = 1$ для всех i и $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$. Пусть $\mathrm{UT}(\infty, R)$ обозначает множество всех унитреугольных матриц над R, e – единичная матрица, $e_{(ij)}$ – матрица с единственным ненулевым элементом, равным 1, стоящим на пересечении i-той строки и j-того столбца. Как в конечномерном случае, матрица $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{(ij)}$, $\alpha \in R$, $i \neq j$, называется элементарной трансвекцией.

Поскольку любая унитреугольная матрица обратима и обратная к ней тоже унитреугольная, то множество $\mathrm{UT}(\infty, R)$ является группой относительно умножения. Отметим, что обратная к верхней треугольной матрице не всегда является верхней треугольной (см. [11] для примеров и комментариев).

В 1921 году Хаусдорф построил пример бесконечной треугольной матрицы h с целыми коэффицентами, такой что $h^2 = e$, [13] (см. [1] для более современных ссылок). Элементы матрицы h определяются равенствами $h_{ij} = (-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1}$ если $j \geq i$ и $h_{ij} = 0$ в противном случае. Таким образом,

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix},$$

т.е. столбцы ненулевых элементов являются последовательными биномиальными коэффициентами с переменными знаками. Легко показать, что $h = h^{-1}$.

Унитреугольные матрицы ведут себя совсем по другому.

Предложение 1. *Если элемент 2 обратим в кольце R, то для любой матрицы $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ существует единственная матрица $b \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ такая, что $b^2 = a$.*

Условие $2 \in R^\star$ существенно, так как матрица Хаусдорфа h по модулю 2 дает нетривиальный контрпример в случае поля характеристики 2.

На самом деле можно показать больше, а именно

Предложение 2. *В группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Q})$ операция извлечения корня n-ой степени однозначна для любого натурального n.*

Определение 1. *Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется стринг-матрицей или стрингом, если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n_i, R)$ при естественном диагональном вложении этого произведения в $\mathrm{UT}(\infty, R)$.*

Иными словами, a является блочно-диагональной матрицей с блоками размерностей $n_1, n_2, \dots$ по диагонали. Ее можно записать в виде бесконечного произведения коммутирующих конечных блоков $a = \prod_{s=1}^{\infty} a_s$. Отсюда видно, что $a^{-1} = \prod\limits_{s=1}^{\infty} a_s^{-1}$, значит, обратная к a матрица тоже является стрингом. Отметим, что произведение двух стринг-матриц не всегда является стрингом.

Символом $\mathcal{H}$ обозначим семейство всевозможных конечных произведений стрингов. Это группа, которая может быть охарактеризована в матричных терминах следующим образом. Длиной строки матрицы из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ называем номер столбца последнего ненулевого элемента в строке, в случае, когда такого элемента не существует говорим, что длина строки бесконечна. Матрицу называем конечно строчной, если длина любой ее строки конечна. Символом $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ обозначим подгруппу всех a из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ таких, что a и a^{-1} – конечно строчные матрицы. Каждая строка такой матрицы содержит конечное число ненулевых элементов. Заметим, что условие конечной строчности обеих матриц a и a^{-1} существенно, т.к. в $\mathrm{UT}(\infty, R)$ существуют матрицы, для которых лишь одна из пары a, a^{-1} является конечно строчной. А именно, пусть $a = (a_{ij})$ – матрица, определяемая условиями $a_{ii} = a_{i,i+1} = 1$ для всех i, и $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. Легко видеть, что матрица a является конечно строчной, но матрица a^{-1} нет. Значит, $a \notin \mathrm{UT}_r(\infty, R)$.

Очевидно, что подгруппа $\mathcal{H}$ содержится в $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ *порождается стринг-матрицами, т.е. имеет место равенство* $\mathrm{UT}_r(\infty, R) = \mathcal{H}$. *Более точно, любой элемент из* $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ *является стрингом или произведением двух стрингов.*

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{UT}_r(\infty, R)$ – некоторая конечно строчная матрица. Фиксируем произвольное натуральное число $n_1 \geq 1$. Пусть m_1 будет наибольшей из длин первых n_1 строк матриц g и g^{-1}, а m_2 – наибольшей из длин первых m_1 строк матриц g и g^{-1}. Имеем $m_2 \geq m_1 \geq n_1$. Положим $n_2 = m_2 + 1$.

Пусть m_3 будет наибольшей из длин первых n_2 строк матрицы g и g^{-1}, а m_4 – наибольшей из длин первых m_3 строк матриц g и g^{-1}. Положим $n_3 = m_4 + 1$. Продолжая процедуру построения чисел n_i, мы одновременно получим разбиение матриц g (и g^{-1}) на блоки, при этом на главной диагонали будут находится квадратные верхние унитреугольные матрицы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ для матрицы g ($c_1, c_2, c_3, \ldots$ соответственно для матрицы g^{-1}) размеров

$n_1 \times n_1$, $(n_2-n_1)\times(n_2-n_1)$, $(n_3-n_2)\times(n_3-n_2),\ldots$. Кроме того, все ненулевые элементы матриц g (g^{-1}) расположены в блоках $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ $(c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots)$, как это схематически изображено ниже.

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & & & \\ & & a_3 & b_3 & & \\ & & & a_4 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & & & & \\ & c_2 & d_2 & & & \\ & & c_3 & d_3 & & \\ & & & c_4 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрицы b_1, d_1 имеют размер $n_1 \times (n_2-n_1)$, матрицы b_2, d_2 – размер $(n_2-n_1)\times(n_3-n_2)$, и т.д.

Из построения следует, что для всех n имеет место равенство $d_n \cdot b_{n+1} = 0$. Это вытекает из того, что в блоках b_k, d_k ненулевые элементы не появляются в столбцах с номерами больше, чем n_{2k-1}, а в блоках b_{k+1}, d_{k+1} ненулевые элементы не появляются в строках с номерами меньше, чем n_{2k}. Так как $g \cdot g^{-1} = e$, мы имеем $a_n \cdot d_n + b_n \cdot c_{n+1} = 0$ и $c_n = a_n^{-1}$ для всех n. Следовательно,

$$a_n \cdot d_n = -b_n \cdot c_{n+1} = -b_n \cdot a_{n+1}^{-1}.$$

Умножая обе стороны этого равенства на b_{n+1}, получаем

$$a_n \cdot d_n \cdot b_{n+1} = -b_n \cdot a_{n+1}^{-1} \cdot b_{n+1} = 0.$$

Построим теперь два стринга u, v таких, что $g = u \cdot v$. В разбиении на блоки матрицы g заменяем все $a_1, a_2, \ldots$ единичными матрицами $e_{n_1}, e_{n_2-n_1}, \ldots$, все b_{2n-1} – нулевыми матрицами и все b_{2n} – произведениями $b_{2n} \cdot a_{2n+1}^{-1}$. Получим новую стринг-матрицу, которую обозначим символом u. Заменяя в разбиении по блокам матрицы g все b_{2n} нулевыми матрицами, получим другую стринг-матрицу v. Стринг-матрицы u, v имеют следующий вид

$$u = \begin{pmatrix} e & & & & & & \\ & e & b_2 \cdot a_3^{-1} & & & & \\ & & e & & & & \\ & & & e & b_4 \cdot a_5^{-1} & & \\ & & & & e & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ & a_2 & & & & & \\ & & a_3 & b_3 & & & \\ & & & a_4 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Теперь используя равенство $b_n \cdot a_{n+1}^{-1} \cdot b_{n+1} = 0$, проверяем, что $g = u \cdot v$, и теорема доказана.

С использованием стрингов легко доказывается также следующий результат.

Теорема 2. *Стабильная группа* $\mathrm{UT}(R)$ *над кольцом* R *является нормальным делителем группы* $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$.

Доказательство. Любой элемент из $\mathrm{UT}(R)$ имеет вид

$$u = \left(\begin{array}{c|c} u_1 & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

где $u_1 \in \mathrm{UT}(n, R)$ при некотором натуральном n. Пусть $v \in \mathrm{UT}_r(\infty, R)$ и $v^{-1} = (v'_{ij})$. Обозначим

$$n_1 = \min\{j : v_{ik} = 0 \,\forall\, k > j,\ 1 \le i \le n\}.$$

Положим $m = \max\{n_1, n\}$. Ясно, что можем представить u в следующем блочном виде $\left(\begin{array}{c|c} u_2 & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$, где $u_2 \in \mathrm{UT}(m, R)$. На самом деле, все ненулевые коэффиценты матрицы $u_2 - e_m$ лежат в левом верхнем углу размера $n \times n$. Представляя v, v^{-1} в том же блочном виде, получаем:

$$v^{-1}uv = \left(\begin{array}{c|c} v'_1 & v'_2 \\ \hline v'_3 & v'_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} u_2 & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \\ \hline v_3 & v_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & v'_1(u_2 - e_m)v_2 \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

Поскольку матрица $(u_2 - e_m)v_2$ очевидным образом является нулевой, теорема доказана.

Символом $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ обозначим группу всех матриц из $\mathrm{UT}(\infty, R)$, у которых все ненулевые элементы над главной диагональю находятся в конечном множестве строк. Аналогично предыдущей теореме доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Группа $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ является нормальным делителем унитреугольной группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$.*

Доказательство. Соотношение $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R) \triangleleft \mathrm{UT}(\infty, R)$ следует из равенства

$$v^{-1}wv = \left(\begin{array}{c|c} v_1' & v_2' \\ \hline v_3' & v_4' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} w_1 & w_2 \\ \hline 0 & e \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \\ \hline v_3 & v_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

где матрицы $v \in \mathrm{UT}(\infty, R)$, $w \in \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ разбиты на соответствующие блоки.

Отметим, что $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R) \cap \mathrm{UT}_r(\infty, R) = \mathrm{UT}(R)$, но обе эти группы устроены совсем по другому. Имеем

Теорема 4. *Группа $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ порождается элементарными трансвекциями и сопряженными с ними элементами. Класс сопряженности произвольного нетривиального элемента из $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ содержит нетривиальную элементарную трансвекцию.*

Доказательство. Любая матрица a из $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ записывается в виде $a = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots a_1$, где матрица a_k от единичной отличается только k-ой строкой, которая такая же, как у матрицы a. Пусть

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда $a_1 = (t_{12}(1-a_{12}))^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdot t_{12}(1) \cdot b_1$. Аналогично можно представить матрицы $a_2, a_3, \dots, a_n$, откуда следует первая часть теоремы. Матрицу $a \in \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ можно представить в виде

$$a = \left(\begin{array}{c|c} b & c \\ \hline 0 & e \end{array}\right)$$

так, чтобы $b \neq e_n$. Положим

$$h = \left(\begin{array}{c|c} e_n & u \\ \hline 0 & e \end{array}\right), \qquad k = \left(\begin{array}{c|c} v & 0 \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

и пусть $a_1 = aha^{-1}h^{-1}$, $a_2 = a_1ka_1^{-1}k^{-1}$. Тогда

$$a_2 = \left(\begin{array}{c|c} e_n & w \\ \hline 0 & e \end{array}\right),$$

и $w = u(e_n - b)(v - e_n)$. Легко видеть, что матрицы u и v можно подобрать так, чтобы у матрицы w был только один ненулевой элемент. Для этого достаточно выбрать матрицы u, v только с одном ненулевым элементом.

Как следствие получаем следующее

Предложение 3. *Для любой нормальной подгруппы H группы $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$, содержащей $\mathrm{UT}(R)$, имеем $H = \mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$.*

Это значит, что нетривиальные нормальные подгруппы группы $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ не содержат целиком подгруппы $\mathrm{UT}(R)$.

3. Подгруппы, задаваемые ростами

В этом параграфе напомним сначала основные определения и результаты из [20]. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел с естественным порядком. Мы расширяем этот порядок на множество $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, положив $n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $P(\mathbb{N})$ всех функций $f : \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty$ является полугруппой относительно сложения. Пусть Ω_∞ – подмножество тех функций $f \in P(\mathbb{N})$, для которых $f(n+1) \geq f(n) > n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f(\infty) = \infty$. Ясно, что Ω_∞ – подполугруппа без единицы в $P(\mathbb{N})$. Как обычно, $f < g$ обозначает, что $f(n) < g(n)$ для всех натуральных n.

Вводим на множестве Ω_∞ частичный порядок $\prec$, полагая для любых $f, g \in \Omega_\infty$, что соотношение $f \prec g$ выполнено тогда и только тогда, когда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$: $f(n) < g(n)$.

Символом f^k обозначим k-кратную суперпозицию функции f на себя. Положим $f \ll g$, если $f^k \prec g$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$M(f) = \{h \in \Omega_\infty : f \ll h\}.$$

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве Ω_∞, полагая

$$f \sim g \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad M(f) = M(g).$$

Это отношение эквивалентности можно определить, используя порядок $\prec$ следующим образом.

Предложение 4. *$f \sim g$ тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f \prec g^k$ и $g \prec f^k$.*

Классы эквивалентности $\sim$ назовем ростами функций из $P(\mathbb{N})$. Множество всех ростов обозначим $\Omega^\star$. Мы выделяем две специальные функции, принадлежащие Ω_∞:

$$f_\infty(n) = \infty \quad \text{и} \quad f_0(n) = n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие им росты обозначим $\omega_\infty = [f_\infty]$ и $\omega_0 = [f_0]$. Ясно, что $f \in \omega_\infty$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(n) = \infty$, $g \in \omega_0$ только тогда, когда существует $d \in \mathbb{N}$ такое, что $g(n) \leq n + d$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

На множестве ростов $\Omega^\star$ определим частичный порядок, полагая $\omega_1 \leq \omega_2$ в том и только том случае, когда $M(f) \supseteq M(g)$ для некоторых $f \in \omega_1$, $g \in \omega_2$. Ясно, что для всех $\omega \in \Omega^\star$ выполнены неравенства $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_\infty$, т.е. ω_0 является наименьшим, а ω_∞ наибольшим элементом частично упорядоченного множества $\Omega^\star$.

С помощью ростов $\omega_1 = [f]$ и $\omega_2 = [g]$ можно определить два новых роста:

$$\omega_1 \vee \omega_2 = [\max\{f, g\}],$$
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = [\min\{f, g\}].$$

Очевидно, что $\omega_1 \vee \omega_2 \geq \omega_1, \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2 \leq \omega_1, \omega_2$. Имеем

Лемма 1. *Если $\omega_3 > \omega_1 \wedge \omega_2$, то $\omega_3 > \omega_1$ или $\omega_3 > \omega_2$. Если $\omega_4 < \omega_1 \vee \omega_2$, то $\omega_4 < \omega_1$ или $\omega_4 < \omega_2$.*

Основные свойства частично упорядоченного множества $\Omega^\star$ описывает следующая

Теорема 5. *Множество $\Omega^\star$ с действиями $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ является дистрибутивной полной решеткой, которая плотна.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [20]. Отметим, что $\Omega^\star$ не является булевой алгеброй.

Пусть $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$. Говорим, что функция $f \in P(\mathbb{N})$ ограничивает матрицу a, если $a_{nm} = 0$ для всех $m > f(n)$. На самом деле, можно предположить, что $f \in \Omega_\infty$ и является наименьшей возможной. Достаточно положить $f(1) = m$, где $m = \max(2, \max(n : a_{1n} \neq 0))$, или $f(1) = \infty$, если такого m нет. Положим $f(n+1) = \max(n+2, f(n), m)$, где $m = \max(k : a_{nk} \neq 0)$, или $f(n+1) = \infty$, если такое m не существует.

Для $\omega \in \Omega^\star$, обозначим через $\mathrm{UT}(\omega)$ множество всех матриц $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ таких, что a и a^{-1} ограничены соответственно некоторыми функциями $f_1, f_2 \in \omega$. Обозначим через $\mathrm{UT}(\widehat{\omega})$ множество всех матриц $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ таких, что a и a^{-1} ограничены соответственно некоторыми функциями f_1, f_2 такими, что $f_1 \ll g$, $f_2 \ll g$ для некоторого $g \in \omega$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Множества $\mathrm{UT}(\omega)$ и $\mathrm{UT}(\widehat{\omega})$ являются подгруппами группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$.*

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 7. *Если $a \in \mathrm{UT}(\omega) \cap \mathrm{UT}_r(\infty, R)$, то $a = s$ или $a = s_1 \cdot s_2$, где s, s_1, s_2 являются стрингами и $s, s_1, s_2 \in \mathrm{UT}(\omega)$.*

Аналогичное утверждение верно и для группы $\mathrm{UT}(\widehat{\omega})$. Многие свойства групп, задаваемых ростами, вытекают из следующего результата.

Теорема 8. *Решетки $\{\mathrm{UT}(\omega) : \omega \in \Omega^\star\}$, $\{\mathrm{UT}(\widehat{\omega}) : \omega \in \Omega^\star\}$ подгрупп группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$ изоморфны решетке ростов $\Omega^\star$.*

Теорема 9. *Если Y — подмножество группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$, то существует наименьшая $\omega \in \Omega^\star$ такая, что $Y \subset \mathrm{UT}(\omega)$.*

Доказательство. Предположим, что $Y = \{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ замкнуто относительно взятия обратного элемента. Тогда можно построить семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$, ограничивающих все матрицы y_α. Построим теперь функцию f следующим образом. Пусть $f(n) = \max_\alpha\{f_\alpha(n)\}$. Очевидно, что $f \in \Omega_\infty$. Из построения следует, что $[f]$ является верхней мажорантой семейства $\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$, и тогда $Y \subset \mathrm{UT}([f])$.

4. Сети идеалов и сетевые подгруппы

Система $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(i, j \in \mathbb{N})$ двусторонних идеалов σ_{ij} кольца R называется сетью, если

$$\sigma_{ir} \cdot \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j, r \in \mathbb{N}.$$

Сеть σ нетривиальна, если $\sigma_{ij} \neq 0$ для хотя бы одной пары индексов (i, j). Если σ и τ – сети, система идеалов $\sigma\cap\tau = (\sigma_{ij}\cap\tau_{ij})$ тоже является сетью. Отношение $\sigma \leq \tau$, определенное условием $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$, задает частичный порядок на множестве всех сетей в кольце R. Мы ограничимся рассмотрением только *верхних сетей*, для которых σ_{ij} тривиален при $i \geq j$.

Пусть $G(\sigma)$ обозначает множество всех матриц $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i < j$. Так как σ – сеть, то $G(\sigma)$ замкнуто относительно умножения матриц.

На самом деле, мы можем доказать больше.

Предложение 5. *Если σ – сеть, то $G(\sigma)$ – подгруппа группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что из $a \in G(\sigma)$ следует $a^{-1} = (a'_{ij}) \in G(\sigma)$. Так как $a^{-1}\cdot a = e$, мы имеем $a'_{i,i+1}+a_{i,i+1} = 0$, и это значит, что $a'_{i,i+1} \in \sigma_{i,i+1}$. Из равенства $a'_{i,j+1} = -a'_{i,2}a_{2j} - \cdots - a'_{i,j-1}a_{j-1,j} - a_{i,j}$ индукцией по j получаем $a'_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i < j$.

Пусть $E(\sigma)$ – подгруппа группы $\mathrm{UT}(\infty, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\alpha_{ij}) = e + \alpha_{ij}e_{(ij)}$ такими, что $\alpha_{ij} \in \sigma_{ij}$. Отображение $\sigma \mapsto G(\sigma)$ является биекцией, причем $\sigma\cap\tau \mapsto G(\sigma\cap\tau) = G(\sigma)\cap G(\tau)$ (аналогичный факт верен для пересечения любого семейства сетей).

Предложение 6. *Если H – подгруппа $\mathrm{UT}(\infty, R)$, то существуют сети $\sigma \geq \tau$ такие, что $E(\sigma) \leq H \leq G(\tau)$.*

Доказательство. Сеть τ можно взять наименьшей возможной, как пересечение всех сетей ρ таких, что $H \subset G(\rho)$. Сеть σ можно взять наибольшей возможной (как прямой предел конечномерных сетей).

Мы имеем следующее

Предложение 7. *Решетка сетей идеалов кольца R, индексированных натуральными числами $\mathbb{N}$, изоморфна решетке сетевых подгрупп группы* $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

Не все подгруппы $\mathrm{UT}(\infty, R)$ сетевые.

Пример 1. Пусть $G = \{e, a, a^{-1}\}$, где матрица $a = (a_{ij})$ определена условиями: $a_{ii} = a_{i,i+1} = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. Ясно, что G – подгруппа группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$, которая не является сетевой подгруппой. Более того, наименьшей сетевой подгруппой $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$, содержащей G, является вся $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$, наибольшей подгруппой $E(\tau)$, содержащейся в G, является тривиальная подгруппа $\{e\}$.

Интересен вопрос, для каких сетей σ сетевая подгруппа $G(\sigma)$ абелева. Мы приведем пример максимальных абелевых сетевых подгрупп.

Пример 2. Пусть $i_0 \in \mathbb{N}$, а сеть σ удовлетворяет условиям: $\sigma_{kl} = R$ если $k \leq i_0$, $l > i_0$ и $\sigma_{kl} = 0$ в остальных случаях. Легко проверить, что $G(\sigma)$ – максимальная абелева подгруппа (см. [24, 18] для групп Маклейна).

Сеть σ называется *нормальной*, если для всех $i < r < j$, $i, j, r \in \mathbb{N}$, выполняются равенства: $\sigma_{ir} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$. Если σ – нормальная сеть, то легко видеть, что для $g \in G(\sigma)$ и $v \in \mathrm{UT}_f(\infty, R)$ имеем $v \cdot g \cdot v^{-1} \in G(\sigma)$. Свойство сети идеалов “быть нормальной” инвариантно относительно действий в решетке сетей. Таким образом, получаем следующее утверждение, которое доказывается так же, как соответствующий результат для групп Маклейна [18].

Теорема 10. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1. Если σ – нормальная сеть, то $G(\sigma)$ – нормальная подгруппа* $\mathrm{UT}(\infty, R)$. *Сетевые подгруппы $G(\sigma)$, соответствующие нормальным сетям, определяют подрешетку Λ решетки всех нормальных подгрупп в* $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

Отметим здесь, что если кольцо R имеет бесконечную решетку двусторонних идеалов, то решетка Λ несчетная.

5. Неубывающие функции и нормальные подгруппы

Пусть $R = K$ – тело (или простое кольцо). Пусть $MF(\infty)$ – множество всех неубывающих функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (т.е. из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$). Для произвольной группы $G(\sigma)$ (σ – нормальная сеть) определяем функцию $f_\sigma \in MF(\infty)$ следующим образом: $f_\sigma(i)$ = минимальное j такое, что $\sigma_{ij} \neq 0$, и ∞ в противном случае. Функция f_σ корректно определена, так как нормальные сети имеют свойство: если $\sigma_{ij} = K$, то для всех $r > i$, $s > j$ имеем $\sigma_{rs} = K$.

Лемма 2. *Если σ – нормальная сеть, то $f_\sigma \in MF(\infty)$.*

Множество $MF(\infty)$ является решеткой с операциями

$$(f_\sigma \wedge f_\tau)(i) = \max\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\},$$
$$(f_\sigma \vee f_\tau)(i) = \min\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\}.$$

Функции $f_{\max}(i) = i + 1$ и $f_{\min}(i) = \infty$ для всех i отвечают группам $\mathrm{UT}(\infty, K)$ и $\{e\}$ соответственно. Ясно, что $f_{\min} \leq f_\sigma \leq f_{\max}$ для всех f_σ из $MF(\infty)$. Мы имеем также $G(\sigma) \cap G(\tau) \mapsto f_\sigma \wedge f_\tau$ и $G(\sigma \cdot \tau) \mapsto f_\sigma \vee f_\tau$.

Известный результат Уир утверждает, что нормальные подгруппы $\mathrm{UT}_n(K)$ являются подгруппами, соответствующими неубывающим функциям, которые определены функциями, ограничивающими ненулевые элементы матриц ([26, теорема 4)]. Здесь мы формулируем обобщение этого результата (доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [18]).

Теорема 11. *Если K – тело (или простое кольцо), то соответствие $G(\sigma) \mapsto f_\sigma$ определяет решеточный изоморфизм решетки*

$$\Lambda = \{G(\sigma) \subset \mathrm{UT}(\infty, K) : \ \sigma \ \text{ – нормальная сеть}\}$$

и решетки $MF(\infty)$.

Очевидно, что если σ – нормальная сеть кольца R, то пересечение подгрупп $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R) \cap G(\sigma)$ – нормальная подгруппа в $\mathrm{UT}(\infty, R)$. Таким образом, получаем большое семейство нормальных подгрупп в $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

6. Группа квазидиагональных матриц

Будем называть бесконечное произведение $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i$ элементарных трансвекций t_i обобщенной трансвекцией, если существует последовательность $\{n_i\}$ $(n_i > 1)$ натуральных чисел такая, что для каждой трансвекции $t_i = t_{k_i,l_i}(\alpha)$ выполняется условие $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k_i < l_i \leq n_1 + \ldots + n_i$.

Иными словами, $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{UT}(n_i, R) < \mathrm{UT}(\infty, R)$, и все t_i содержатся в соответствующих блоках $\mathrm{UT}(n_i, R)$ по главной диагонали.

Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется n-квазидиагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $j - i > n$, и $a_{i,i+n} \neq 0$ для хотя бы одного индекса i. Мы говорим, что a квазидиагональна (или обобщенно якобиева или конечной ширины или ленточная), если a n-квазидиагональна для некоторого n. Все матрицы a из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ такие, что a и a^{-1} квазидиагональны, образуют подгруппу $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$. Эта подгруппа совпадает с наименьшей группой $\mathrm{UT}(\omega_0)$, определенной ростами.

Теорема 12. *Подгруппа $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ квазидиагональных матриц в $\mathrm{UT}(\infty, R)$ содержит стабильную унитреугольную группу $\mathrm{UT}(R)$. Если R содержит $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, то $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ содержит свободную подгруппу счетного ранга.*

Доказательство. Наименьший элемент $\omega_0 \in \Omega^\star$ содержит все функции вида $f_d(n) = n + d$, где d – фиксированное натуральное число. Так как любая матрица из $\mathrm{UT}(R)$ ограничена функцией f_d для некоторого d, то $\mathrm{UT}(R)$ содержится в $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$.

В работе [19] показано, что две бесконечные матрицы

$$c = \mathrm{diag}\,(t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots) \quad \text{и} \quad d = \mathrm{diag}\,(1, t_{12}(1), t_{12}(1), \ldots),$$

где $t_{12}(1)$ – элементарная трансвекция, порождают свободную подгруппу ранга 2 в группе $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$. Для $p > 2$ они порождают в группе $\mathrm{UT}(\infty, K)$, где K – поле из p элементов, свободное произведение двух циклических подгрупп порядка p, которое тоже содержит нециклическую свободную подгруппу [23]. Достаточно рассмотреть подгруппу, порожденную матрицами $x = c(cd)c^{-1}$, $y = dc(cd)c^{-1}d^{-1}$. Для $p = 2$ примеры матриц порождающих свободную подгруппу можно найти в [4]. Как известно [23], коммутант свободной группы ранга 2 является свободной группой счетного ранга.

Теорема 13. *Группа* $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ *порождается* 1*-квазидиагональными обобщенными трансвекциями.*

Доказательство. Любая матрица из $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ является стрингом или произведением двух стрингов, которые тоже квазидиагональны по теореме 7. Теперь результат вытекает из свойств унитреугольных матриц.

Обозначим символом $\mathrm{UT}^k(\infty, R)$ множество всех матриц из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ с $k-1$ нулевыми диагоналями выше главной. Пусть $\mathrm{UT}_b^k(\infty, R) = \mathrm{UT}^k(\infty, R) \cap \mathrm{UT}_b(\infty, R)$. Справедливо следующее

Следствие 1. *Имеем равенство* $\gamma_n(\mathrm{UT}_b(\infty, R)) = \mathrm{UT}_b^n(\infty, R)$.

Отметим, что в общем случае верно только включение $\gamma_n(\mathrm{UT}(\infty, R)) \leq \mathrm{UT}^n(\infty, R)$.

Известная теорема Гамильтона–Кэли утверждает, что любая конечномерная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Очевидно, что этот результат не имеет бесконечномерного аналога. С другой стороны, для квазидиагональных матриц мы можем доказать

Предложение 8. *Если* K *– конечное поле и стринг* a *содержится в группе* $\mathrm{UT}_b(\infty, K)$*, то существует нетривиальный многочлен* $f \in K[x]$ *такой, что* $f(a) = 0$.

Доказательство. Пусть $a = \prod a_i$ является d-квазидиагональным стрингом. Тогда каждый множитель a_i является $c \times c$-матрицей при некотором $c \leq d$. Следовательно a_i является корнем некоторого многочлена $f_i \in K[x]$ степени $\leq c^2$. Пусть f – произведение всех полиномов степени $\leq d$ из $K[x]$ (число таких полиномов конечно). Тогда $f(a_i) = 0$, и значит $f(a) = 0$.

7. Алгебра строго верхнетреугольных матриц

В настоящем параграфе мы рассматриваем только коммутативные кольца R. Бесконечная $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ матрица a называется строго верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \geq j$. Множество всех строго верхнетреугольных матриц $\mathcal{UT}(\infty, R)$ является ассоциативной $R-$алгеброй с обычным сложением и умножением. Пусть $\mathcal{UT}_r(\infty, R)$ обозначает ее подалгебру конечно-строчных матриц. Аналогично случаю группы вводим понятие стринга.

Говорим, что $a \in \mathcal{UT}(\infty, R)$ является *стринг-матрицей*, или просто *стрингом*, если существует бесконечная последовательность $\{n_i\}$ натуральных чисел такая, что $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{UT}(n_i, R)$. Значит, a является обычной блочно-диагональной верхнетреугольной матрицей с нулями на главной диагонали.

Теорема 14. *Алгебра $\mathcal{UT}_r(\infty, R)$ порождается стрингами.*

Доказательство. Если $a \in \mathcal{UT}(\infty, R)$, то $e + a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$. По теореме 1 мы можем представить $e + a$ как произведение двух стрингов $e + a = (e + b)(e + c)$. Отсюда $a = b + c + bc$, где b, c – стринги, и $\mathcal{UT}(\infty, R)$ порождается как алгебра стрингами.

Если a квазидиагональна, то $a = b + c + bc$, где b, c – тоже квазидиагональные стринги. Любой квазидиагональный стринг нильпотентен, отсюда получаем такое утверждение.

Теорема 15. *Алгебра $\mathcal{UT}_b(\infty, R)$ порождается нильпотентными элементами.*

Ясно, что в алгебре $\mathcal{UT}(\infty, R)$ тоже можно определить подалгебры $\mathcal{UT}(\omega)$, связанные с ростами. Для них верны аналогичные результаты как и в случае групп. Доказательства требуют лишь небольших изменений.

8. Заключительные замечания

1) Полученные результаты о группе $\mathrm{UT}(\infty, R)$ могут быть обобщены на случай группы бесконечных конечно столбцовых обратимых матриц $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ для некоторых классов колец R (см. [21]).

2) Из теоремы 12 следует, что группа $\mathrm{UT}(\infty, F)$, для конечного поля F, содержит свободную подгруппу счетного ранга. Но с другой стороны, известно что группа всех подстановок натуральных чисел содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$ [10] и является подгруппой $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$. Верно ли, что $\mathrm{UT}(\infty, F)$ тоже содержит свободную подгруппу ранга $2^{\aleph_0}$?

3) Гудэрл, Меналь и Монкази [12] показали, что любая счетномерная алгебра над полем K погружается в алгебру бесконечных конечно-столбцовых и конечно-строчных $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ матриц над K. Интересно найти описание тех алгебр, которые погружаются в $\mathcal{UT}_r(\infty, K)$.

4) Наши результаты могут быть обобщены и на случай алгебр Ли бесконечных треугольных матриц с нулями на главной диагонали. В частности, можно определить семейство подалгебр, связанных с ростами, аналогично ассоциативному случаю.

Литература

1. Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, *Автоматы, динамические системы и группы.* — Труды Мат. Института им. Стеклова **231** (2000), 134–214.
2. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп.* — 3-е изд. Наука, Москва (1982).
3. Ю. Г. Леонов, *Представление резидуально конечных 2-групп бесконечными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов.* — Мат. Студия (Львів) **22** (2003), No. 2, 134–140.
4. А. С. Олийник, В. И. Сущанский, *Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц.* — Мат. заметки **67** (2000), No. 3–4, 320–324.
5. П. П. Павлов, *Силовские p-подгруппы полной линейной группы над простым полем характеристики p.* — Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Мат. **16** (1952), 437–458.
6. D. K. Biss, *A presentation for the unipotent group over* $\mathbb{F}_2$. — Comm. Algebra **26** (1998), No. 9, 2971–2975.
7. D. K. Biss, S. Dasgupta, *A presentation for the unipotent group over rings with identity.* — J. Algebra **237** (2001), No. 2, 691–707.
8. R. Camina, *Some natural subgroups of the Nottingham group,* — J. Algebra **196** (1997), 101–113.
9. R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces.* Macmillan & Co., Ltd., London (1950).
10. J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups.* — Springer-Verlag, New York (1996).
11. P. Galanopoulos, A. G. Sisakis, *Hausdorff matrices and composition operators.* — Illinois J. Math. **45** (3) (2001), 757–773.
12. K. R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi, *Free and residually Artinian regular rings.* — J. Algebra **156**, No. 2 (1993), 407–432.
13. F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen.* I. — Math. Zeitschrift **9** (1921), 74–109.
14. W. Hołubowski, *Subgroups of infinite triangular matrices containing diagonal matrices.* — Publ. Math. Debrecen **59** (2001), No. 1–2, 45–50.
15. W. Hołubowski, *Most finitely generated subgroups of infinite unitriangular matrices are free.* Bull. Austral. Math. Soc. **66** (2002), 419–423.
16. W. Hołubowski, *Parabolic subgroups of Vershik-Kerov's group.* — Proc. Amer. Math. Soc. **130**, (2002), 2579–2582.
17. W. Hołubowski, *An inverse matrix of an upper triangular matrix can be lower triangular.* — Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. **22** (2002), No. 2, 161–166.
18. W. Hołubowski, *A normal structure of McLain groups.* — Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. **45** (2002), 171–177 (2003).

19. W. Hołubowski, *Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices.* — Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), No. 1, 81–86.
20. W. Hołubowski, *A new measure of growth for groups and algebras* (submitted.)
21. W. Hołubowski, N. A. Vavilov, *Infinite general linear group* (in preparation).
22. V. M. Levchuk, *Chevalley groups and their unipotent subgroups.* — Contemp. Math. **131** (1989), 227–242.
23. W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, Combinatorial group theory. Interscience, New York (1966).
24. D. H. McLain, *A characteristically simple group.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **50** (1954), 641–642.
25. R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups.* Yale Univ. Press, Yale (1967).
26. A. J. Weir, *Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p.* — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 454–464.

Hołubowski W. Subgroups of unitriangular groups of infinite matrices.

We show, that for any associative ring R, the subgroup $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ of row finite matrices in $\mathrm{UT}(\infty, R)$, the group of all infinite dimensional (indexed by $\mathbb{N}$) upper unitriangular matrices over R, is generated by strings (block-diagonal matrices with finite blocks along the main diagonal). This allows us to define a large family of subgroups of $\mathrm{UT}_r(\infty, R)$ associated to some growth functions. The smallest subgroup in this family, called the group of banded matrices, is generated by 1-banded simultaneous elementary transvections (a slight generalization of the usual notion of elementary transvections). We introduce a notion of net subgroups and characterize the normal net subgroups of $\mathrm{UT}(\infty, R)$.

Институт Математики
Политехника Шлёнска,
Гливице, Польша

E-mail: w.holubowski@polsl.pl

Поступило 13 ноября 2006 г.