Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

Н. А. Вавилов, Н. П. Харчев

ОРБИТЫ СТАБИЛИЗАТОРА ПОДСИСТЕМ

Пусть Φ – произвольная приведенная неприводимая система корней, $W(\Phi)$ – ее группа Вейля. Мы рассматриваем пары $(S, X(S))$, состоящие из замкнутого подмножества S системы Φ и его стабилизатора $X(S)$. Напомним, что $X(S)$ состоит из всех элементов $w \in W(\Phi)$, для которых $wS = S$. В случае, когда $S = \Delta$ само является системой корней, $X(\Delta)$ совпадает с нормализатором $N_{W(\Phi)}(W(\Delta))$ подгруппы Вейля $W(\Delta)$ в группе Вейля $W(\Phi)$. Мы рассматриваем множество пар $(S, X(S))$, упорядоченное включением:

$$(S_1, X(S_1)) \subseteq (S_2, X(S_2)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_1 \subseteq S_2, \quad X(S_1) \leqslant X(S_2).$$

Основной целью настоящей статьи является *проверка* справедливости следующего комбинаторного результата.

Теорема. *Пусть Δ – такая подсистема неприводимой системы корней Φ, что пара $(\Delta, X(\Delta))$ максимальна среди всех собственных пар $(S, X(S))$. Тогда $X(\Delta)$ действует транзитивно на множестве корней фиксированной длины из $\Phi \setminus \Delta$.*

Упомянем два классических частных случая этого результата.

• Для системы Φ с простыми связями все корни имеют одинаковую длину. Для $\Delta = \emptyset$ теорема утверждает, что группа Вейля $X(\emptyset) = W(\Phi)$ транзитивно действует на множестве *всех* корней. Наша же теорема утверждает, что $X(\Delta)$ всегда действует транзитивно на множестве $\Phi \setminus \Delta$.

• Система Φ с кратными связями, $\Delta = \Phi_l$ – множество длинных корней. В этом случае теорема утверждает, что группа Вейля $X(\Phi_l) = W(\Phi)$ транзитивно действует на множестве *коротких* корней.

На заключительном этапе работы над статьей первый автор пользовался поддержкой проектов РФФИ 03–01–00349 (ПОМИ РАН) и INTAS 03-51-3251.

Таким образом, нашу теорему можно рассматривать как очень широкое обобщение транзитивности действия группы Вейля на корнях фиксированной длины.

Каждое замкнутое множество корней S можно записать в виде $S = S^r \sqcup S^u$, где S^r – редуктивная часть множества S, состоящая из тех корней $\alpha \in S$, для которых $-\alpha \in S$, а S^u – унипотентная часть множества S, состоящая из тех корней $\alpha \in S$, для которых $-\alpha \notin S$:

$$S^r = \{\alpha \in S \mid -\alpha \in S\}, \qquad S^u = \{\alpha \in S \mid -\alpha \notin S\}.$$

Замкнутое множество P называется параболическим, если

$$\Phi = P^r \sqcup P^u \sqcup (-P^u).$$

Напомним, что из теоремы Бореля–Титса [1] следует, что для максимальной пары $(S, X(S))$ выполняется следующая альтернатива:

- либо $S = P$ – параболическое множество;
- либо $S = \Delta$ – подсистема корней.

По теореме Шевалле для параболического множества P имеет место равенство $X(P) = W(P^r)$. Поэтому параболическая пара $(P, X(P))$ тогда и только тогда максимальна, когда максимально само P. Так как $W(P^r)$ сохраняет коэффициент при простом корне системы Φ, не входящем в P^r, то для максимального параболического подмножества P его нормализатор $X(P)$ крайне редко действует на $\Phi \setminus P = -P^u$ транзитивно. Например, так как для систем типов E_8, F_4 и G_2 все простые корни входят в разложение максимального корня с коэффициентом $\geqslant 2$, то таких параболических подмножеств, для которых $X(P)$ действовало бы на $-P^u$ транзитивно, для них вообще нет.

Поэтому обойтись в доказательстве теоремы одной максимальностью просто невозможно. С другой стороны, нам не удалось *непосредственно* использовать в ее доказательстве тот факт, что S является *подсистемой* корней. Собственно говоря, нам не удалось найти вообще никакого *априорного* доказательства этой теоремы, которое не опиралось бы на полученную в [20, 3, 18] *классификацию* максимальных пар $(\Delta, X(\Delta))$. Нам удалось лишь проверить транзитивность действия $X(\Delta)$ в каждом случае. Поэтому приводимое в настоящей работе доказательство ни в малейшей степени не объясняет, *почему* эта теорема верна.

Эта задача возникла в связи с изучением подгрупп в группах Шевалле, содержащих максимальный тор [4–7, 9, 21], в частности, с попытками разобраться с тем, что происходит над совсем маленькими полями. В действительности, для тех приложений, которые мы имели в виду, необходимо понять действие $X(S)$ на парах, тройках, и, в некоторых случаях, на четверках ортогональных корней из $\Phi\setminus\Delta$. Однако, поскольку в этих случаях ответ сформулировать не так просто, а случай одного корня допускает красивый общий ответ, мы решили опубликовать его отдельно.

Для некоторых примеров первый автор установил транзитивность действия в 1984 году. Но так как придумать априорное доказательство ему тогда не удалось, он не довел вычисления до конца. Весной 2006 года второй автор завершил разбор всех случаев. Настоящая статья представляет собой дипломную работу второго автора, выполненную под руководством первого.

Статья организована следующим образом. В параграфах 1–3 мы напоминаем необходимые сведения о системах корней и их подсистемах, в том числе гиперболическую реализацию систем E_l, конструкцию подсистем и классификацию максимальных пар. В параграфах 4–7 мы проверяем теорему для всех случаев.

§1. Системы корней

В том, что касается систем корней, включая нумерацию простых корней, мы следуем Бурбаки [2]. В частности, как и выше, Φ обозначает приведенную неприводимую систему корней ранга l, $W = W(\Phi)$ – ее группа Вейля. Для корня $\alpha \in \Phi$ через $w_\alpha \in W$ обозначается соответствующее корневое отражение. Ясно, что $ww_\alpha w^{-1} = w_{w\alpha}$ для любого $w \in W$.

Зафиксируем на Φ некоторый порядок, пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – множество простых корней, а Φ^+ и Φ^- – множества положительных и отрицательных корней, соответственно. Часто для краткости мы будем обозначать фундаментальное корневое отражение w_{α_i} просто через w_i – обратите внимание, что во многих книгах по теории алгебр Ли и групп Коксетера используется обозначение s_i. Как хорошо известно, фундаментальные отражения порождают группу Вейля, $W = \langle w_1, \dots, w_l\rangle$.

Для двух систем корней Δ и Σ через $\Delta + \Sigma$ обозначается их ортогональная сумма. В частности, $k\Delta = \Delta + \ldots + \Delta$ ортогональная сумма k изоморфных слагаемых. Чтобы не делать оговорок в формулировках, часто удобно рассматривать пустую систему корней $\mathrm{A}_0 = \emptyset$ ранга 0. Полезно помнить, что $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_0 = \emptyset$.

Как всегда, при вычислениях с системами корней *по крайней мере* 90% всех вычислений относятся к системам $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$. Как и в работах [18, 22], мы используем *гиперболическую* реализацию этих систем в $(l+1)$-мерном пространстве Минковского [13]. Эта реализация *значительно* удобнее для всех вычислений, чем обычные реализации в эвклидовом пространстве. Так как основные вычисления настоящей статьи *самым* существенным образом от нее зависят, сейчас мы совсем коротко ее напомним, дальнейшие детали можно найти в [18, 22 или 8].

Рассмотрим вещественное векторное пространство $U = \mathbb{R}^{l,1}$ размерности $l+1$ с невырожденным симметрическим скалярным произведением $(\ ,\ ) \colon U \times U \to \mathbb{R}$ сигнатуры $(l, 1)$. Зафиксируем в нем ортонормированный базис $e_0, e_1, \ldots, e_l$ такой, что $(e_0, e_0) = -1$ и $(e_i, e_i) = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant l$. В первую очередь нас будет интересовать случай $l = 8$. Обозначим через $L \leqslant \mathbb{R}^{8,1}$ решетку, состоящую из всех векторов $v \in \mathbb{R}^{8,1}$, все координаты которых $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8$ в разложении по базису $e_0, e_1, \ldots, e_8$ целые,

$$v = \lambda e_0 + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_8 e_8, \qquad \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8 \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим теперь через Φ множество всех векторов $v \in L$, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\lambda - (\mu_1 + \ldots + \mu_8) = 0, \\ -\lambda^2 + \mu_1^2 + \ldots + \mu_8^2 = 2. \end{cases}$$

Все решения этой системы уравнений, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 3, \qquad \mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_8,$$

перечислены в следующей таблице.

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
0	1	0	0	0	0	0	0	−1
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0	0
3	2	1	1	1	1	1	1	1

Легко проверить, что все остальные целочисленные решения получаются из этих при помощи следующих двух типов преобразований.

- Произвольная перестановка $\mu_1, \dots, \mu_8$.
- Одновременная смена знака всех координат.

Таким образом, с точностью до знака каждый элемент Φ имеет следующую форму:

$$\begin{cases} \beta_{ij} = e_i - e_j, \quad i > j, \\ \gamma_{ijh} = e_0 + e_i + e_j + e_h, \\ \eta_{ij} = 2e_0 + e_1 + \ldots + \widehat{e}_i + \ldots + \widehat{e}_j + \ldots + e_8, \\ \zeta_i = 3e_0 + e_1 + \ldots + 2e_i + \ldots + e_8, \end{cases}$$

где индексы $i, j, h = 1, \dots, 8$ попарно различны, а шляпка $\widehat{\ }$ над индексом означает, что этот индекс следует пропустить.

Легко проверить, что ограничение скалярного произведения на гиперплоскость V, ортогональную к вектору $3e_0 + e_1 + \ldots + e_8$, положительно определено и что Φ представляет собой систему корней типа E_8 в V, см. [13, 22]. Зафиксируем в Φ следующую систему положительных корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$:

$$\alpha_1 = e_2 - e_1, \quad \alpha_2 = e_0 + e_1 + e_2 + e_3, \quad \alpha_3 = e_3 - e_2, \quad \alpha_4 = e_4 - e_3,$$

$$\alpha_5 = e_5 - e_4, \quad \alpha_6 = e_6 - e_5, \quad \alpha_7 = e_7 - e_6, \quad \alpha_8 = e_8 - e_7.$$

Напомним, что эта нумерация корней следует [2], а не [13]. Перечисленные выше корни β_{ij}, γ_{ijh}, η_{ij} и ζ_i представляют собой множество Φ^+ положительных корней относительно фундаментальной системы корней Π.

Чтобы получить отсюда систему корней типа E_7, достаточно взять те корни из E_8, для которых $\mu_8 = 0$ – или, что то же самое, для которых α_8 не появляется в их разложении по фундаментальным корням. Точно так же, для того, чтобы получить систему корней типа E_6, достаточно взять те корни из E_8, для которых $\mu_7 = \mu_8 = 0$ – или, что то же самое, для которых как α_7, так и α_8 не появляются в их разложении по фундаментальным корням.

В дальнейшем для краткости корневое отражение $w_{\beta_{ij}}$ обозначается просто через w_{ij}. Действие w_{ij} на корень переставляет его коэффициенты при e_i и e_j. Корневое отражение $w_{\gamma_{ijh}}$ будет обозначаться просто через w_{ijh}. Заметим, что в случае нетривиального действия w_{ijh} всегда меняет тип корня: корень типа β превращается в корень типа γ, а корень типа γ – либо в корень типа β, либо в корень типа η.

В дальнейшем мы обозначаем через $\langle\alpha,\dots,\beta\rangle$ подсистему, порожденную корнями $\alpha,\dots,\beta$, иными словами, наименьшую *подсистему* – а не просто замкнутое множество корней! – содержащую эти корни. Так как w_{ij} переставляют координаты с 1-й по l-ю и вообще не затрагивают e_0, то описанное выше разбиение корней на типы согласовано с действием группы Вейля $W(\mathrm{A}_{l-1})$, для подсистемы

$$\mathrm{A}_{l-1}=\langle\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_l\rangle,$$

порожденной всеми фундаментальными корнями, кроме α_2.

§2. Подсистемы систем корней

Классификация всех подсистем корней системы корней, в том числе, конечно, и максимальных, была получена Борелем–де Зибенталем [14] и Дынкиным [11]. Элементарное доказательство этих результатов приведено в [23]. Конструкция Дынкина–Бореля–де Зибенталя состоит в следующем.

• Пусть $\overline{\Pi}$ – расширенная система простых корней системы Φ, получающаяся из Π добавлением корня $\alpha_0=-\delta$, где δ – максимальный корень системы Φ относительно системы простых корней Π. Для каждого r, $1\leqslant r\leqslant l$, рассмотрим подсистему Δ_r в Φ, порожденную $\overline{\Pi}\setminus\{\alpha_r\}$, иными словами, наименьшую подсистему, содержащую эти корни – или, что то же самое, наименьшее замкнутое подмножество, содержащее эти корни и противоположные к ним. Подсистемы Δ_r являются подсистемами *максимального ранга*, а именно, ранга l. Вообще говоря, системы Δ_r приводимы. Кроме того, они не всегда являются максимальными, и в некоторых случаях – например, для $\Phi=\mathrm{A}_l$ – могут совпадать с Φ.

• Применяя только что описанную процедуру ко всем неприводимым компонентам систем Δ_r и повторяя этот процесс до полного удовлетворения, мы получим все подсистемы $\Delta\subseteq\Phi$ максимального ранга.

• Теперь вообще все подсистемы $\Delta\subseteq\Phi$ можно получить следующим образом. Пусть $\Sigma\subseteq\Phi$ – какая-то подсистема максимального ранга, Ξ – ее система простых корней. Тогда для любого подмножества $J \subseteq \Xi$ порожденная им подсистема Δ является замкнутой подсистемой в Φ и все подсистемы в Φ получаются таким образом.

Для классических систем ответ совсем очевиден и приведен в [11], таблица 9. Для исключительных систем с точностью до сопряженности элементом из $W(\Phi)$ имеется 5 *собственных* подсистем в G_2, 23 в F_4, 20 в E_6, 46 в E_7 и 76 в E_8, см. там же, таблица 11. Эту таблицу можно найти так же в [18] или извлечь из таблиц в [15, 12], вычеркнув там классы, не отвечающие подсистемам и добавив ровно две подсистемы.

А именно, две подсистемы $\Delta, \Sigma \subseteq \Phi$ одного и того же типа *почти всегда* сопряжены при помощи элемента $W(\Phi)$. Кроме того, *почти всегда* две подсистемы тогда и только тогда сопряжены при помощи элемента из $W(\Phi)$, когда сопряжены в $W(\Phi)$ их элементы Коксетера. Все исключения перечислены ниже.

• В случае, когда все корни системы Δ имеют одинаковую длину, ее, вообще говоря, можно вложить в Φ двумя существенно различными способами, на длинные корни и на короткие корни. Чтобы различать эти вложения, мы обозначаем вложение на короткие корни через $\widetilde{\Delta} \subseteq \Phi$, сохраняя обозначение $\Delta \subseteq \Phi$ для вложения на длинные корни.

• Подсистемы D_2 и $2\mathrm{A}_1$, а также D_3 и A_3 являются изоморфными, но не сопряженными подсистемами D_l. Более того, при $l \geqslant 5$ они не сопряжены не только при помощи элемента $W(\mathrm{D}_l)$, но даже при помощи элемента $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}_l) = W(\mathrm{B}_l)$. Правда, при $l = 4$ они становятся сопряженными при помощи элемента $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}_4) = W(\mathrm{F}_4)$, это явление известно как тройственность. Кроме того, в системе D_l подсистемы типа $\mathrm{A}_{l_1} + \dots + \mathrm{A}_{l_r}$, где $(l_1+1)+\dots+(l_r+1) = l$ и все l_i нечетны, разбиваются на два класса сопряженности, образующие один класс в $W(B_l)$.

• В системе типа E_7 имеется по два класса подсистем следующих типов: $\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1$, A_5, $\mathrm{A}_3+2\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_1$, $4\mathrm{A}_1$, $3\mathrm{A}_1$, а в системе типа E_8 имеется по два класса подсистем типов A_7, $\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1$, $2\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_3+2\mathrm{A}_1$, $4\mathrm{A}_1$, см. [11, с. 384] или [15, с. 299]. Обратите внимание, что в случае E_7 это в точности пары подсистем, несопряженных в $\mathrm{D}_6+\mathrm{A}_1$, а в случае E_8 – соответственно, пары подсистем, не сопряженных в D_8. Следуя [11], мы обозначаем через Δ' ту из подсистем типа Δ, которая содержится в A_7 или, соответственно, в A_8, а через Δ'', – ту, которая там не содержится. В [15] символы Δ' и Δ'' используются в противоположном смысле.

• Как установлено в [15], имеется *ровно два случая*, когда для несопряженных подсистем $\Delta, \Sigma \subseteq \Phi$ их классы Коксетера $C(\Delta)$ и $C(\Sigma)$ совпадают в $W(\Phi)$. А именно, $C(B_2 + 2A_1) = C(A_3 + A_1)$ в F_4 и $C(D_5 + A_3) = C(A_7 + A_1)$ в E_8. Таким образом, за вычетом двух этих исключений приведенные в [15, 12] таблицы классов сопряженности в группах Вейля содержат все подсистемы корней. Разумеется, обратное совершенно неверно: отнюдь не любой класс сопряженности группы Вейля является классом Коксетера какой-то подсистемы, так что в этих таблицах и много лишнего!

§3. Максимальные пары

Воспроизведем полученный в [3, 18] список максимальных относительно включения пар $(\Delta, X(\Delta))$, где Δ – подсистема в Φ. Обратите внимание, что эти пары максимальны среди *всех* пар вида $(S, X(S))$, где S – замкнутое множество, а не только среди пар $(\Sigma, X(\Sigma))$, где Σ – подсистема в Φ. Иными словами, они не содержатся не только ни в одной собственной паре вида $(\Sigma, X(\Sigma))$, но и ни в одной паре $(P, W(P^r))$, где P – собственное параболическое подмножество.

A_l $N((l+1)/(k+1)A_k)$, $(k+1) \mid (l+1)$, $k \neq l$

B_l $N(B_k + D_{l-k})$, $0 \leqslant k \leqslant l-1$

C_l $N(l/kC_k)$, $k \mid l$, $k \neq l$; $N(A_{l-1})$; $G(C_k + C_{l-k})$, $1 \leqslant k < l/2$

D_l $N(l/kD_k)$, $k \mid l$, $k \neq l$; $N(A_{l-1})$, $2|l$; $N(D_k + D_{l-k})$, $1 \leqslant k < l/2$

E_6 $G(A_5 + A_1)$, $N(3A_2)$, $N(D_4)$, N

E_7 $G(D_6 + A_1)$, $N(A_7)$, $N(A_5 + A_2)$, $N(D_4 + 3A_1)$, $N(7A_1)$, $N(E_6)$, N

E_8 $G(E_7 + A_1)$, $G(D_8)$, $N(E_6 + A_2)$, $N(A_8)$, $N(2D_4)$, $N(2A_4)$, $N(4A_2)$, $N(8A_1)$, N

F_4 $G(B_4)$, $N(D_4)$, $G(A_1 + C_3)$, $N(A_2 + \widetilde{A}_2)$

G_2 $N(A_2)$, $G(A_1 + \widetilde{A}_1)$

Используемые здесь символы G и N не имеют большого значения для рассматриваемой нами комбинаторной задачи, но зато чрезвычайно важны с точки зрения тех ее приложений, которые имелись в виду в [4–7, 9, 21], поэтому мы решили их сохранить. Чтобы не вводить обозначений, связанных с группами Шевалле, поясним комбинаторный смысл этих символов. Наличие в этом списке записи $G(\Delta)$ означает, что $(\Delta, X(\Delta))$ максимальна среди пар $(S, X(S))$ и $X(\Delta) = W(\Delta)$, а наличие записи $N(\Delta)$ означает, что $(\Delta, X(\Delta))$ максимальна среди пар $(S, X(S))$ и $X(\Delta) \neq W(\Delta)$.

Первая попытка написать этот список предпринята в [20], но приведенный там ответ содержал три ошибки. Обратите внимание, что все фигурирующие в этом списке подсистемы единственны с точностью до сопряженности.

Так как начиная со следующего параграфа мы приступаем к систематическому разбору случаев, сделаем несколько общих замечаний по поводу того, что происходит.

• Мы считаем известным утверждение о транзитивности группы Вейля $W(\Phi)$ на корнях одинаковой длины и свободно им пользуемся. В частности, мы не передоказываем теорему для случая, когда $\Delta = \emptyset$ или $\Delta = \Phi_l$.

• Во многих случаях мы вначале изучаем действие $X(\Delta)$ на $\Phi \setminus \Delta$ *с точностью до знака*. Иными словами, мы проверяем, что для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Phi \setminus \Delta$ найдется такое $w \in X(S)$, что $w\alpha = \pm\beta$. После этого достаточно предъявить какие-то $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ и $w \in X(S)$, для которых $w\alpha = -\alpha$. В связи с этим мы пользуемся обозначениями $S^+ = S \cap \Phi^+$, $S^- = S \cap \Phi^-$.

• By the same token, во многих случаях мы вначале находим несколько множеств $X, Y, \ldots \subseteq \Phi \setminus \Delta$, на которых $X(S)$ *очевидным образом* действует транзитивно. После этого нужно лишь научиться переставлять элементы этих множеств между собой. Например, предъявить такие $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, $w \in X(S)$, что $w\alpha = \beta$.

• Наконец, во многих случаях мы прежде всего разбиваем $\Phi \setminus \Delta$ на орбиты группы Вейля $W(\Delta)$. В некоторых случаях уже эта группа будет действовать транзитивно. Но, как правило, это не так. Чтобы доказать транзитивность, нам придется пользоваться *внешними автоморфизмами* системы Δ. Порядок группы $X(\Delta)/W(\Delta)$ найден в статье Картера [15], а сама эта группа для редуктивных частей параболических подмножеств вычислена в статьях Деризиотиса [16] и Хоулетта [19], для некоторых других случаев – в статье Идову–Морриса [17], и для всех случаев – в статье первого автора и Харебова [18]. В дальнейшем мы широко пользуемся этими результатами.

• Для случаев, когда $X(\Delta) = W(\Delta)$, транзитивность действия на $\Phi\backslash\Delta$ можно истолковать как неприводимость некоторых представлений. Эти случаи обычно рассматриваются совсем легко. Для случаев, когда $X(\Delta) \neq W(\Delta)$ – и, в особенности, когда фактор-группа $X(\Delta)/W(\Delta)$ велика, – проверить транзитивность часто гораздо труднее.

§4. Классические случаи, F_4 и G_2

В настоящем параграфе мы докажем теорему для всех несложных случаев.

Случай A_l**.** Напомним, что корни системы A_l имеют вид $e_i - e_j$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n = l+1$. Предположим, что $m = k+1$ делит n. В этом случае подсистема $\Delta = (n/m)\mathrm{A}_k$ вкладывается в $\Phi = \mathrm{A}_l$, например, так: $e_i - e_j$ входит в Δ, если и только если $i-1$ и $j-1$ дают одинаковые неполные частные при делении на m. При этом группа Вейля $W(\Delta)$ является подгруппой Юнга $S_m \times \ldots \times S_m \leqslant S_n$, где количество сомножителей равно n/m, а группа $X(\Delta)$ является сплетением $S_{n/m} \wr S_m$ *как группа перестановок*. Иными словами, n-элементное множество индексов $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ разбивается на m-элементные блоки в количестве n/m штук, причем на множестве блоков действует группа $S_{n/m}$, а в каждом блоке – группа S_m. Ясно, что $X(S)$ транзитивно действует на множестве $\Phi \setminus \Delta$. В самом деле, в силу 2-транзитивности группы $S_{n/m}$ на множестве блоков мы можем перевести любой корень не из Δ в корень вида $e_i - e_j$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $m+1 \leqslant j \leqslant 2m$. Теперь в силу транзитивности S_m внутри каждого m-элементного блока каждый такой корень можно перевести в корень $e_1 - e_{m+1}$, как и утверждалось.

Случай B_l**.** В стандартной реализации $\Phi = \mathrm{B}_l$ в качестве корней берутся $\pm e_i \pm e_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant l$ и $\pm e_i$, где $1 \leqslant i \leqslant l$. Группа Вейля $W(\mathrm{B}_l) = W(\mathrm{C}_l)$ – это октаэдральная группа Oct_l порядка $2^l l!$, состоящая из *означенных перестановок* = `signed permutations` базиса. Эта группа переставляет векторы $\pm e_i$, при этом, естественно, $\pi(-e_i) = -\pi(e_i)$.

В этом случае в качестве $\Delta = \mathrm{B}_k + \mathrm{D}_{l-k}$ можно взять корни $\pm e_i \pm e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, и $\pm e_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $\pm e_i \pm e_j$, $k+1 \leqslant i < j \leqslant l$. Группа $X(\Delta)$ состоит из произвольных перестановок индексов $1 \leqslant i \leqslant k$, произвольных перестановок индексов $k+1 \leqslant j \leqslant n$ и произвольных замен знаков при e_i и e_j – элементом группы Вейля $W(\Delta)$ можно произвести *четное* число замен знаков при e_j. Ясно, что этими преобразованиями любой короткий корень из $\Phi\setminus\Delta$ можно привести к виду e_{k+1}, а любой длинный – к виду e_1+e_{k+1}, как и утверждалось.

Случай C_l**.** В стандартной реализации $\Phi=\mathrm{C}_l$ в качестве корней берутся $\pm e_i\pm e_j$, где $1\leqslant i<j\leqslant l$, и $\pm 2e_i$, $1\leqslant i\leqslant l$, а группа Вейля $W(\mathrm{C}_l)=\mathrm{Oct}_l$ такая же, как в случае B_l.

• Каждому делителю k ранга l можно сопоставить подсистему $\Delta=(l/k)\mathrm{C}_k$, состоящую из *всех* длинных корней и тех коротких корней $\pm e_i\pm e_j$, для которых $i-1$ и $j-1$ дают одинаковые неполные частные при делении на k. Ясно, что группа Вейля $W(\Delta)$ является прямым произведением $\mathrm{Oct}_k\times\ldots\times\mathrm{Oct}_k\leqslant\mathrm{Oct}_l$, где количество сомножителей равно l/k, а $X(\Delta)$ является сплетением группы Oct_k, действующей в блоке, и симметрической группы $S_{l/k}$, переставляющей блоки. Теперь мы можем рассуждать точно так же, как в случае A_l. А именно, в силу 2-транзитивности группа $S_{l/k}$ транзитивно переставляет пары блоков и, значит, любой корень из $\Phi\setminus\Delta$ – все они короткие! – эквивалентен корню вида $\pm e_i\pm e_j$, где $1\leqslant i\leqslant k$, а $k+1\leqslant j\leqslant 2k$. Подействовав октаэдральными группами в блоках, мы переведем этот корень в e_1+e_{k+1}, как и утверждалось.

• В качестве $\Delta=\mathrm{A}_{l-1}$ можно взять e_i-e_j, $1\leqslant i\neq j\leqslant l$. В этом случае $W(\Delta)=S_l$ состоит из всевозможных перестановок векторов $e_1,\ldots,e_l$, и имеет индекс 2 в своем нормализаторе, который порождается над $W(\Delta)$ одновременной сменой знака всех векторов. Этими преобразованиями любой длинный корень можно перевести в корень $2e_1$, любой короткий корень вида $\pm(e_i+e_j)$ – в корень e_1+e_2, как и утверждалось.

• В качестве $\Delta=\mathrm{C}_k+\mathrm{C}_{l-k}$ можно взять корни $\pm e_i\pm e_j$, $1\leqslant i<j\leqslant k$ и $\pm 2e_i$, $1\leqslant i\leqslant k$, или $k+1\leqslant i<j\leqslant l$. Группа $W(\Delta)$ состоит из произвольных перестановок индексов $1\leqslant i\leqslant k$, произвольных перестановок индексов $k+1\leqslant j\leqslant n$ и произвольных замен знаков при e_i. При $k=l-k$ в группе $X(\Delta)$, *кроме того*, есть элемент, производящий перестановку блоков $\{1,\ldots,k\}$ и $\{k+1,\ldots,l\}$. Ясно, что этими преобразованиями любой корень из $\Phi\setminus\Delta$ – все они короткие! – можно привести к виду e_1+e_{k+1}, как и утверждалось.

Случай D_l**.** В стандартной реализации $\Phi=\mathrm{D}_l$ в качестве корней берутся $\pm e_i\pm e_j$, где $1\leqslant i<j\leqslant l$, а группа Вейля $W(\mathrm{D}_l)$ имеет индекс 2 в группе $W(\mathrm{B}_l)=\mathrm{Oct}_l$ и состоит из означенных

перестановок, меняющих *четное* число знаков. Все рассуждения полностью параллельны случаю C_l, с небольшими изменениями.

• Каждому делителю k ранга l можно сопоставить подсистему $\Delta = (l/k)\mathrm{D}_k$, состоящую из корней $\pm e_i \pm e_j$, для которых $i-1$ и $j-1$ дают одинаковые неполные частные при делении на k. Ясно, что группа Вейля $W(\Delta)$ является прямым произведением $W(\mathrm{D}_k) \times \ldots \times W(\mathrm{D}_k)$, где количество сомножителей равно l/k, а группа $X(\Delta)$ имеет индекс 2 в сплетении группы Oct_k, действующей в блоке, и симметрической группы $S_{l/k}$, переставляющей блоки. А именно, $X(\Delta)$ состоит из тех элементов этого сплетения, которые одновременно меняют *четное* число знаков. Теперь мы можем рассуждать точно так же, как в случаях A_l или C_l. Снова в силу 2-транзитивности группа $S_{l/k}$ транзитивно переставляет пары блоков, и, значит, любой корень из $\Phi\setminus\Delta$ эквивалентен корню вида $\pm e_i \pm e_j$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, а $k+1 \leqslant j \leqslant 2k$. Подействовав октаэдральными группами в блоках, и вспомнив, что по условию $l \geqslant 3$ – система D_2 приводима! – мы переведем этот корень в $e_1 + e_{k+1}$, как и утверждалось.

• В качестве $\Delta = \mathrm{A}_{l-1}$ снова можно взять $e_i - e_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$. В этом случае $W(\Delta) = S_l$ состоит из всевозможных перестановок векторов $e_1, \ldots, e_l$. В случае нечетного l эта группа совпадает со своим нормализатором, а в случае четного l имеет индекс 2 в своем нормализаторе, который порождается над $W(\Delta)$ одновременной сменой знака всех векторов. Преобразованиями из $W(\Delta)$ любой корень вида $\pm(e_i + e_j)$ можно перевести либо в корень $e_1 + e_{k+1}$, либо в корень $-e_1 - e_{k+1}$. В случае четного l эти корни переходят друг в друга при одновременной смене координат, а в случае нечетного l пара $(\mathrm{A}_{l-1}, X(\mathrm{A}_{l-1}))$ не является максимальной, так как содержится в собственной параболической паре.

• В качестве $\Delta = \mathrm{D}_k + \mathrm{D}_{l-k}$ можно взять корни $\pm e_i \pm e_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant k$ или $k+1 \leqslant i < j \leqslant l$. Группа $W(\Delta)$ состоит из произвольных перестановок индексов $1 \leqslant i \leqslant k$, произвольных перестановок индексов $k+1 \leqslant j \leqslant n$ и произвольных *четных* замен знаков при e_i и *четных* замен знаков при e_j. В группе $X(\Delta)$, *кроме того*, есть элемент, одновременно меняющий знаки при e_1 и e_{k+1}, а при $k = l-k$ еще и элемент, производящий перестановку блоков $\{1, \ldots, k\}$ и $\{k+1, \ldots, l\}$. Так как $l \geqslant 3$, то этими преобразованиями любой корень из $\Phi\setminus\Delta$ можно привести к виду $e_1 + e_{k+1}$, как и утверждалось.

Случай F_4**.** В качестве корней $\Phi = \mathrm{F}_4$ можно взять $\pm e_i \pm e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, – длинные корни и $\pm e_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, и $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ – короткие корни. Зафиксируем следующее множество простых корней

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \quad \alpha_2 = e_3 - e_4, \quad \alpha_3 = e_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4),$$

максимальным корнем относительно этого порядка является $\delta = e_1 + e_2$. Так как $\Delta = \mathrm{D}_4$ образует множество длинных корней Φ, нам остается рассмотреть три другие подсистемы максимального ранга B_4, $\mathrm{A}_1 + \mathrm{C}_3$ и $\mathrm{A}_2 + \widetilde{\mathrm{A}}_2$.

• Система B_4 состоит из тех же корней, что и выше, т.е. из всех корней, координаты которых в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 целые. Группа Вейля $W(\mathrm{B}_4) = \mathrm{Oct}_4$ состоит из произвольных перестановок e_1, e_2, e_3, e_4 и произвольных замен знаков при них. Ясно, что этими преобразованиями любой корень вида $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ можно перевести в корень $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

• В качестве $\Delta = \mathrm{A}_1 + \mathrm{C}_3$ возьмем подсистему, порожденную δ и $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Также и для нее $X(\Delta) = W(\Delta)$. Система Δ содержит 8 длинных корней $\pm e_1 \pm e_2$ и $\pm e_3 \pm e_4$. Отражениями относительно этих корней любой из 16 остальных длинных корней $\pm e_i \pm e_j$, где $i = 1, 2$ и $j = 3, 4$, можно перевести в корень $e_1 + e_3$. Кроме того, система Δ содержит 12 коротких корней, а именно $\pm e_3$, $\pm e_4$ и $\pm\frac{1}{2}(e_1 - e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Остаются еще 12 коротких корней $\pm e_1$, $\pm e_2$ и $\pm\frac{1}{2}(e_1 + e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Уже отражениями относительно перечисленных выше длинных корней и отражениями относительно корней e_3 и e_4, которые реализуют смену знака двух последних координат, любой из первых четырех корней переводится в e_2, а любой из остальных восьми – в $\pm\frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$. Осталось заметить, что $w_4(e_2) = \pm\frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$.

• В качестве $\Delta = \mathrm{A}_2 + \widetilde{\mathrm{A}}_2$ возьмем подсистему, порожденную δ, α_1 и α_3, α_4. Группа Вейля $W(\Delta)$ имеет индекс 2 в $X(\Delta)$, в качестве внешнего автоморфизма можно взять $w = w_{e_1 - e_2} w_{e_3}$. Уже относительно подгруппы $W(\mathrm{A}_2 + \widetilde{\mathrm{A}}_1)$, где $\widetilde{\mathrm{A}}_1 = \langle \alpha_3 \rangle$, оставшиеся 18 длинных корней образуют две орбиты, а именно,

$$X = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_1 + e_3), \pm(e_2 + e_3)\}, \quad Y = \{\pm e_i \pm e_4, 1 \leqslant i \leqslant 3\}.$$

Ясно, что w_4 сливает эти орбиты. С другой стороны, из оставшихся 18 коротких корней 6 корней $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ транзитивно переставляются уже группой Вейля $W(\mathrm{A}_2)$. Остальные 12 коротких корней, а именно,

$$\pm\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3\pm e_4),\quad \pm\frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3\pm e_4),\quad \pm\frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3\pm e_4),$$

транзитивно переставляются $W(\mathrm{A}_2+\widetilde{\mathrm{A}}_1)$, где $\widetilde{\mathrm{A}}_1=\langle\alpha_3\rangle$, и внешним автоморфизмом w. Ясно, что w_4 сливает две эти орбиты, что завершает разбор случая $\Phi=\mathrm{F}_4$.

Случай G_2**.** Для $\Phi=\mathrm{G}_2$ подсистема A_2 образует множество длинных корней, так что нам остается лишь рассмотреть подсистему $\Delta=\mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_1$. Нарисовав картинку, каждый может *увидеть*, что четверная группа $W(\Delta)$ транзитивно действует на четверке длинных и четверке коротких корней, не попавших в Δ.

§5. Случай E_6

Для E_6 нам остается рассмотреть три случая $\Delta=\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1, 3\mathrm{A}_2, \mathrm{D}_4$. Старший корень системы E_6 равен $\delta=\eta_{78}$.

Подсистема $\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1$**.** Положим

$$\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1=\langle\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\rangle+\langle\delta\rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_6^+\setminus(\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1)^+$ состоит в точности из всех 20 корней γ_{ijh}.

Ясно, что уже $W(\mathrm{A}_5)$, которая переставляет координаты $1,2,3,4,5,6$, действует транзитивно на множестве всех *положительных* корней такого типа. С другой стороны, w_δ меняет знак корней типа γ, например, $w_\delta(\gamma_{123})=-\gamma_{456}$.

Подсистема $3\mathrm{A}_2$**.** Положим

$$3A_2=\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle+\langle\alpha_5,\alpha_6\rangle+\langle\alpha_2,\alpha_0\rangle.$$

Множество $(\mathrm{E}_6\setminus 3\mathrm{A}_2)^+$ состоит из 27 корней, а именно

$$\beta_{ij},\ i>3\geqslant j;\quad \gamma_{ijk},\quad \{i,j,k\}\neq\{1,2,3\},\{4,5,6\}.$$

Вспомнив, что w_{ij} переставляет e_i и e_j, мы видим, что уже группа Вейля $W(\langle\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6\rangle)$ транзитивно действует на множествах

$$X=\{\beta_{ij}, i>3\geqslant j\},$$
$$Y=\{\gamma_{ijk}, 1\leqslant i,j\leqslant 3; 4\leqslant k\leqslant 6\},$$
$$Z=\{\gamma_{ijk}, 1\leqslant i\leqslant 3; 4\leqslant j,k\leqslant 6\},$$

причем $(\mathrm{E}_6 \setminus 3\mathrm{A}_2)^+ = X \sqcup Y \sqcup Z$.

С другой стороны, так как $\gamma_{124} \in Y$ и $w_2(\gamma_{124}) = \beta_{43}$, то X и Y лежат в одной орбите, а так как $w_{145}(\gamma_{456}) = \beta_{61}$, то X и Z лежат в одной орбите. Теперь воспользуемся внешним автоморфизмом $w' = w_{14}w_{25}w_{36}$. Он меняет местами $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ и $\langle\alpha_5, \alpha_6\rangle$, а $\langle\alpha_4, \alpha_0\rangle$ оставляет на месте. При этом $w'(\beta_{14}) = -\beta_{14}$, что и заканчивает доказательство транзитивности в этом случае.

Подсистема D_4**.** Положим

$$\mathrm{D}_4 = \langle\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle.$$

Множество $(\mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{D}_4)^+$ состоит из следующих 24 корней: 9 корней вида β_{i1} и β_{6i}, 14 корней вида γ_{ijh}, где $i, j, h > 1$, и γ_{1i6}, где $2 \leqslant i \leqslant 5$, а так же корня δ.

Под действием группы Вейля $W(\langle\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle)$ типа A_3, переставляющей e_2, e_3, e_4, e_5, эти корни разбиваются на следующие семь орбит: по три орбиты корней типов β и γ

$$P = \{\beta_{i1},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}, \quad Q = \{\beta_{6i},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}, \quad U = \{\beta_{61}\},$$

$$V = \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j, k \leqslant 5\}, \quad X = \{\gamma_{ij6},\ 2 \leqslant i, j \leqslant 5\}, \quad Y = \{\gamma_{1j6}\}.$$

и орбиту старшего корня $Z = \{\delta\}$.

Добавив теперь корень α_2, мы видим, что эти орбиты сливаются в три 8-элементные орбиты, $P \cup V$, $Q \cup Y$ и $U \cup X \cup Z$. В самом деле, первые два слияния вытекают из равенств $w_{134}(\gamma_{345}) = \beta_{51}$ и $w_{136}(\gamma_{123}) = \beta_{62}$, а третье – из равенств $w_{123}(\delta) = \gamma_{456}$ и $w_{134}(\gamma_{346}) = \beta_{61}$.

Осталось воспользоваться внешними автоморфизмами $w' = w_{16}w_\delta$ и $w'' = w_{12}w_{345}$. Имеем $w'(\beta_{12}) = \beta_{62}$, поэтому *с точностью до знака* под действием $X(S)$ орбиты $P \cup V$ и $Q \cup Y$ сливаются. С другой стороны, $w''(\beta_{62}) = \beta_{61}$, поэтому сливаются орбиты $Q \cup Y$ и $U \cup X \cup Z$. Для завершения доказательства транзитивности остается лишь заметить, что $w'(\beta_{16}) = -\beta_{16}$.

§6. Случай E_7

Для E_7 нам остается рассмотреть шесть случаев

$$\Delta = \mathrm{D}_6 + \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_7, \mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_2, \mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1, 7\mathrm{A}_1, \mathrm{E}_6.$$

Старший корень системы E_7 равен $\delta = \eta_{18}$.

Подсистема $\mathrm{D}_6+\mathrm{A}_1$**.** Положим

$$\mathrm{D}_6+\mathrm{A}_1=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle+\{\delta\}.$$

Множество $\mathrm{E}_7^+\setminus(\mathrm{D}_6+\mathrm{A}_1)^+$ состоит из 32 корней

$$\beta_{1i},\ i\geqslant 2;\quad \gamma_{ijk},\ 2\leqslant i,j,k\leqslant 7;\quad \eta_{i8},\ i\geqslant 2.$$

Уже под действием группы Вейля $W(\langle\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle)$ типа A_5 эти корни разбиваются на 3 орбиты: $X=\{\pm\beta_{1i}\}$, $Y=\{\pm\gamma_{ijk}\}$, $Z=\{\pm\eta_{i8}\}$. Остается заметить, что под действием $W(\mathrm{D}_6)$ происходит слияние орбит *с точностью до знака*, а именно, $w_{123}(\gamma_{234})=\beta_{14}$ и $w_{123}(\eta_{48})=\gamma_{567}$. А использование дополнительно $W(\mathrm{A}_1)$ позволяет менять знак: $w_{25}w_{36}w_{47}w_\delta(\gamma_{234})=-\gamma_{234}$.

Подсистема A_7**.** Положим

$$\mathrm{A}_7=\langle\delta,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle.$$

Ясно, что $(\mathrm{E}_7\setminus\mathrm{A}_7)^+$ состоит из 35 корней γ_{ijk}. Уже с помощью группы Вейля $W(A_6)$ для системы $\mathrm{A}_6=\langle\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle$ все такие положительные корни переставляются между собой. А знак меняется при помощи δ: $w_\delta(\gamma_{234})=-\gamma_{567}$.

Подсистема $\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2$**.** Положим

$$\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2=\langle\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle+\langle\delta,\alpha_1\rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_7^+\setminus(\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2)^+$ состоит из 45 корней

$$\beta_{1i},\ i\geqslant 2;\quad \gamma_{ijk},\ |\{i,j\}\cap\{1,2\}|\leqslant 1;\quad \eta_{i8},\ 3\leqslant i\leqslant 7.$$

Под действием группы Вейля $W(\langle\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\rangle)$ типа $\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_4$ получаем 4 орбиты

$$U=\{\beta_{ij},\ i=1,2;\ 3\leqslant j\leqslant 7\},\qquad V=\{\eta_{i8},\ 3\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$X=\{\gamma_{1ij},\ \gamma_{2ij},\ 3\leqslant i,j\leqslant 7\},\qquad Y=\{\gamma_{ijk},\ 3\leqslant i,j,k\leqslant 7\}.$$

Теперь равенство $w_{123}(\beta_{41})=\gamma_{234}$ показывает, что под действием $W(\Delta)$ происходит слияние U и X. Равенство $w_{123}(\gamma_{456})=\eta_{78}$ показывает, что происходит слияние V и Y. Наконец, равенство $w_\delta(\beta_{13})=\eta_{28}$ показывает, что происходит слияние U и V. Таким образом, уже $W(\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2)$ действует транзитивно на $\mathrm{E}_7^+\setminus(\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2)^+$. Осталось заметить, что внешний автоморфизм $w_{32}w_{145}w_{167}$ переводит γ_{145} в $-\gamma_{145}$.

Подсистема $\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1$**.** Это наиболее интересный случай среди всех подсистем E_7. Положим

$$\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1 = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle + \langle \delta \rangle + \langle \alpha_7 \rangle + \langle \gamma_{167} \rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_7^+ \setminus (\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1)^+$ состоит из 48 корней.

Как обычно, прежде всего, мы рассмотрим орбиты группы Вейля $W(\langle \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7 \rangle)$, получающейся пересечением групп Вейля $\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1$ и $\mathrm{A}_6 = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle$. При этом получается 9 орбит:

$P = \{\beta_{i1},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}$, $Q = \{\beta_{i1},\ i = 6, 7\}$,

$R = \{\beta_{7i}, \beta_{6i},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}$,

$S = \{\gamma_{1ij},\ 2 \leqslant i \leqslant 5, j = 6, 7\}$, $T = \{\gamma_{i67},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}$,

$U = \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j \leqslant 5, k = 6, 7\}$, $V = \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j, k \leqslant 5\}$,

$X = \{\eta_{i8},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}$, $Y = \{\eta_{i8},\ i = 6, 7\}$.

Посмотрим теперь на слияние этих орбит под действием $w_2 = w_{123}$ и w_{167}:

- Из равенства $w_{123}(\beta_{41}) = \gamma_{234}$ следует, что P сливается с V.
- Из равенства $w_{123}(\beta_{61}) = \gamma_{236}$ следует, что Q сливается с U.
- Из равенства $w_{123}(\beta_{72}) = \gamma_{137}$ следует, что R сливается с S.
- Из равенства $w_{123}(\eta_{48}) = \gamma_{567}$ следует, что X сливается с T.
- Из равенства $w_{123}(\eta_{78}) = \gamma_{456}$ следует, что Y сливается с U.
- Из равенства $w_{167}(\beta_{21}) = \gamma_{267}$ следует, что P сливается с T.

Таким образом, под действием группы Вейля $W(\mathrm{D}_4 + 2\mathrm{A}_1)$ у нас получилось три 16-элементных орбиты $P \cup T \cup V \cup X$, $Q \cup U \cup Y$ и $R \cup S$. Так как они остаются отдельными орбитами под действием группы Вейля $W(\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1)$, это наводит на мысль о тройственности.

Рассмотрим следующие три элемента $w_{46}w_{146}$, $w_{267}w_{\eta_{28}}$, $w_{61}w_{\delta}$. Легко проверить, что они действительно сохраняют D_4 и один экземпляр A_1, переставляя два других. Таким образом, они действительно являются внешними автоморфизмами системы $\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1$. Посмотрим на орбиты корней под действием этих внешних автоморфизмов:

- Из равенства $w_{46}w_{146}(\beta_{21}) = \gamma_{246}$ следует, что P сливается с U.

∘ Из равенства $w_{61}w_\delta(\beta_{21})=\beta_{26}$ следует, что R сливается с U, *с точностью до знака*.

Но поменять знак тоже нетрудно:

∘ $w_{61}w_\delta(\beta_{61})=-\beta_{61}$.

Подсистема $7\mathrm{A}_1$**.** Положим

$$7\mathrm{A}_1=\langle\gamma_{123}\rangle+\langle\gamma_{145}\rangle+\langle\gamma_{167}\rangle+\langle\gamma_{246}\rangle+\langle\gamma_{257}\rangle+\langle\gamma_{347}\rangle+\langle\gamma_{356}\rangle.$$

Множество $(\mathrm{E}_7\setminus 7\mathrm{A}_1)^+$ состоит из 56 корней. Посмотрим, как устроена группа $X(7\mathrm{A}_1)$. Внутренние автоморфизмы системы $7\mathrm{A}_1$ порождаются коммутирующими отражениями относительно корней из $(7\mathrm{A}_1)^+$ и, следовательно, образуют группу порядка 2^7. Кроме того, имеется семейство внешних автоморфизмов вида $w_{ij}w_{kl}$. Причём для любой пары (ij) найдётся 2 пары $(k_1,l_1),(k_2,l_2)$ такие, что вышеуказанный элемент будет внешним автоморфизмом $7\mathrm{A}_1$.

Пользуясь этими автоморфизмами, совсем просто доказать транзитивность нормализатора $7\mathrm{A}_1$ на дополнении подсистемы $7\mathrm{A}_1$. Любой β_{mn} мы сможем перевести сначала в β_{1n}. Для этого надо воспользоваться внешним автоморфизмом $w_{ij}w_{kl}$, где $(ij)=(1m)$, а (kl) это та из двух пар, которая не содержит n. Точно таким же способом β_{1n} мы переводится в β_{12}.

Рассмотрим теперь корень вида γ_{ijh}, не принадлежащий $7\mathrm{A}_1$. По построению $7\mathrm{A}_1$ существует единственный корень $\gamma_{ijk}\in\mathrm{A}_7$, такой, что $k\neq h$. Тогда $w_{ijk}(\gamma_{ijh})=\beta_{hk}$. Таким образом, все такие корни так же переводятся в β_{12}. Наконец, $w_{123}(\eta_{i8})=\gamma_{456}$ так что такой корень тоже переводится в β_{12}. Остаётся поменять знак, а это нетрудно: $w_{\beta_{12}}w_{\beta_{47}}(\beta_{12})=-\beta_{12}$.

Подсистема E_6**.** В качестве системы типа E_6 мы, как и в параграфе 1, возьмем

$$\mathrm{E}_6=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\rangle.$$

Таким образом, $\mathrm{E}_7\setminus\mathrm{E}_6$ состоит из тех корней, у которых коэффициент при e_7 не равен нулю.

Под действием группы Вейля $W(\langle\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\rangle)$ типа A_5 мы получаем три очевидные орбиты:

$$X=\{\beta_{i7},\ 1\leqslant i\leqslant 6\},\quad Y=\{\gamma_{ij7},\ 1\leqslant i,j\leqslant 6\},\quad Z=\{\eta_{i8},\ 1\leqslant i\leqslant 6\}.$$

Заметив, что $w_{\gamma_{456}}(\beta_{67})=\gamma_{457}$ и $w_{\gamma_{457}}(\gamma_{123})=\eta_{67}$, мы получим транзитивность группы $W(\mathrm{E}_6)$ *с точностью до знака*.

Для того, чтобы убедиться в возможности смены знака, придётся воспользоваться внешним автоморфизмом системы E_6: $w_{\alpha_{27}} w_{\eta_1} w_{\beta_{127}}(\alpha_{27}) = -\alpha_{27}$.

§7. Случай E_8

Для E_8 нам остается рассмотреть восемь случаев

$$\Delta = \mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1, \mathrm{D}_8, \mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_8, 2\mathrm{D}_4, 2\mathrm{A}_4, 4\mathrm{A}_2, 8\mathrm{A}_1.$$

Старший корень системы E_7 равен $\delta = \zeta_8$.

Подсистема $\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1$**.** Положим

$$\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle + \langle \delta \rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1)^+$ состоит из 56 корней, которые разбиваются под действием группы Вейля $W(\langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle)$ типа A_6 на четыре орбиты

$$U = \{\beta_{i8},\ 1 \leqslant i \leqslant 7\}, \qquad V = \{\gamma_{ij8},\ 1 \leqslant i, j \leqslant 7\},$$

$$X = \{\eta_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant 7\}, \qquad Y = \{\zeta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 7\}.$$

Как обычно, добавление отражения $w_2 = w_{123}$ сливает эти орбиты *с точностью до знака*, а отражение w_δ переводит $\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1)^+$ в $\mathrm{E}_8^- \setminus (\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1)^-$.

Замечание. С точки зрения теории представлений здесь изложена конструкция алгебры Ли типа E_8 как прямой суммы алгебры Ли $\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1$ и тензорного произведения 56-мерного представления алгебры E_7 с естественным представлением алгебры A_1. Транзитивность действия $W(\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1)$ означает, что это представление неприводимо, что очевидно. Указанное разложение на орбиты $56 = 7 + 21 + 21 + 7$ описывает распадение 56-мерного представления при ограничении на A_6.

Подсистема D_8**.** Положим

$$\mathrm{D}_8 = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \delta \rangle.$$

Множество $(\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{D}_8)^+$ состоит из 64 корней, которые разбиваются на четыре орбиты под действием группы Вейля $W(\langle \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \rangle)$ типа A_6:

$$U = \{\beta_{1i},\ 2 \leqslant i \leqslant 8\}, \quad V = \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j, k \leqslant 8\},$$

$$X = \{\eta_{ij},\ 2 \leqslant i,j \leqslant 8\}, \qquad Y = \{\zeta_1\}.$$

Как обычно, добавление отражения $w_2 = w_{123}$ сливает эти орбиты *с точностью до знака*, а отражение w_δ переводит $(\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{D}_8)^+$ в $(\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{D}_8)^-$.

Замечание. С точки зрения теории представлений здесь изложена конструкция алгебры Ли типа E_8 как прямой суммы алгебры Ли D_8 и ее полуспинорного представления размерности 128. Транзитивность действия $W(\mathrm{D}_8)$ означает, что это представление неприводимо, что совершенно очевидно.

Подсистема $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$. Зафиксируем следующую подсистему $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$:

$$\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle + \langle \alpha_8, \delta \rangle.$$

В этом случае $|\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_6 + 3\mathrm{A}_2)^+| = 81$. Мы хотим воспользоваться случаем $(\mathrm{E}_6, 3\mathrm{A}_2)$ и для этого сейчас мы напомним, как выглядела подсистема $3\mathrm{A}_2$ в E_6 – вместе с исходной A_2 эти три экземпляра A_2 как раз и дадут систему $4\mathrm{A}_2$, которую мы рассмотрим чуть ниже:

$$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle, \qquad \langle \alpha_5, \alpha_6 \rangle, \qquad \langle \alpha_2, \eta_{78} \rangle.$$

Корней, ортогональных ровно к одному из этих A_2 в $\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_6 + 3\mathrm{A}_2)^+$, ровно 27 штук. В самом деле, положительных корней, ортогональных к A_2 в E_8 ровно 36 штук, из которых 6 лежат в E_6, а еще 3 – в дополнительной A_2.

Как будет доказано в пункте, посвященном случаю $(\mathrm{E}_8, 4\mathrm{A}_2)$, каждый корень из дополнения к $4\mathrm{A}_2$ ортогонален хотя бы к одной из A_2. В частности, это так для дополнения к E_6+A_2; а так как все корни, ортогональные к исходной копии $\mathrm{A}_2 = \langle \alpha_2, \eta_{78} \rangle$, попадают в E_6, то каждый корень из $\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_6 + 3\mathrm{A}_2)^+$ ортогонален к одному из A_2, сидящих в E_6. Объединение трех множеств, каждое из которых содержит 27 корней, в том и только том случае имеет порядок 81, когда эти множества попарно не пересекаются.

Это снова приводит к тройственности: построенные в §5 элементы группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$, переставляющие три копии A_2 внутри E_6, естественно, переставляют и ортогональные к ним корни в E_8. Таким образом, уже группа Вейля $W(\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2)$ транзитивно переставляет корни $\mathrm{E}_8^+ \setminus (\mathrm{E}_6 + 3\mathrm{A}_2)^+$ *с точностью до знака*.

Чтобы доказать транзитивность на всех корнях, необходимо воспользоваться внешним автоморфизмом системы $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$. А именно,

$$w = w_{\eta_{12}} w_{\eta_{34}} w_{\eta_{56}} w_{\eta_{78}}.$$

Ясно, что все корни $\eta_{12}, \eta_{34}, \eta_{56}, \eta_{78}$ ортогональны к $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6$ и α_8, и, значит, w оставляет их на месте. Теперь прямое вычисление показывает, что

$$w(\alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), \qquad w(\alpha_2) = -(\alpha_2 + \alpha_4),$$
$$w(\alpha_5) = -(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6), \qquad w(\delta) = -(\alpha_8 + \delta).$$

Таким образом, w индуцирует внешний автоморфизм порядка 2 одновременно на E_6 и на E_2 и, тем самым, меняет знаки на корнях дополнения.

Замечание. Впрочем, в этом легко убедиться и без всех этих трудов. Во-первых, представление алгебры Ли $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$, являющееся тензорным произведением 27-мерного представления E_6 со старшим весом ϖ_1 и естественного представления A_2 со старшим весом ϖ_1, неприводимо. Во-вторых, внешний автоморфизм $\mathrm{E}_6+\mathrm{A}_2$ превращает этот модуль в тензорное произведение контраградиентных представлений: 27-мерного представления E_6 со старшим весом ϖ_6 и представления A_2 со старшим весом ϖ_2.

Подсистема A_8. Положим

$$\mathrm{A}_8 = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \delta \rangle.$$

Множество $(\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{A}_8)^+$ состоит из следующих 84 корней

$$\{\gamma_{ijk},\ 1 \leqslant i, j, k \leqslant 8\}, \qquad \{\eta_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant 8\},$$

причем указанное выше разбиение – это в точности разбиение $(\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{A}_8)^+$ на две орбиты группы $W(\langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \rangle)$ типа A_7. Как мы знаем, применение w_δ переставляет эти классы между собой *с точностью до знака*: $w_\delta(\gamma_{678}) = -\eta_{67}$. Тот же самый внешний автоморфизм w, что и в случае $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$ реализует контраградиент A_8:

$$w(\alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), \qquad w(\alpha_5) = -(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),$$
$$w(\alpha_7) = -(\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8), \qquad w(\delta) = -(\alpha_8 + \delta),$$

и, тем самым, меняет знаки на корнях $\mathrm{E}_8 \setminus \mathrm{A}_8$.

Замечание. С точки зрения теории представлений здесь изложена конструкция алгебры Ли типа E_8 как прямой суммы алгебры

Ли A_8 и двух 84-мерных представлений алгебры A_8, см., например, [10]. То, что каждое из этих представлений – представление на тривекторах и двойственное к нему – неприводимо, очевидно. Чтобы утверждать, что они переставляются между собой, достаточно знать, что $X(\mathrm{A}_8) \neq W(\mathrm{A}_8)$.

Теперь начинаются сложные случаи, для которых имеется несколько внешних автоморфизмов и проверка транзитивности потребует некоторых вычислений.

Подсистема $2\mathrm{D}_4$**.** Это, пожалуй, самый интересный случай. Положим

$$2\mathrm{D}_4 = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle + \langle \alpha_7, \alpha_8, \delta, \gamma_{167} \rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_8^+ \setminus 2\mathrm{D}_4^+$ состоит из 96 корней. Прежде всего, рассмотрим действие $W(\mathrm{D}_4)$. Легко убедиться, что под действием группы Вейля $W(2\mathrm{D}_4)$ эти корни разбиваются *с точностью до знака* на три орбиты X, Y и Z, которые описываются следующим образом.

Вот первая орбита:

$$X = \{\beta_{1i},\ 2 \leqslant i \leqslant 5\} \cup \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i \leqslant 5,\ 6 \leqslant j, k \leqslant 8\} \cup$$

$$\{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j, k \leqslant 5\} \cup \{\eta_{ij},\ 2 \leqslant i \leqslant 5,\ 6 \leqslant j \leqslant 8\}.$$

То, что эти корни действительно попадают в одну орбиту, видно из действия $W(\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2)$ и того, что

$$w_{167}(\beta_{12}) = \gamma_{267}, \qquad w_{134}(\gamma_{267}) = \eta_{58}, \qquad w_{134}(\beta_{12}) = \gamma_{234}.$$

Вот вторая:

$$Y = \{\beta_{1i},\ 6 \leqslant i \leqslant 8\} \cup \{\gamma_{ijk},\ 2 \leqslant i, j \leqslant 5,\ 6 \leqslant k \leqslant 8\} \cup \{\gamma_{678}\}$$

$$\{\eta_{ij},\ 2 \leqslant i, j \leqslant 5\} \cup \{\eta_{ij},\ 6 \leqslant i, j \leqslant 8\} \cup \{\zeta_1\}.$$

Для проверки того, что эти корни действительно попадают в одну орбиту, заметим, что

$$w_{178}(\beta_{16}) = \gamma_{678}, \qquad w_{123}(\gamma_{678}) = \eta_{45}, \qquad w_{145}(\eta_{45}) = \zeta_1,$$

$$w_{123}(\beta_{16}) = \gamma_{236}, \qquad w_{145}(\gamma_{236}) = \eta_{78}.$$

И, наконец, третья:

$$Z = \{\beta_{ij},\ 2 \leqslant i \leqslant 5,\ 6 \leqslant j \leqslant 8\} \cup \{\gamma_{1jk},\ 2 \leqslant j \leqslant 5,\ 6 \leqslant k \leqslant 8\} \cup$$

$$\{\eta_{1j},\ 2 \leqslant j \leqslant 5\} \cup \{\zeta_i,\ 2 \leqslant i \leqslant 5\}.$$

В самом деле,

$$w_{167}(\beta_{26}) = \gamma_{127}, \qquad w_{\zeta_8}(-\beta_{28}) = \zeta_2, \qquad w_{123}(\zeta_2) = \eta_{13}.$$

Так как порядки всех орбит равны 32, снова естественно возникает мысль о тройственности и о том, что эти орбиты переставляются между собой – и с противоположными по знаку – при помощи внешних автоморфизмов $2\mathrm{D}_4$. Индекс $W(2\mathrm{D}_4)$ в $X(2\mathrm{D}_4)$ равен 12: имеется автоморфизм, переставляющий два экземпляра D_4, и 6 внешних автоморфизмов D_4, которые *одновременно* реализуются на обеих копиях D_4. Кстати, 2-часть этих внешних автоморфизмов – но, естественно, не 3-часть! – реализуется уже в D_8.

Вот эти внешние автоморфизмы. Первые две формулы

$$w_{578}w_{\eta_{56}}(\beta_{16}) = \eta_{15}, \quad w_{578}w_{\eta_{56}}(\beta_{16}) = \eta_{15}, \quad w_{578}w_{\eta_{56}}(\gamma_{578}) = -\gamma_{578}$$

убеждают нас в слиянии орбит с точностью до знака, а третья формула показывает, что можно сменить знак.

Подсистема $2\mathrm{A}_4$**.** Положим

$$2\mathrm{A}_4 = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \delta \rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_8^+ \setminus 2\mathrm{A}_4^+$ состоит из 100 корней. Под действием группы Вейля $W(\langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \rangle)$ типа $2\mathrm{A}_3$ эти корни разбиваются на следуюшие восемь орбит

$$P = \{\beta_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant 4,\ 5 \leqslant k \leqslant 8\}, \quad Q = \{\gamma_{ijk},\ 1 \leqslant i,j \leqslant 4,\ 5 \leqslant k \leqslant 8\},$$

$$R = \{\gamma_{ijk},\ 1 \leqslant i \leqslant 4,\ 5 \leqslant j,k \leqslant 8\}, \qquad S = \{\gamma_{ijk},\ 5 \leqslant i,j,k \leqslant 8\},$$

$$U = \{\eta_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant 4\}, \qquad V = \{\eta_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant 4, 5 \leqslant j \leqslant 8\},$$

$$X = \{\eta_{ij},\ 5 \leqslant i,j \leqslant 8\}, \qquad Y = \{\zeta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\}.$$

Добавление действия $w_2 = w_{123}$ приводит к слияниям $P \cup Q$, $R \cup X$, $S \cup V$, $U \cup Y$:

$$w_{123}(\beta_{15}) = \gamma_{235}, \qquad w_{123}(\gamma_{456}) = \eta_{78},$$

$$w_{123}(\gamma_{567}) = \eta_{48}, \qquad w_{123}(\zeta_1) = \eta_{23}.$$

Теперь добавление действия w_δ приводит к слияниям $P \cup Q \cup U \cup Y$ и $R \cup S \cup V \cup X$, *с точностью до знака*:

$$w_\delta(\beta_{18}) = -\zeta_1, \qquad w_\delta(\gamma_{458}) = -\eta_{45}.$$

Это и будут орбиты действия $W(2\mathrm{A}_4)$.

Для доказательства транзитивности нам понадобятся внешние автоморфизмы. А именно, индекс $W(2\mathrm{A}_4)$ в $X(2\mathrm{A}_4)$ равен 4, чем мы сейчас и воспользуемся. Тот же внешний автоморфизм w, что и в случае $\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2$, реализует контраградиент одновременно на двух копиях A_4. Как мы уже знаем, $w(\alpha_5) = -(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)$, что позволяет сменить знак. Кроме того, можно переставить две копии A_4, например, так

$$w' = w_{\eta_{12}} w_{\eta_{34}} w_{15} w_{26} w_{37} w_{48}.$$

Это позволяет слить две орбиты, $w'(\beta_{15}) = \eta_{25}$.

Подсистема $4\mathrm{A}_2$**.** Положим

$$4\mathrm{A}_2 = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + \langle \alpha_2, \eta_{78} \rangle + \langle \alpha_5, \alpha_6 \rangle + \langle \alpha_8, \delta \rangle.$$

Множество $\mathrm{E}_8^+ \setminus 4\mathrm{A}_2^+$ состоит из 108 корней. Убедимся, прежде всего, что каждый из этих корней ортогонален хотя бы к одной копии A_2.

∘ Корни с равными коэффициентами при e_1, e_2 и e_3 ортогональны $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$.

∘ Корни с равными коэффициентами при e_4, e_5 и e_6, ортогональны $\langle \alpha_5, \alpha_6 \rangle$.

∘ Корни β_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $4 \leqslant j \leqslant 6$, ортогональны $\langle \alpha_8, \delta \rangle$.

∘ Корни γ_{ijk}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $4 \leqslant j \leqslant 6$, $k = 7, 8$, ортогональны $\langle \beta_{123}, \gamma_{78} \rangle$.

∘ Корни γ_{ijk}, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 6$, ортогональны $\langle \alpha_{78}, \delta_8 \rangle$

∘ Корни η_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $4 \leqslant j \leqslant 6$, ортогональны $\langle \beta_{123}, \gamma_{78} \rangle$

Однако, так как все корни, ортогональные к подсистеме типа A_2, образуют подсистему типа E_6, причем три другие копии A_2 сидят в этой подсистеме типа E_6 и никаких ортогональных к ним корней в E_6 нет, то каждый корень из $\Phi \setminus \Delta$ ортогонален ровно к одной из наших подсистем A_2, что дает разбиение $\Phi \setminus \Delta$ на четыре подмножества, каждое из которых содержит 54 корня, ортогональных к какой-то из наших A_2. То, что на этих множествах $X(4\mathrm{A}_2)$ действует транзитивно, известно из случая $(\mathrm{E}_6, 3\mathrm{A}_2)$. А именно, в §5 мы доказали, что эти корни транзитивно переставляются уже в $N_{W(\mathrm{E}_6)}(W(3\mathrm{A}_2)) \leqslant X(4\mathrm{A}_2)$.

Теперь для завершения доказательства транзитивности достаточно сослаться на то, что любые две подсистемы типа A_2 сопряжены в $W(\mathrm{E}_8)$, так что найдется элемент из $X(S)$, переставляющий между собой наши A_2 – и, следовательно, так же и ортогональные к ним множества! Для полноты построим эти внешние автоморфизмы системы $4\mathrm{A}_2$ явно:

∘ Элемент $w_{14}w_{25}w_{36}$ переставляет между собой первую и третью копии A_2, оставляя на месте остальные.

∘ Элемент $w_{457}w_{\eta_{67}}w_{\zeta_6}$ переставляет между собой вторую и четвертую копии A_2, оставляя на месте остальные.

∘ Элемент $w_{47}w_{58}w_{\zeta_6}$ переставляет между собой третью и четвертую копии A_2, оставляя на месте остальные.

Подсистема $8\mathrm{A}_1$**.** Положим

$$8\mathrm{A}_1 = \langle\alpha_3\rangle + \langle\alpha_5\rangle + \langle\alpha_7\rangle + \langle\zeta_8\rangle + \langle\alpha_2\rangle + \langle\gamma_{145}\rangle + \langle\gamma_{167}\rangle + \langle\eta_{18}\rangle.$$

Мы сведем доказательство к случаю $(\mathrm{E}_7, 7\mathrm{A}_1)$ при помощи *примерно* такого же рассуждения, как то, которым мы только что свели случай $(\mathrm{E}_8, 4\mathrm{A}_2)$ к случаю $(\mathrm{E}_6, 3\mathrm{A}_2)$.

Прежде всего докажем, что каждый корень E_8 ортогонален к какому-то A_1 из $8\mathrm{A}_1$.

∘ Если коэффициент при e_8 у корня равен 0, то этот корень ортогонален ζ_8.

∘ Если коэффициент при e_8 у корня не равен 0, то он имеет вид β_{i8}, γ_{ij8}, η_{i8} или ζ_i. Каждый из этих корней ортогонален по крайней мере одному из корней α_3, α_5, α_7 – а именно, тому α_k, для которого $i, j \neq k, k+1$.

Все корни, ортогональные к какому-то одному A_1, образуют систему E_7. То, что на тех 112 из них, которые не принадлежат $8\mathrm{A}_1$, группа $X(8\mathrm{A}_1)$ действует транзитивно, известно из случая $(\mathrm{E}_7, 7\mathrm{A}_1)$. А именно, в §6 мы доказали, что эти корни транзитивно переставляются уже в $N_{W(\mathrm{E}_7)}(W(7\mathrm{A}_1)) \leqslant X(8\mathrm{A}_1)$.

Теперь завершить доказательство еще проще, чем в предыдущем случае. А именно, если там множества корней, ортогональных к различным копиям A_2, попарно не пересекались, то теперь любые два таких множества имеют непустое пересечение. Это вытекает из того, что любые две подсистемы типа $2\mathrm{A}_1$ в E_8 сопряжены при помощи элемента $W(\mathrm{E}_8)$ и, значит, для любого из них ортогональное дополнение такое же, как для системы $\langle\eta_{18}\rangle+\langle\delta\rangle$, а в этом последнем случае оно имеет тип D_6. Это значит, что любые два множества корней, ортогональные к любым двум данным A_1 пересекаются по 48 элементам. Но это и значит, что $X(8\mathrm{A}_1)$ действует на $\mathrm{E}_8 \setminus 8\mathrm{A}_1$ транзитивно. Мы не будем явно строить соответствующие внешние автоморфизмы системы $8\mathrm{A}_1$, хотя и в данном случае сделать это несложно.

Литература

1. А. Борель, Ж. Титс, *Унипотентные элементы и параболические подгруппы редуктивных групп.* I. — Математика. Период сб. перев. ин. статей **12** (1971), 97–104.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV – VI. М., 1972, с. 1–334.
3. Н. А. Вавилов, *Максимальные подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный расщепимый тор.* — В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей Вып. 1. Л., 1986, с. 67–75.
4. Н. А. Вавилов, *Весовые элементы групп Шевалле.* — Докл. АН СССР **298**, № 3 (1988), 524–527.
5. Н. А. Вавилов, *Теоремы сопряженности для подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **299**, № 2 (1988), 269–272.
6. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. Об-ва **1** (1990), 64–109.
7. Н. А. Вавилов, *Унипотентные элементы в подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор.* — Докл. РАН **328**, № 5 (1993), 536–539.
8. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
9. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле.* — Докл. РАН **338**, № 6 (1994), 725–727.
10. Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили, *Классификация тривекторов в девятимерном пространстве.* — Труды Семинара по Вект. и Тенз. Анализу **18** (1978), 197–233.
11. Е. Б. Дынкин, *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* — Мат. сб. **30**, № 2 (1952), 349–362.
12. Р. Картер, *Классы сопряженных элементов в группе Вейля.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М., Мир, 1973, с. 288–306.
13. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* М., Наука, 1972, с. 1–292.
14. A. Borel, J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés connexes de rang maximal des groupes de Lie clos.* — Comm. Math. Helv. **23,** No. 2 (1949), 200–221.

15. R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group.* — Compositio Math. **25,** No. 1 (1972), 1–59.
16. D. I. Deriziotis, *Centralizers of semi-simple elements in a Chevalley group.* — Comm. Algebra **9,** No. 19 (1981), 1997–2014.
17. A. J. Idowu, A. O. Morris, *Some combinatorial results for Weyl groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **101,** No. 3 (1987), 405–420.
18. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Comm. Algebra **24,** No. 1 (1996), 109–133.
19. R. B. Howlett, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups.* — J. London Math. Soc. **21,** No. 1 (1980), 62–80.
20. M. Golubitsky, B. Rothschild, *Primitive subalgebras of exceptional Lie algebras.* — Pacific J. Math. **39,** No. 2 (1971), 371–393.
21. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 233–280.
22. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure theorems for Lie algebras of type* E_l. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
23. N. Wallach, *On maximal subsystems of root systems.* — Canad. J. Math. **20,** No. 3 (1968), 555–574.

Vavilov N. A., Kharchev N. P. Orbits of subsystem stabilisers.

Let Φ be a reduced irreducible root system. We consider pairs $(S, X(S))$, where S is a closed set of roots, $X(S)$ is its stabiliser in the Weyl group $W(\Phi)$. We are interested in such pairs maximal with respect to the following order: $(S_1, X(S_1)) \leqslant (S_2, X(S_2))$ if $S_1 \subseteq S_2$ and $X(S_1) \leqslant X(S_2)$. Main theorem asserts that if Δ is a root subsystem such that $(\Delta, X(\Delta))$ is maximal with respect to the above order, then $X(\Delta)$ acts transitively both on the long and short roots in $\Phi \setminus \Delta$. This result is a broad generalisation of the transitivity of the Weyl group on roots of given length.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 30 октября 2006 г.