Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман

ПОЛИВЕКТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ GL_n

В настоящей работе мы характеризуем внешнюю степень $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$ над коммутативным кольцом как стабилизатор пересечения квадрик, заданных соотношениями Плюккера. Такое описание классически известно в случае поля характеристики 0 и по сути чрезвычайно близко к теореме Чжоу [24, 12], но, так как мы работаем над произвольным коммутативным кольцом, нам нужно установить изоморфизм внешней степени и стабилизатора плюккерова идеала *как групповых схем над* $\mathbb{Z}$. Нет никакого сомнения, что справедливость этого факта *непосредственно очевидна* каждому специалисту по теории алгебраических групп.

Однако, когда в связи с построением разложения унипотентов в поливекторных представлениях нам понадобилась *реальная* ссылка на уравнения, определяющие поливекторное представление, мы оказались в большом затруднении. Скорее всего, формулировки этого — и всех остальных фактов! – *в гораздо большей общности* похоронены *где-то* во французских работах начала 1960-х годов, но даже просто найти их в середине семнадцатого[1] тома Демазюра и Гротендика [29] или хотя бы второго[1] тома Демазюра и Габриэля [27] под силу только самым возвышенным умам, а о том, чтобы понять, что *именно* там написано, сегодня не может быть и речи, таких людей больше не делают.

Когда первый автор предложил второму в качестве темы дипломной работы построить и изучить трансвекции в поливекторном представлении, довольно скоро стало ясно, что в качестве первого шага необходимо *явно* выписать уравнения, определяющие $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$. После нескольких недель безуспешных попыток найти ответ в доступной [нашему пониманию] литературе, мы

На заключительном этапе работы над статьей первый автор пользовался поддержкой проектов РФФИ 03–01–00349 (ПОМИ РАН) и INTAS 03-51-3251.

[1]Если читатель не найдет соответствующих томов, пусть его это не удивляет (прим. редакторов).

пришли к выводу, что гораздо полезнее – и, во всяком случае, гораздо проще! – проделать все требуемые вычисления самостоятельно. Предлагаемая статья как раз и является *половиной* получившейся дипломной работы, вторая половина, посвященная собственно изучению трансвекций, публикуется отдельно [7].

С технической точки зрения настоящая статья является, *в основном* экзерсисом по теории аффинных групповых схем и теории алгебр Ли, все основные идеи доказательства почти без изменений взяты из работы Уильяма Уотерхауза [49]. В то же время, для алгебраически замкнутого поля положительной характеристики мы ссылаемся на *чрезвычайно* глубокие результаты Гари Зейтца о максимальных связных подгруппах алгебраических групп [40]. В действительности, и здесь мы могли бы доказать все необходимые нам факты непосредственно, примерно в том духе, как это делается в теореме 1 статьи [44], но это заметно удлинило бы эту часть работы, носящую для нас служебный характер. Зато мы подробнейшим образом документируем *все* детали вычисления алгебры Ли, которое служит моделью для наших следующих работ, посвященных доказательству аналогичных результатов для исключительных групп Шевалле.

§1. Разложение унипотентов

Настоящая работа возникла из попытки реализовать еще один фрагмент обрисованной в [8, 42], [44–46] программы *разложения унипотентов* в группах Шевалле над коммутативными кольцами. Общая идея этого подхода в явном виде возникла в диссертациях Алексея Степанова [15] для группы GL_n и первого автора [4] для других классических групп, а для исключительных групп намечена в [8]. Она состоит в доказательстве возможности представить унипотенты корневого типа в виде произведения унипотентов корневого типа, лежащих в собственных параболических подгруппах – в отличие от случая поля для произвольного коммутативного кольца это совершенно не очевидно! – и, *по возможности*, получения явных полиномиальных формул. При этом, различный выбор представлений и/или параболических подгрупп ведет к *разным* формулам, имеющим разную степень применимости и дающим несовпадающие оценки в различных конкретных задачах.

Более подробно классические случаи и 27-мерное представление группы типа E_6 исследуются в [44], а во введении к [46] обсуждаются дальнейшие перспективы. Все детали для *расщепимых* классических групп в векторном представлении приведены в работе Алексея Степанова и первого автора [42], а для 27-мерного представления E_6 и 56-мерного представления E_7 – в работе [45]. В работе Энтони Бака и первого автора [18] обсуждается обобщение на унитарные группы. Разложение унипотентов в присоединенных представлениях изучается в цикле работ первого автора и Евгения Плоткина, см. описание всего проекта в [46]. Часть этой программы реализована в [5], а присоединенное представление E_6 полностью рассмотрено в [6].

В дипломной работе второго автора, выполненной под руководством первого, результаты настоящей работы используются для геометрического построения и анализа элементов корневого типа в поливекторных представлениях группы $\mathrm{SL}(n, R)$. Известно, что над кольцом класс корневых элементов, сопряженных с элементарным корневым элементом, как правило, безнадежно мал, чтобы быть полезным при доказательстве структурных теорем. В то же время множество R-точек аффинной схемы, заданной уравнениями, которым удовлетворяют корневые элементы, слишком велико, чтобы позволять эффективные вычисления. В работах [44, 45] было предложено рассматривать различные промежуточные классы *элементов корневого типа*, играющие ту же роль, что обычные трансвекции для векторного представления, но в то же время учитывающие такие явления, как несюръективность внешней степени на точках, несовпадение разложимых и сингулярных поливекторов и нетривиальность группы Пикара.

Характеризация группы $\bigwedge^m(\mathrm{SL}_n)(R)$, полученная в настоящей работе, составляет основу для проверки того, что построенные нами трансвекции действительно лежат в $\bigwedge^m(\mathrm{SL}_n)(R)$, и всех обычных фактов о таких трансвекциях: теорем сложения и коммутирования, леммы Уайтхеда—Васерштейна и т.д. Эти результаты являются естественным шагом в направлении построения *геометрической алгебры*, см. [1, 12, 32, 41], для модулей, отличных от обычного векторного представления.

В свою очередь, в третьей работе этой серии на основе предшествующих геометрических результатов строится *разложение трансвекции* в поливекторном представлении. В действительности, на матричном языке близкие вычисления проделывались в диссертациях Алексея Степанова [15] и первого автора [4]. Однако язык миноров очень быстро приводит к неуклюжим и громоздким обозначениям и поэтому относящиеся к этому случаю результаты работ [15] и [4] так никогда и не были опубликованы – за исключением случая миноров второго порядка, который понадобился для анализа симплектической группы. Даже работа [42] содержит лишь набросок доказательств. Итогом настоящей работы является не только значительно более короткое и прозрачное доказательство этих результатов, но и их широкое обобщение. А именно, мы построим элементы корневого типа в стабилизаторах сингулярных столбцов грассмановых координат, про которые предполагается лишь, что они удовлетворяют соотношениям Плюккера. В то же время в вычислениях [15] и [4] явно предполагалось, что координаты этих столбцов являются минорами некоторой обратимой матрицы. Разумеется, такие миноры удовлетворяют соотношениям Плюккера, но над кольцом обратное неверно из-за препятствий типа K_0 – не каждый проективный модуль свободен!

С этой точки зрения поливекторные представления исключительно важны как модель для понимания более сложных случаев. С другой стороны, ими исчерпываются все фундаментальные представления типа A_l, а все остальные рациональные представления строятся из них при помощи стандартных конструкций.

§2. Внешняя алгебра: поливекторы

В этом и двух следующих параграфах мы напомним некоторые основные факты о внешних алгебрах $\bigwedge(V)$ и $\bigwedge(V^*)$, используемые в дальнейшем. Мы всюду предполагаем, что V – свободный модуль ранга n над коммутативным кольцом R с базисом $e_1, \dots, e_n$, а V^* – двойственный модуль с двойственным базисом $e_1^*, \dots, e_n^*$. В соответствии с традицией мы называем элементы модуля V **векторами**, а элементы модуля V^* – **ковекторами** или **внешними формами степени 1**.

Зафиксируем, прежде всего, нужные нам в дальнейшем теоретико-множественные обозначения. Поскольку множества являются частным случаем векторных пространств, в дальнейшем мы будем трактовать их как векторные пространства над полем из одного элемента. В частности, через $\bigwedge^m(\Omega)$ будет обозначаться множество всех m-элементных подмножеств в Ω (см., например,

[11]). Мощность множества Ω обозначается через $|\Omega|$. В дальнейшем мы будем интересоваться случаем $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. В этом случае $|\bigwedge^m(\Omega)| = \mathrm{C}_n^m$, где через C_n^m, как обычно, обозначается биномиальный коэффициент.

Пусть теперь $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ – какое-то m-элементное подмножество Ω. Обычно мы располагаем i_j в порядке возрастания, $i_1 < \ldots < i_m$, но иногда удобнее задавать элементы i_j вразбивку. В этом случае мы обозначаем через $\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m)$ знак соответствующего размещения, равный $(-1)^{\mathrm{inv}(i_1,\ldots,i_m)}$, где через $\mathrm{inv}(i_1, \ldots, i_m)$ обозначено число инверсий в последовательности $i_1, \ldots, i_m$, т.е. число пар $1 \leqslant j < h \leqslant m$ таких, что $i_j > i_h$. Обычно знак распространяется на мультимножества, при этом считается, что $\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m) = 0$, если среди i_j есть хотя бы два одинаковых.

Для любого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, универсальный объект в категории знакопеременных m-линейных отображений V в R-модули называется m-й внешней степенью $\bigwedge^m(V)$ модуля V. В качестве $\bigwedge^m(V)$ можно взять свободный модуль ранга C_n^m с базисом e_I индексированным m-элементными подмножествами I множества индексов $\{1, \ldots, n\}$. При этом знакопеременное m-линейное отображение $V \longrightarrow \bigwedge^m(V)$ на базисных элементах задается посредством формулы

$$(e_{i_1}, \ldots, e_{e_m}) \mapsto e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m) e_{\{i_1,\ldots,i_m\}}$$

а потом продолжается на весь модуль V по линейности. Иными словами, $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = 0$, если среди i_j есть хотя бы два одинаковых, если же они все попарно различны, то $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = \pm e_I$, где $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$, причем знак равен знаку перестановки, которую нужно применить к $i_1, \ldots, i_m$ для того, чтобы расставить их в каноническом порядке.

Элементы m-й внешней степени модуля V называются **m-векторами** или, если конкретное значение m не играет роли, просто **поливекторами**, причем m называется **степенью** поливектора. Те из них, которые можно представить в виде $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$ для подходящих векторов $u_1, \ldots, u_m$, называются **разложимыми поливекторами** или, иногда, **экстенсорами**. Внешняя алгебра $\bigwedge(V)$ является градуированной алгеброй, изоморфной как R-модуль прямой сумме $\bigoplus \bigwedge^m(V)$, $0 \leqslant m \leqslant n$. При этом умножение задается на разложимых поливекторах формулой

$$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k, x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \mapsto u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_m,$$

таким образом, степень произведения равна сумме степеней сомножителей, и продолжается на всю алгебру $\bigwedge(V)$ по линейности. Так определенное умножение $\wedge$ во внешней алгебре называется **внешним произведением**.

§3. Внешняя алгебра: внешние формы

Элементы внешней степени $\bigwedge^m(V^*)$, т.е. m-векторы над двойственным модулем V^*, по отношению к модулю V называются **внешними формами степени** m либо просто m**-формами**. В тех случаях, когда степень формы не имеет значения, она часто называется просто **внешней формой**. Внешняя степень $\bigwedge^m(V^*)$ отождествляется с $\bigwedge^m(V)^*$ посредством канонического спаривания, задаваемого на разложимых поливекторах и разложимых внешних формах формулой

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_m, u_1 \wedge \ldots \wedge u_m) \mapsto \det(v_i(u_j)),$$

где $v_1, \ldots, v_m \in V^*$, а $u_1, \ldots, u_m \in V$. Это спаривание единственным образом продолжается до спаривания между внешними алгебрами $\bigwedge(V)$ и $\bigwedge(V^*)$, образ которого на поливекторе и внешней форме различных степеней равен 0. Это спаривание устанавливает изоморфизм $\bigwedge(V^*)$ и $\bigwedge(V)^*$ как R-модулей.

В дальнейшем большую роль будут играть операции, сопряженные слева и справа к внешнему произведению, см. [2, 19, 21].

• А именно, **левым внутренним произведением** поливектора $x \in \bigwedge(V)$ и внешней формы $z \in \bigwedge(V^*)$, называется *внешняя форма* $x \lrcorner z \in \bigwedge(V^*)$ такая, что $(y, x \lrcorner z) = (y \wedge x, z)$ для всех поливекторов $y \in \bigwedge(V)$. Если степень x равна l, а степень z равна m, то степень $x \lrcorner z$ равна $m - l$.

• Аналогично, **правым внутренним произведением** поливектора $x \in \bigwedge(V)$ и внешней формы $z \in \bigwedge(V^*)$ называется *поливектор* $x \llcorner z \in \bigwedge(V)$ такой, что $(x \llcorner z, w) = (x, z \wedge w)$ для всех внешних форм $w \in \bigwedge(V^*)$. Если степень x равна l, а степень z равна m, то степень $x \llcorner z$ равна $l - m$.

В частном случае $l = m$ оба внутренних произведения совпадают со спариванием между $\bigwedge^m(V)$ и $\bigwedge^m(V^*)$, что, по-видимому, и объясняет их названия, так как с точки зрения общей алгебры они должны были бы называться *внешними* произведениями скорее, чем внутренними. С другой стороны, в случае линейной формы $z \in V^*$ внутреннее произведение превращается в дифференцирование:

$$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \llcorner z = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} (x_i, z) x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Для разнообразия перепишем это тождество на инвариантном языке:

$$(x \wedge y) \llcorner z = (x \llcorner z) \wedge y + (-1)^{\deg(x)} x \wedge (y \llcorner z)$$

для любых *однородных* x и y.

Из ассоциативности внешнего произведения следует, что левое внутреннее произведение задает на $\bigwedge(V^*)$ структуру *левого* $\bigwedge(V)$-модуля, а правое внутреннее произведение задает на $\bigwedge(V)$ структуру *правого* $\bigwedge(V^*)$-модуля:

$$(x \wedge y) \lrcorner z = x \lrcorner (y \lrcorner z), \qquad x \llcorner (z \wedge w) = (x \llcorner z) \llcorner w.$$

С учетом только что сказанного о действии линейных форм как дифференцирований $\bigwedge(V)$ и двойственного действия векторов как дифференцирований $\bigwedge(V^*)$ это значит, что элементы $\bigwedge(V^*)$ естественно истолковываются как дифференциальные операторы на $\bigwedge(V)$ и, наоборот, элементы $\bigwedge(V)$ действуют как дифференциальные операторы на $\bigwedge(V^*)$.

§4. Поливекторное представление GL_n

Выбрав базис $e_1, \ldots, e_n$ в V, мы можем отождествить группу $\mathrm{GL}(V)$ автоморфизмов модуля V с полной линейной группой $\mathrm{GL}(n, R)$. Для каждого m группа $\mathrm{GL}(n, R)$ естественно действует на $\bigwedge^m(V)$, а именно, действие матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ на разложимых m-векторах задается формулой

$$\bigwedge\nolimits^m(g)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_m) = gv_1 \wedge \ldots \wedge gv_m$$

для всех $v_1, \ldots, v_m \in V$. В базисе e_I, $I \in \bigwedge^m(\Omega)$, модуля $\bigwedge^m(V)$ матрица $\bigwedge^m(g)$ состоит из всех миноров m-го порядка матрицы g, лексикографически упорядоченных по строкам и столбцам. Теорема Бине–Коши утверждает, что

$$\bigwedge\nolimits^m : \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, R), \quad g \mapsto \bigwedge\nolimits^m(g),$$

является гомоморфизмом,

$$\bigwedge^m(hg) = \bigwedge^m(h)\bigwedge^m(g).$$

Таким образом, отображение $\pi : g \mapsto \bigwedge^m(g)$ является представлением степени C_n^m группы $\mathrm{GL}(n,R)$, которое называется m-**векторным представлением** или, на языке теории алгебраических групп, m-**м фундаментальным представлением** или представлением со старшим весом ϖ_m. Образ этого действия называется m-**й внешней степенью** группы $\mathrm{GL}(n,R)$ и обозначается через

$$\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,R)) \leqslant \mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, R).$$

В дальнейшем мы часто интересуемся действием элементарных матриц, в первую очередь, элементарных транвекций. Напомним, что элементарной трансвекцией называется матрица

$$t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \quad \xi \in R,$$

где, как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица. Все элементарные трансвекции порождают элементарную группу

$$\mathrm{E}(n,R) = \big\langle t_{ij}(\xi) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \xi \in R \big\rangle \leqslant \mathrm{GL}(n,R).$$

В случае поля элементарная группа совпадает со специальной линейной, $\mathrm{E}(n,K) = \mathrm{SL}(n,K)$.

Действие трансвекций на $\bigwedge^m(V)$ описывается совсем просто. А именно,

$$\bigwedge^m(t_{ij}(\xi))e_I = \begin{cases} e_I, & \text{если} \quad j \notin I, \\ e_I \pm e_{I\setminus\{j\}\cup\{i\}}, & \text{если} \quad j \in I. \end{cases}$$

В частности, из этой формулы видно, что все $\bigwedge^m(t_{ij}(\xi))$ являются *квадратичными* унипотентными матрицами, иными словами, все их собственные числа равны 1, а все жордановы блоки имеют порядок $\leqslant 2$. Знаки в этих формулах легко уточняются по весовым диаграммам, либо непосредственно, если заметить, что в появляющемся при действии на $e_{i_1\dots j\dots i_m}$ базисном элементе $e_{i_1\dots i\dots i_m}$ индекс i ставится на то же самое место, где стоял индекс j.

Многие важные подгруппы линейных групп естественно возникают как стабилизаторы подпространств – или, более общо, флагов, прямых разложений и других систем подпространств – в различных представлениях. В связи с этим ряд активно развивающихся в настоящее время проектов (классификация максимальных подгрупп, стабилизация K-функторов и т.д.) подчеркивает исключительную важность классификации орбит группы Шевалле, действующей на грассманианах для представлений наименьшей размерности. В нашем случае речь идет об орбитах группы $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$, действующей на модуле $\bigwedge^m(V)$. Однако даже для поля $R = K$ такая информация доступна лишь в немногочисленных простейших случаях. Сделаем несколько замечаний об этих орбитах.

Для любого поливектора $x \in \bigwedge^m(V)$ существует наименьшее пространство $U \leqslant V$ такое, что $x \in \bigwedge^m(U)$. Это пространство называется **носителем** x, а его размерность – **рангом** x. Хорошо известно, см., например, [1, 12], что ранг является единственным инвариантом бивекторов – или, двойственным образом, симплектических билинейных форм. Иными словами, каждый бивектор эквивалентен относительно действия $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$ одному из бивекторов вида $e_1 \wedge e_2 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}$, где $0 \leqslant 2r \leqslant n$. Однако уже для тривекторов в общем случае нет никакой столь же простой классификации.

Во-первых, очевидно, что ранг m-вектора может принимать лишь значения $0, m, m+2, m+3, \ldots, n$. Ясно, что с точностью до эквивалентности 0 является единственным тривектором ранга 0, а $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ – единственным тривектором ранга 3, и легко проверить, что любой тривектор ранга 5 эквивалентен $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_5$. В 1907 году В.Райхель открыл, что существует две орбиты комплексных тривекторов ранга 6, с представителями $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6$ и $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_6$ соответственно. Комплексные тривекторы ранга 7 были классифицированы в 1931 году Й.А.Схоутеном, а ранга 8 – в 1935 году Г. Б. Гуревичем; как оказалось, они разбиваются, соответственно, на 5 и на 13 орбит, что уже в восьмимерном пространстве дает 23 орбиты тривекторов: $23 = 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 13$. Только в 1978 году Эрнест Винберг и Александр Элашвили в замечательной работе [9] смогли сделать следующий шаг и классифицировать комплексные тривекторы ранга 9. Их анализ основан на исключительном вложении $\mathrm{A}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$ и связанной с ним градуировке алгебры Ли L типа E_8:

$$L = \bigwedge^3(V^*) \oplus \mathfrak{sl}(V) \oplus \bigwedge^3(V),$$

где $V = \mathbb{C}^9$. В этом случае число орбит бесконечно и они классифицируются с помощью принадлежащего Эрнесту Винбергу общего метода. Весьма значительная литература связана с обобщением этих результатов на случай произвольного поля, см., например, [22, 25, 31], [37–39], [50]. Уже проведенная Драгомиром Дьоковичем [31] классификация вещественных тривекторов в восьмимерном пространстве совершенно нетривиальна и основана на исключительном вложении $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$. Это показывает, что даже над полем попытка классифицировать поливекторы – не говоря уже о пространствах поливекторов! – в общем случае совершенно безнадежна.

§5. Соотношения Плюккера

В случае поля имеется простой классический критерий разложимости поливектора, состоящий в следующем: поливектор

$$x = \sum_{H \in \bigwedge^m(\Omega)} x_H e_H \in \bigwedge^m(V)$$

в том и только том случае разложим, когда его грассмановы координаты x_H, $H \in \bigwedge^m(\Omega)$, удовлетворяют **соотношениям Плюккера** – см. по этому поводу *любую* книгу по алгебраической геометрии, например, [10, 16, 17]. Соотношения Плюккера состоят в обращении в 0 некоторых однородных квадратичных многочленов $f_{I,J} \in R[x_H]^{H \in \bigwedge^m(\Omega)}$, от грассмановых координат x_H. Так как эти соотношения играют ключевую роль во *всех* последующих вычислениях, мы сейчас воспроизведем их в бескоординатной и координатной форме.

В действительности как форма, так и знаки этих соотношений легко усматриваются непосредственно по весовой диаграмме поливекторного представления, более подробно по этому поводу см. [44, 36, 45, 5]. Мы не будем здесь развивать эту тему, чтобы не увеличивать объем статьи, но следует иметь в виду, что все вычисления в §8 фактически проводились именно на весовых диаграммах и только потом превращены в формулы. Конечно, в данном случае при некоторой склонности к счету и упорстве все можно сделать вслепую, *без картинки*. Но нам трудно себе представить, что кто-то в состоянии вслепую проделать аналогичные вычисления для *исключительных* групп типов E_6, E_7 и E_8, к которым мы собираемся обратиться в одной из следующих работ.

Определение. *Поливектор* $x \in \bigwedge^m(V)$ *называется* **сингулярным**, *если*

$$x \wedge (x \llcorner z) = 0$$

для любой внешней формы $z \in \bigwedge^{m-1}(V^*)$.

Как мы только что заметили, для поля это условие в точности эквивалентно разложимости. Однако, в случае коммутативных колец разложимый вектор по-прежнему всегда сингулярен, но вот обратное совершенно неверно. В этом легко убедиться на простейших примерах. Например, над кольцом $R = K[a,b,c,d,e,f]/(af - be + cd)$ пфаффиан матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

равен 0 – это и есть единственное нетривиальное соотношение Плюккера в этом случае! – а ранг равен 4, см. [14]. Таким образом, бивектор

$$ae_1 \wedge e_2 + be_1 \wedge e_3 + ce_1 \wedge e_4 + de_2 \wedge e_3 + ee_2 \wedge e_4 + fe_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2(R^4)$$

сингулярен, но неразложим.

Фигурирующие в этом определении условия выражаются как наборы однородных квадратичных уравнений на грассмановы координаты поливектора x, которые, как раз, и называются соотношениями Плюккера. Взяв в качестве z базис пространства форм степени $m-1$, состоящий из $e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_{m-1}}$, где $I \in \bigwedge^{m-1}(\Omega)$ мы приходим к следующей координатной версии соотношений Плюккера. Пусть $I \in \bigwedge^{m-1}(\Omega)$ и $J \in \bigwedge^{m+1}(\Omega)$ соответствует многочлен

$$f_{I,J} = \sum_{j \in J \setminus I} \pm x_{I \cup \{j\}} x_{J \setminus \{j\}}$$

от грассмановых координат x_H, $H \in \bigwedge^m(\Omega)$. Уравнения на разложимые поливекторы как раз и состоят в том, что подстановка их грассмановых координат в каждый из этих многочленов дает 0.

Уточнить знаки здесь проще всего следующим образом. Для этого, прежде всего, расширим понятие грассмановых координат. А именно, положим $x_{i_1\dots i_m}=0$, если среди i_h есть повторяющиеся, и

$$x_{i_1\dots i_m}=\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_m)x_{\{i_1,\dots,i_m\}}$$

в противном случае. Например, $x_{21}=-x_{12}=-x_{\{1,2\}}$. Пусть теперь $I=\{i_1,\dots,i_{m-1}\}$ и $J=\{j_1,\dots,j_{m+1}\}$. Тогда точное определение многочлена $f_{I,J}$ таково:

$$f_{I,J}=\sum_{h=1}^{m+1}(-1)^h x_{i_1\dots i_{m-1}j_h}x_{j_1\dots\widehat{j_h}\dots j_{m+1}}.$$

Соотношение, получающееся в случае $I\subseteq J$, тривиально и состоит в том, что грассмановы координаты коммутируют. Однако, в случае $|I\cap J|\leqslant m-2$ получаются *нетривиальные* соотношения. Случай $|I\cap J|=m-2$ отвечает так называемым **коротким соотношениям Плюккера**, длина которых равна 3. Например, в случае $I=\{1,2,3\}$ и $J=\{1,2,4,5,6\}$ получается соотношение

$$x_{1234}x_{1256}-x_{1235}x_{1246}+x_{1236}x_{1245}=0.$$

Вообще, чем меньше пересечение I и J, тем больше длина соотношения, самое длинное соотношение получается, когда I и J дизъюнктны. Например, множествам $I=\{1,2,3\}$ и $J=\{1,4,5,6,7\}$ отвечает соотношение

$$x_{1234}x_{1567}-x_{1235}x_{1467}+x_{1236}x_{1457}-x_{1237}x_{1456}=0,$$

а множествам $I=\{1,2,3\}$ и $J=\{4,5,6,7,8\}$ – соотношение

$$x_{1234}x_{5678}-x_{1235}x_{4678}+x_{1236}x_{4578}-x_{1237}x_{4568}+x_{1238}x_{4567}=0.$$

Сейчас мы докажем, что элементарная группа $\mathrm{E}(n,R)$ сохраняет свойство поливектора быть сингулярным.

Предложение 1. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо. Группа $\bigwedge^m(\mathrm{E}(n,R))$ сохраняет идеал в кольце $R[x_H]$, $H\in\bigwedge^m(\Omega)$, порожденный многочленами Плюккера $f_{I,J}$, $I\in\bigwedge^{m-1}(\Omega)$ и $J\in\bigwedge^{m+1}(\Omega)$.*

Прежде, чем перейти к формальному доказательству, поясним, что здесь происходит по существу. Возьмем какое-нибудь нетривиальное соотношение Плюккера $f_{I,J}(x) = 0$, например, соотношение, отвечающее $I = \{1,2,3\}$ и $J = \{1,2,4,5,6\}$. Мы утверждаем, что при замене одной из цифр в первом или втором индексе – или одновременно в обоих индексах – на *любую* другую цифру происходит следующее.

• Либо соотношение вообще не меняется, например, когда 7 заменяется на 8.

• Либо к нему добавляются вырожденные слагаемые, например, когда 4 заменяется на 2.

• Либо, наконец, к нему прибавляются другие соотношения того же типа, например, когда 2 заменяется на 4.

Теперь, когда мы понимаем, чего ждать, можно читать – или не читать – доказательство.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и всех $\xi \in R$ действие $g = \bigwedge^m(t_{ij}(\xi))$ не меняет плюккеров идеал. Рассмотрим следующие случаи.

• Если $j \notin I \cup J$, то под действием g соотношение вообще не меняется.

• Если $i \in I$, то под действием g к соотношению добавляются только нулевые слагаемые.

• Если $j \notin I \cap J$, $i \in J \setminus I$, то $gf_{I,J}$ отличается от $f_{I,J}$ на вырожденные слагаемые, которые все равны 0, кроме ровно двух, возникающих с противоположными знаками.

• Если $j \in J \setminus I$, $i \notin I \cup J$, то $gf_{I,J} = f_{I,J} \pm \xi f_{I,J\setminus\{j\}\cup\{i\}}$.

• Если $j \in I \setminus J$, $i \notin I \cup J$, то $gf_{I,J} = f_{I,J} \pm \xi f_{I\setminus\{j\}\cup\{i\},J}$.

Таким образом, нам остается только разобрать сложные случаи, когда $j \in I \cap J$, а $i \notin I$.

• Если $j \in I \cap J$, $i \notin I \cup J$,

$$gf_{I,J} = f_{I,J} \pm \xi f_{I\setminus\{j\}\cup\{i\},J} \pm \xi f_{I,J\setminus\{j\}\cup\{i\}} \pm \xi^2 f_{I\setminus\{j\}\cup\{i\},J\setminus\{j\}\cup\{i\}}.$$

• Наконец, если $j \in I \cap J$, $i \in J \setminus I$, то после сокращения нулевых слагаемых, содержащих переменные x_H с повторяющимся индексом i, получается

$$gf_{I,J} = f_{I,J} \pm \xi f_{I\setminus\{j\}\cup\{i\},J} \pm \xi^2 f_{I\setminus\{j\}\cup\{i\},J\setminus\{j\}\cup\{i\}}.$$

Таким образом, всегда g переводит плюккеров многочлен в линейную комбинацию плюккеровых многочленов.

Следствие. *Пусть K – поле. Тогда группа $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,K))$ сохраняет идеал в кольце $K[x_I]$, $I \in \bigwedge^m(\Omega)$, порожденный многочленами Плюккера.*

Доказательство. Над полем $\bigwedge^m(\mathrm{SL}(n,K)) = \bigwedge^m(\mathrm{E}(n,K))$. Таким образом, чтобы убедиться, что $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,K))$ сохраняет идеал, порожденный многочленами Плюккера, остается только проверить, что его сохраняют элементарные псевдоотражения $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$, где $\varepsilon \in K^*$. Из проделанного в §7 вычисления вытекает, что действие $\bigwedge^m(d_i(\varepsilon))$ умножает каждый плюккеров многочлен на 1, ε или ε^2, что, конечно, не меняет идеала.

§6. Кое-что об аффинных групповых схемах

В оставшейся части статьи мы охарактеризуем группу $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$ как связную компоненту стабилизатора идеала $A = A_{nm}$ в кольце многочленов от переменных x_I, $I \in \bigwedge^m(\Omega)$, $\Omega = \{1,\dots,n\}$, порожденного соотношениями Плюккера. По духу эта характеризация чрезвычайно близка теореме Чжоу, см. [24, 12], и, несомненно, известна специалистам, но, поскольку мы работаем над произвольным коммутативным кольцом, нам нужно доказать изоморфизм $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$ и $\mathrm{Fix}(A)^o$ как аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.

Доказательства представляют собой упражнение по теории аффинных групповых схем, см., например, [28, 34, 47]. С учетом вычисления нормализатора внешней степени из работы [48] они почти буквально повторяют доказательства теорем 3.4, 5.5 и 6.5 работы Уильяма Уотерхауза [49], но при этом для характеризации внешней степени полной линейной группы над алгебраически замкнутым полем мы ссылаемся на чрезвычайно глубокие результаты Евгения Дынкина и Гари Зейтца [13, 39].

Пусть вначале $f_1,\dots,f_s$ суть произвольные многочлены от t переменных с коэффициентами из кольца R (в большинстве реально возникающих приложений $R = \mathbb{Z}$ или $R = \mathbb{Z}[1/2]$). Мы интересуемся теми линейными заменами переменных $g \in \mathrm{GL}(t,R)$, которые сохраняют условие, что все эти многочлены одновременно обращаются в 0.

Иными словами, мы рассматриваем все $g \in \mathrm{GL}(t, R)$, сохраняющие идеал A кольца $R[x_1, \dots, x_t]$, порожденный $f_1, \dots, f_s$. Последнее условие означает, что для любого многочлена $f \in A$ многочлен $f \circ g$, получающийся из f заменой переменных g, снова принадлежит A. Хорошо известно – см., например [30], лемма 1 или [49], предложение 1.4.1, – что множество $G(R) = \mathrm{Fix}_R(A) = \mathrm{Fix}_R(f_1, \dots, f_s)$ всех таких линейных замен переменных g образует группу. Для любой R-алгебры S с 1 мы можем рассмотреть $f_1, \dots, f_s$ как многочлены с коэффициентами из S и, таким образом, группа $G(S)$ определена для всех R-алгебр.

Легко видеть, что $G(S)$ функториально зависит от S. Однако, легко привести примеры, показывающие, что $S \mapsto G(S)$ *не обязано* быть аффинной групповой схемой над R. Это связано с тем, что $G(R)$ ЗАДАЕТСЯ СРАВНЕНИЯМИ, А НЕ УРАВНЕНИЯМИ НА МАТРИЧНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ. Однако в [49], теорема 1.4.3 и далее, приведено простое *достаточное* условие для того, чтобы $S \mapsto G(S)$ было аффинной групповой схемой. Обозначим через $R[x_1, \dots, x_t]_r$ подмодуль многочленов степени, не превосходящей r. Для наших целей вполне достаточно следствия 1.4.6 работы [49], относящегося к случаю $R = \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_t]$ – многочлены степени, не превосходящей r, и A – порожденный ими идеал. Тогда для того, чтобы функтор $S \mapsto \mathrm{Fix}_S(f_1, \dots, f_s)$ был аффинной групповой схемой, достаточно, чтобы ранг пересечения $A \cap R[x_1, \dots, x_t]_r$ не менялся при редукции по модулю любого простого числа $p \in \mathbb{Z}$.*

Применим эту лемму к случаю идеала $A = A_{nm}$ в $\mathbb{Z}[x_I]$, $I \in \wedge(\Omega)$, порожденного соотношениями Плюккера. Для любого коммутативного кольца R положим $G_{nm}(R) = \mathrm{Fix}_R(A_{mn})$.

Лемма 2. *Для любых m, n функтор $R \mapsto G_{nm}(R)$ является определенной над $\mathbb{Z}$ аффинной групповой схемой.*

Доказательство. Для любого простого p соотношения Плюккера независимы по модулю p, так как, придавая переменным x_I подходящие значения, можно добиться того, чтобы одно из соотношений приняло значение 1, в то время как все остальные обратились в 0. В самом деле, для этого достаточно положить $x_I = x_J = 1$ для двух m-элементных подмножеств $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$, для которых $|I \cap J| \leqslant m - 2$, и $x_L = 0$ для всех остальных

m-элементных подмножеств. Произведение $x_I x_J$ входит в единственное соотношение Плюккера и каждое соотношение Плюккера состоит из произведений такого вида.

Для доказательства основного результата настоящей работы нам понадобятся еще несколько известных фактов. Во-первых, следующий результат по существу сводит проверку изоморфизма аффинных групповых схем к проверке изоморфизма их значений на алгебраически замкнутых полях и двойных числах над ними. Напомним, что алгебра $K[\delta]$ двойных чисел над полем изоморфна как K-модуль $K \oplus K\delta$, а умножение в ней задается посредством $\delta^2 = 0$. Следующая лемма представляет собой теорему 1.6.1 работы [49]. Через G здесь обозначается аффинная групповая схема над $\mathbb{Z}$, через G^0 – ее связная компонента, через $G(K)$ – ее группа K-точек, через G_K – схема, получающаяся из G заменой скаляров, а через $\mathrm{Lie}(G_K)$ – алгебра Ли схемы G_K. Некоторая громоздкость формулировки связана с тем, что схемы G и H априори не предполагаются ни связными, ни гладкими.

Лемма 3. *Пусть G и H – аффинные групповые схемы конечного типа над $\mathbb{Z}$, причем G плоская, а $\phi : G \longrightarrow H$ – морфизм групповых схем. Предположим, что для любого алгебраически замкнутого поля K выполняются следующие условия:*

- $\dim(G_K) \geqslant \dim_K(\mathrm{Lie}(H_K))$,
- *ϕ индуцирует мономорфизмы групп точек*

$$G(K) \longrightarrow H(K), \qquad G(K[\delta]) \longrightarrow H(K[\delta]),$$

- *нормализатор $\phi(G^0(K))$ в $H(K)$ содержится в $\phi(G(K))$.*

Тогда ϕ является изоморфизмом групповых схем над $\mathbb{Z}$.

Заметим, что в нашем случае условия на схемы выполнены автоматически. Все рассматриваемые схемы имеют конечный тип, являясь подсхемами в подходящих GL_n. Условие же плоскости следует из того, что схема G будет либо связной, либо иметь вид $G^0 \leftthreetimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а для схемы G^0 все редуцированные схемы G^0_K будут гладкими связными схемами одинаковой размерности, а именно, $G^0 = \mathrm{GL}_n/\mu_m$. Таким образом, нам нужно лишь научиться проверять сформулированные в лемме условия.

§7. Случай алгебраически замкнутого поля

Следующие результаты классически известны, [23]. На другом языке они обсуждаются в работе [48], см., например, теорему 4. То, что π неприводимо и тензорно неразложимо, сразу вытекает из того, что π микровесовое.

Лемма 4. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Для любых n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, ядро представления π группы $\mathrm{GL}(n, K)$ со старшим весом ϖ_m равно μ_m.*

Лемма 5. *Рассматриваемая как подгруппа в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$, алгебраическая группа $G = \pi(\mathrm{GL}(n, K))$ неприводима и тензорно неразложима.*

Лемма 6. *За исключением случая, когда $n \geqslant 4$ четно, а $m = n/2$ группа G совпадает с нормализатором $N(G)$. В исключительном случае половинной размерности группа G имеет индекс 2 в своем нормализаторе.*

В качестве представителя $N(G) \setminus G$ в исключительном случае можно взять матрицу линейного отображения chow, задаваемого на базисе пространства $\bigwedge^m(K^n)$ посредством $e_I \mapsto e_{I'}$, где I' – дополнение к m-элементному множеству I в множестве индексов $\{1, \ldots, n\}$.

В классической работе [13] Евгений Дынкин описал максимальные связные замкнутые подгруппы простых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 – точнее, свел их явное описание к теории представлений простых алгебраических групп. Гари Зейтц [40] обобщил это описание на случай подгрупп в классических алгебраических группах над произвольным алгебраически замкнутым полем, при этом использовались результаты работы [43]. Один из основных результатов работы [40] состоял в следующем. Пусть V – векторное представление $\mathrm{SL}(V)$ и X – простая алгебраическая подгруппа в $\mathrm{SL}(n, K)$ такая, что ограничение $V|X$ модуля V на X неприводимо и тензорно неразложимо. Тогда либо X максимальна среди связных замкнутых подгрупп в $\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{Sp}(V)$ или $\mathrm{SO}(V)$, либо X вместе с содержащей ее замкнутой связной подгруппой приведена в явном списке исключений, Таблица 1 работы [40]. Критерий ортогональности/симплектичности представления устанавливается в [3, Глава III, §7, предложение 12]. Для интересующего нас случая ответ приведен также в Таблице 1 книги [4]. Комбинируя этот критерий с теоремой 1 работы [40] и Таблицей 1 той же работы, в которой группа типа A_l никогда не появляется в поливекторном представлении в графе "X", мы получаем следующий результат.

Лемма 7. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Для любых n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, группа $G = \bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,K))$ максимальна среди связных замкнутых подгрупп в одной из следующих групп:*

- *в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$, если $m \neq n/2$;*
- *в $\mathrm{GSp}(\mathrm{C}_n^m, K)$, если $m = n/2$ нечетно;*
- *в $\mathrm{GO}^0(\mathrm{C}_n^m, K)$, если $m = n/2$ четно.*

В случае $m = n/2$ указанные классические группы являются единственными собственными связными надгруппами G.

Доказательство. Строго говоря, приведенное выше рассуждение показывает, что из результатов статьи [40] вытекает не сам этот результат для указанных в формулировке групп, а лишь аналогичный результат для их коммутантов, так что мы можем гарантировать только, что для связной замкнутой подгруппы

$$\bigwedge\nolimits^m(\mathrm{GL}(n,K)) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$$

выполняется следующая альтернатива:

- либо H содержит $\mathrm{SL}(\mathrm{C}_n^m, K)$,
- либо $m = n/2$ и H содержит $\mathrm{Sp}(\mathrm{C}_n^m, K)$ или $\mathrm{SO}(\mathrm{C}_n^m, K)$, в зависимости от четности m.

Поэтому мы должны проследить еще за судьбой одномерного тора. Рассмотрим m-ю внешнюю степень псевдоотражения

$$g = d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}, \qquad \varepsilon \in K^*.$$

Ясно, что

$$\bigwedge\nolimits^m(g)e_I = \begin{cases} \varepsilon e_I, & i \in I \\ e_I, & i \notin I \end{cases}.$$

Таким образом, матрица $\bigwedge^m(g)e_I$ имеет $d = \mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$ собственных значений ε и C_{n-1}^m собственных значений 1 и, в частности, ее определитель принимает все значения из $K^{*d} = K^*$, что сразу влечет максимальность $G = \bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,K))$ в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$ при

$m \neq n/2$. При $m = n/2$ нужно лишь заметить, что ровно половина собственных значений преобразования $\bigwedge^m(g)$ равна ε: если $i \in I$, то $i \notin I'$. С другой стороны, билинейная форма B, определяющая классическую группу, в которой содержится группа $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(2m, K))$, определяется на базисе посредством $B(e_I, e_J) = 0$, если $J \neq I'$ и $B(e_I, e'_I)e_\Omega = e_I \wedge e_{I'}$. Как очень хорошо известно, см., например, [1, 12], преобразования вида $\mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \dots, 1)$, где количество ε равно количеству 1, как раз и порождают вместе с простой классической группой связную компоненту соответствующей группы подобий, т.е. одну из групп $\mathrm{GSp}(\mathrm{C}_n^m, K)$ или $\mathrm{GO}^0(\mathrm{C}_n^m, K)$, указанных в формулировке леммы.

Отсюда сразу следует совпадение групп $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K))$ и $G^0_{nm}(K)$ над алгебраически замкнутым полем.

Предложение 2. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Тогда*

$$\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K)) = G^0_{nm}(K).$$

Доказательство. Из предложения 1 мы знаем, что $G = \bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K))$ сохраняет соотношения Плюккера, и, таким образом, $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K)) \leqslant G_{nm}(K)$, а так как $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K))$ связна, то $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K)) \leqslant G^0_{nm}(K)$. С другой стороны, из предыдущей леммы вытекает, что в случае $m \neq n/2$ группа $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, K))$ максимальна среди связных замкнутых подгрупп в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$. Поскольку $G_{nm}(K)$ – собственная подгруппа в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}_n^m, K)$, это сразу влечет заключение леммы. То же рассуждение годится для случая $m = n/2$, нужно лишь заметить, что за исключением случая $n = 4$, $m = 2$ классические группы $\mathrm{GSp}(\mathrm{C}_n^m, K)$ и $\mathrm{GO}^0(\mathrm{C}_n^m, K)$ не сохраняют соотношений Плюккера.

§8. Алгебра Ли, стабилизирующая систему форм

Таким образом, нам остается лишь проверить, что схема G_{nm} гладкая, т.е., фактически, вычислить размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm})$. Как вычислять алгебру Ли, стабилизирующую систему форм, хорошо известно, см., например, [33, с. 256–258], но, конечно, до появления теории аффинных групповых схем в положительной характеристике отсюда нельзя было извлечь информацию про группу, стабилизирующую ту же систему форм. Мы в своем вычислении опять же следуем Уильяму Уотерхаузу [49], где почти в точности такие же вычисления проводятся в леммах 3.2, 5.3 и 6.3.

Пусть, как и выше, K – поле. Тогда алгебру Ли $\mathrm{Lie}(G_K)$ аффинной групповой схемы G_K проще всего представлять себе как ядро гомоморфизма $G(K[\delta]) \longrightarrow G(K)$, при котором δ отображается в 0, см. [27, 34, 47]. Пусть G является подсхемой в GL_n. Тогда $\mathrm{Lie}(G_K)$ состоит из матриц вида $e+z\delta$, где $z \in \mathrm{M}(n,K)$, удовлетворяющих условиям, определяющим $G(K)$. Конкретизируем это утверждение для случая, когда G – стабилизатор системы многочленов.

Лемма 8. *Пусть $f_1,\dots,f_s \in K[x_1,\dots,x_t]$. Тогда для того, чтобы матрица $e+z\delta$, где $z \in \mathrm{M}(t,K)$, принадлежала $\mathrm{Lie}(\mathrm{Fix}_K(f_1,\dots,f_s))$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $h=1,\dots,s$ выполнялось уравнение*

$$\sum z_{ij} x_i \frac{\partial f_h}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant t.$$

Следующий результат доказывается точно так же, как лемма 5.3 работы [49]. В действительности эта лемма как раз и является частным случаем следующей леммы, относящимся к $m=2$. При этом в [49] внешний квадрат $\bigwedge^2(V)$ интерпретировался как пространство кососимметрических матриц, а соотношения Плюккера – как равенство нулю всех подпфаффианов 4-го порядка.

Предложение 3. *Для произвольного поля K размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$ не превосходит n^2.*

Доказательство. В нашем случае полиномиальные переменные x_I занумерованы множествами $I \in \bigwedge^m(\Omega)$, $\Omega = \{1,\dots,n\}$, так что вместо i и j в предыдущей лемме мы будем писать I и J, малые же буквы i и j используются для обозначения *элементов* этих множеств: $I=\{i_1,\dots,i_m\}$, $J=\{j_1,\dots,j_m\}$, при этом обычно предполагается, что элементы i_p м j_q расположены в порядке возрастания, т.е. $i_1<\dots<i_m$ и $j_1<\dots<j_m$. При этом нам будет удобнее обозначать z_{IJ} через z^I_J – что, кстати, соответствует традиционному различению ковариантных и контравариантных индексов, – а скобки при перечислении элементов I и J обычно будут опускаться, так что мы пишем просто $z^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_m}$ вместо $z^{\{i_1,\dots,i_m\}}_{\{j_1,\dots,j_m\}}$. Иногда удобнее индексировать переменные x_I

и коэффициенты z_J^I элементами множеств I и J, расположенными в произвольном порядке, но тогда нужно иметь в виду, что получившиеся переменные $x_{i_1\ldots i_m}$ будут отличаться от исходных переменных x_I на знак соответствующей перестановки множества I, а коэффициенты z_J^I – на произведение знаков перестановок I и J, так что, например, $z_{213}^{231} = -z_{123}^{123}$.

С другой стороны, уравнениями в нашем случае являются соотношения Плюккера, так что вместо h мы будем писать пару множеств K и L, где $K \in \bigwedge^{m-1}(\Omega)$, а $L \in \bigwedge^{m+1}(\Omega)$, причем K не содержится в L. Таким образом, сформулированные в предыдущей лемме условия примут вид

$$\sum z_J^I x_I \frac{\partial f_{K,L}}{\partial x_J} = 0, \qquad I, J \in \bigwedge^m(\Omega),$$

для каждой такой пары (K, L). Как сами эти соотношения, так и соотношения Плюккера однородны степени 2 по переменным x_I, поэтому эти условия сводятся просто к тому, что левые части этих соотношений являются скалярными линейными комбинациями плюккеровых многочленов. Априори число коэффициентов z_J^I равно $(\mathrm{C}_n^m)^2$. Сейчас мы покажем, что специальный вид плюккеровых многочленов приводит к большому количеству линейных зависимостей между z_J^I.

Легко видеть, что частная производная $\dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_J}$ равна 0, за исключением следующих двух случаев. Во-первых, если $J = K \cup \{i\}$, для некоторого i, то эта производная равна $\pm x_{L\setminus\{i\}}$. Во-вторых, если $J = L \setminus \{i\}$ для некоторого i, то эта производная равна $\pm x_{K\cup\{i\}}$. Так как K не содержится в L, то эти случаи не могут встретиться одновременно. Ниже нам потребуется уточнить знак в этих производных, это делается следующим образом. Пусть $K = \{k_1, \ldots, k_{m-1}\}$ и $L = \{l_1, \ldots, l_{m+1}\}$, причем индексы расположены в порядке возрастания, т.е. $k_1 < \ldots < k_{m-1}$ и $l_1 < \ldots < l_{m+1}$. Тогда

$$\frac{\partial f_{K,L}}{\partial x_{K\cup\{l_p\}}} = (-1)^p x_{l_1\ldots\widehat{l_p}\ldots l_{m+1}}, \qquad \frac{\partial f_{K,L}}{\partial x_{L\setminus\{l_p\}}} = (-1)^p x_{k_1\ldots k_{m-1} l_p}.$$

Отсюда сразу вытекает, что большинство коэффициентов z_J^I равны 0. В самом деле, пусть $|I \cup J| \geqslant m+2$. Положим $K = I\setminus\{i_m\}$, $L = J \cup \{i_m\}$. Так как по крайней мере *два* элемента множества

I не принадлежат J, то $K \not\subseteq L$. Это значит, что $\dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_J} = \pm x_I$, а так как ни в каких других слагаемых переменная x_I не появляется, то отвечающее паре (K, L) уравнение содержит член $\pm z_J^I x_I^2$. Однако плюккеровы соотношения не содержат квадратов переменных x_I и, значит, все коэффициенты z_J^I, отвечающие парам (I, J) таким, что $|I \cup J| \geqslant m + 2$, равны 0 и они не дают никакого вклада в размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$. Это значит, что в дальнейшем нам достаточно ограничиться теми I и J, для которых $|I \cup J| \leqslant m + 1$.

Оценим теперь количество линейно независимых коэффициентов среди z_J^I, где $|I \cup J| = m + 1$. Пусть, скажем, $I = \{i_1, \dots, i_{m-2}, r, p\}$, а $J = \{i_1, \dots, i_{m-2}, r, q\}$, где $p \neq q$. Возьмем теперь индекс s, отличный от $i_1, \dots, i_{m-2}, r, p, q$, положим

$$K = \{i_1, \dots, i_{m-2}, r\}, \qquad L = \{i_1, \dots, i_{m-1}, s, p, q\}$$

и рассмотрим соответствующее этой паре уравнение. Легко видеть, что моном $x_I x_H$, где $H = \{i_1, \dots, i_{m-2}, s, p\}$, входит в это уравнение дважды, один раз как $x_I \dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_J}$, а второй раз как $x_H \dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_M}$, где $M = \{i_1, \dots, i_{m-2}, s, q\}$. Однако так как мономы вида $x_I x_H$, где $|I \cap H| = m - 1$, в плюккеровы соотношения не входят, коэффициенты у этих двух вхождений должны сокращаться. Непосредственное вычисление, учитывающее описанное выше правило знаков для частных производных, показывает, что

$$z_{i_1 \dots i_{m-2} rq}^{i_1 \dots i_{m-2} rp} = z_{i_1 \dots i_{m-2} sq}^{i_1 \dots i_{m-2} sp}.$$

Несколько раз применяя это соотношение, легко убедиться, что каждый из коэффициентов z_J^I, где $|I \cup J| = m + 1$, может быть приведен к одному из следующих трех видов:

- $z_{1 \dots, m-1, q}^{1 \dots, m-1, p}$, где $m \leqslant p \neq q \leqslant n$;
- $z_{1 \dots \hat{i} \dots mp}^{1 \dots m}$, либо $z_{1 \dots m}^{1 \dots \hat{i} \dots mp}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$ и $m + 1 \leqslant p \leqslant n$;
- $z_{1 \dots \hat{j} \dots, m+1}^{1 \dots \hat{i} \dots, m+1}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$.

Ясно, что количество таких коэффициентов равно $(n-m)(n-m-1)$, $2m(n-m)$ и $m(m-1)$, соответственно, и, таким образом, суммарный вклад коэффициентов z_J^I, где $|I \cup J| = m+1$, в размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$ не превосходит $n(n-1)$.

Нам осталось лишь оценить вклад коэффициентов z_I^I. Пусть, скажем, $I = \{i_1, \dots, i_{m-2}, p, q\}$, где $p \neq q$, а r, s – еще два различных индекса, попарно отличных от $i_1, \dots, i_{m-2}, p, q$. Положим

$$K = \{i_1, \dots, i_{m-2}, p\}, \qquad L = \{i_1, \dots, i_{m-1}, q, r, s\}$$

и рассмотрим соответствующее этой паре уравнение. Ясно, что моном $x_I x_H$, где $H = \{i_1, \dots, i_{m-2}, r, s\}$, входит в это уравнение дважды, один раз как $x_I \dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_I}$, а второй раз как $x_H \dfrac{\partial f_{K,L}}{\partial x_H}$, где $H = \{i_1, \dots, i_{m-2}, r, s\}$. Однако моном вида $x_I x_H$, где $|I \cap H| = m-2$, входит в единственное плюккерово соотношение, причем – быть может с точностью до знака – с тем же коэффициентом, что и моном вида $x_J x_M$, где $J = \{i_1, \dots, i_{m-2}, p, r\}$, $M = \{i_1, \dots, i_{m-2}, q, s\}$. Снова непосредственное вычисление, учитывающее знаки частных производных, показывает, что коэффициенты z_I^I удовлетворяют соотношению

$$z_{i_1 \dots i_{m-2} pq}^{i_1 \dots i_{m-2} pq} + z_{i_1 \dots i_{m-2} rs}^{i_1 \dots i_{m-2} rs} = z_{i_1 \dots i_{m-2} pr}^{i_1 \dots i_{m-2} pr} + z_{i_1 \dots i_{m-2} qs}^{i_1 \dots i_{m-2} qs}.$$

Несколько раз применяя это соотношение, легко убедиться, что каждый коэффициент z_I^I, может быть выражен как линейная комбинация следующих двух типов коэффициентов:

- $z_{1, \dots, m-1, p}^{1, \dots, m-1, p}$, где $m \leqslant p \leqslant n$;
- $z_{1 \dots \hat{i} \dots m+1}^{1 \dots \hat{i} \dots m+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$.

Таким образом количество линейно независимых среди коэффициентов z_I^I не превосходит $(n-m)+m = n$, и, окончательно, размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$ не превосходит $n(n-1)+n = n^2$, что и завершает доказательство теоремы.

§9. Характеризация $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)$

У нас все готово, чтобы завершить доказательство следующей теоремы, утверждающей, что *над любым коммутативным кольцом* внешняя степень полной линейной группы может быть охарактеризована как связная компонента стабилизатора плюккерова идеала.

Теорема 1. *Для любого коммутативного кольца R и любых n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, имеет место равенство*

$$\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n, R)) = G_{nm}^{\circ}(R).$$

Эта теорема сразу вытекает из следующего более общего результата, в котором мы проверяем выполнение всех условий леммы 7 для $\bigwedge^m$, рассматриваемого как морфизм аффинных групповых $\mathbb{Z}$-схем. В следующей теореме через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ обозначается *постоянная схема* из двух элементов, записываемая, как и все остальные аффинные групповые схемы, мультипликативно, так что мы обозначаем ее элементы через ± 1. Напомним, что для кольца R порядок $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(R)$ равен 2^s, где s – количество неразложимых компонент R. Для алгебраически замкнутого поля K сформулированный здесь изоморфизм сразу вытекает из предложения 2 и леммы 6, но, так как мы работаем над произвольным кольцом, нам необходимо доказать изоморфизм над $\mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Для любых n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, имеет место изоморфизм аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$:*

$$G_{nm} \cong \begin{cases} \mathrm{GL}_n/\mu_m & m \neq n/2, \\ \\ \mathrm{GL}_n/\mu_m \leftthreetimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & m = n/2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим морфизм алгебраических групп

$$\textstyle\bigwedge^m : \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathrm{C}_n^m}, \quad g \mapsto \bigwedge^m(g).$$

Как мы знаем из леммы 4, ядро этого морфизма равно μ_m, а в силу предложения 1 его образ содержится в G_{nm}. Это значит, что $\bigwedge^m$ индуцирует мономорфизм алгебраических групп

$$\phi : \mathrm{GL}_n/\mu_m \longrightarrow G_{nm}.$$

Очевидно, что в случае $m = n/2$ преобразование chow, заданное на базисе внешней степени посредством $e_I \mapsto e_{I'}$, переводит плюккеровы соотношения в такие же соотношения и, следовательно, лежит в G_{nm}. Это определяет копию $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ внутри G_{nm}, так что в этом случае мы получаем морфизм

$$\mathrm{GL}_n/\mu_m \leftthreetimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_{nm},$$

отображающий $(g, 1)$ в $\phi(g)$, а $(g, -1)$ в $\phi(g)\,\mathrm{chow}$, который мы будем обозначать той же буквой ϕ. Мы хотим применить к так определенному морфизму ϕ лемму 3 чтобы заключить, что ϕ является изоморфизмом аффинных групповых схем, при этом $H = G_{nm}$, а

G – группа, стоящая в правой части равенства в условии теоремы.

В случае $m = n/2$ из-за дополнительного множителя $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ уже не совсем ясно, что так расширенное ϕ по прежнему является мономорфизмом. Однако для алгебраически замкнутого поля K из предложения 2 вытекает, что chow не лежит в связной компоненте G^0_{nm}, так что ϕ продолжает оставаться мономорфизмом, то же верно для $\phi : G(K[\delta]) \longrightarrow H([\delta])$; это значит, что выполняется условие 2 леммы 3. По построению G имеем $\dim(G_K) = n^2$, а из леммы 3 вытекает, что $\dim_K(\mathrm{Lie}(H_K)) \leqslant n^2$, так что условие 1 предложения 3 также выполняется. Наконец, условие 3 леммы 3 вытекает из того, что согласно лемме 6 уже нормализатор $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,K))$ в $\mathrm{GL}(\mathrm{C}^m_n, K)$ содержится в – на самом деле совпадает с – G. Это значит, что мы можем применить лемму 3 и заключить, что ϕ устанавливает изоморфизм G и H как аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.

Отметим, что именно приведенный в этой теореме изоморфизм означает в случае колец, с учетом несюръективности эпиморфизмов алгебраических групп на точках. Точная последовательность аффинных групповых схем

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n/\mu_m \longrightarrow 1$$

дает точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned}1 \longrightarrow \mu_m(R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,R) \longrightarrow (\mathrm{GL}_n/\mu_m)(R) \longrightarrow \\ H^1(R,\mu_m) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n/\mu_m).\end{aligned}$$

Значения входящих сюда множеств когомологий – первое из них, конечно, на самом деле является группой – хорошо известны. А именно, $H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ классифицирует проективные R-модули ранга n, так что, в частности, $H^1(R,\mathrm{GL}_1) = \mathrm{Pic}(R)$ – группа Пикара кольца R. С другой стороны, записывая точную последовательность когомологий, отвечающую точной последовательности аффинных групповых схем

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{\mathrm{pow}_m} \mathrm{GL}_1 \longrightarrow 1,$$

где морфизм pow_m из GL_1 в GL_1 представляет собой возведение в m-ю степень, и учитывая, что $\mathrm{pow}_m(\mathrm{GL}_1)(R) = R^{*m}$, получаем

$$1 \longrightarrow R^*/R^{*m} \longrightarrow H^1(R,\mu_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R),$$

где правая стрелка индуцирована pow_m. Таким образом, группа когомологий $H^1(R,\mu_m)$ представляет собой расширение группы элементов группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$, убиваемых умножением на m (т.е. группы тех обратимых модулей P над R, что $P^{\otimes m}=R$), при помощи группы R^*/R^{*m}. Эта группа – в особенности для $m=2$ – несколько раз возникала в различных вопросах геометрической алгебры над кольцами, см., в частности, [20].

Чтобы полностью описать группу $(\mathrm{GL}_n/\mu_m)(R)$, нам осталось еще вычислить ядро отображения $H^1(R,\mu_m)\longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n)$. Для этого заметим, что морфизм $\mu_m\longrightarrow \mathrm{GL}_n$ пропускается через GL_1 в скалярном вложении в GL_n. Ясно, что скалярное вложение индуцирует в когомологиях $H^1(R,\mathrm{GL}_1)\longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ отображение, посылающее обратимый модуль P в P^n. Таким образом, ядро $H^1(R,\mu_m)\longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ содержит всю группу R^*/R^{*m} и, сверх того, те элементы P группы Пикара кольца R, для которых $P^{\otimes m}=R$ и $P^n=R^n$.

Резюмируя вышесказанное, мы видим, что фактор-группа $\bigwedge^m(\mathrm{GL}_n)(R)$ по $\bigwedge^m(\mathrm{GL}(n,R))$ содержит копию группы R^*/R^{*m} и дальнейший фактор по этой копии является подгруппой группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$, состоящей из тех обратимых модулей P над R, для которых $P^{\otimes m}=R$ и $P^n=R^n$. Заметим, что первая из этих секций может быть нетривиальной уже в случае, когда $R=K$ – поле. Именно с несюръективностью этого вложения на точках и связано то, что класс трансвекций, который мы строим в статье [7], строго шире, чем просто образы линейных трансвекций.

Литература

1. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* М., Наука, 1969.
2. Н. Бурбаки, *Алгебра, Главы* I–III. М., 1962.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* VII, VIII. М., 1978.
4. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. дисс., Ленингр. гос. ун-т, 1987, с. 1–334.
5. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и анализ **19** (2007), (готовится к печати).
6. Н. А. Вавилов, *Разложение унипотентов в присоединенном представлении группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и анализ. (готовится к печати).
7. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Трансвекции в поливекторных представлениях* GL_n. —. (готовится к печати).
8. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, № 1 (1990), 145–147.

9. Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили, *Классификация тривекторов в девятимерном пространстве.* — Труды Семинара по Вект. и Тенз. Анализу **18** (1978), 197–233.
10. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии,* I. М., Мир, 1982.
11. Т. том Дик, *Группы преобразований и теория представлений.* М., Мир, 1982.
12. Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп.* М., Мир, 1974.
13. Е. Б. Дынкин, *Максимальные подгруппы классических групп.* — Труды Моск. Мат. об-ва **1** (1952), 39–166.
14. П. Кон, *Свободные кольца и их связи.* М., Мир, 1975.
15. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. дисс., Ленингр. гос. ун-т, 1987, с. 1–112.
16. В. Ходж, Д. Пидо, *Методы алгебраической геометрии,* I. М., ИЛ, 1954.
17. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии,* I. М., Наука, 1988.
18. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, no. 2 (2000), 159–196.
19. M. Barnabei, A. Brini, G.-C. Rota, *On the exterior calculus of invariant theory.* — J. Algebra **96** (1985), 120–160.
20. H. Bass, *Clifford algebras and spinor norms over a commutative ring.* — Amer. J. Math. **96** (1974), 156–206.
21. J. B. Bertin, M. J. Bertin, *Algèbre linèaire et geométrie classique.* Paris, Masson, 1981.
22. B. Capdevielle, *Classification des formes trilinéaires alternées en dimension 6.* — Enseignement Math. **18** (1972), 225–243.
23. C. Chevalley, *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algèbriques,* I, II. Paris, Ecole Norm. Sup., 1956–1958.
24. W. L. Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces.* — Ann. Math. **50** (1949), 32–67.
25. A. M. Cohen, A. G. Helminck, *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7.* — Commun. Algebra **16**, no. 1 (1988), 1–25.
26. B. N. Cooperstein, *Nearly maximal representations for the special linear group.* — Michigan Math. J. **27** (1980), 3–19.
27. M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algèbriques.* I. Amsterdam et al., North Holland, 1970, pp. 1–770.
28. M. Demazure, P. Gabriel, *Introduction to algebraic geometry and algebraic groups.* Amsterdam et al., North Holland, 1980, pp. 1–357.
29. M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes.* I, II, III. Lecture Notes Math. **151** (1971), 1–564; **152**, 1–654; **153**, 1–529.
30. J. D. Dixon, *Rigid embeddings of simple groups in the general linear group.* — Canad. J. Math. **29**, no. 2 (1977), 384–391.
31. D. Ž. Djoković, *Classification of trivectors of an eight-dimensional real vector space.* — Linear and Multilinear Algebra **13** (1983), 3–39.

32. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer, 1989.
33. N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras.* Providence, R.I., Amer. Math. Soc. Colloquium Public., 1968.
34. J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups.* N.Y., Academic Press, 1987.
35. W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector.* — Proc. Amer. Math. Soc. **84,** no. 4 (1982), 605–608.
36. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra and Computations **8** no. 1 (1998), 61–97.
37. Ph. Revoy, *Trivecteurs de rang 6.* — Bull. Soc. Math. France **59** (1979), 141–155.
38. Ph. Revoy, *Formes trilinéaires alternées de rang inférieur ou égal á 7.* Actes du 110^e Congrès National des Sociétés savantes (Montpellier–1985). Paris, 1985, pp. 189–194.
39. Ph. Revoy, *Formes trilinéaires alternées en dimension 6 et 7.* — Bulletin Sci. Math. **112** (1988), 357–368.
40. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **67** (1987), 1–286.
41. T. A. Springer, F. D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups.* Springer, Berlin et al., 2000.
42. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: a Theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
43. D. M. Testerman, *Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **75** (1988), 1–190.
44. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima — 1990). London et al., World Sci. Publ., 1991, pp. 219–335.
45. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova **204** (2000), 1–45.
46. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.
47. W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes.* New York et al., Springer-Verlag, 1979.
48. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of quotients of* $\prod \mathrm{GL}(n_i)$. — Pacif. J. Math. **102** (1982), 221–233.
49. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\det(X_{ij})$*: the group scheme approach.* — Adv. Math. **65,** no. 2 (1987), 171–203.
50. R. Westwick, *Real trivectors of rank seven.* — Linear and Multilinear Algebra **10** (1981), 183–204.

Vavilov N. A., Perelman E. Ya. Polyvector representations of GL_n.

In the present paper we characterise $\bigwedge^n(\mathrm{GL}(n,R))$ over any commutative ring R as the connected component of the stabiliser of Plücker ideal. This folk theorem is classically known for algebraically closed fields and should be also well-known in general. However, we are not aware of any obvious reference, so we produce a detailed proof which follows a general scheme developed by W.C.Waterhouse. The present paper is a technical preliminary for a subsequent paper, where we construct decomposition of transvections in polyvector representations of GL_n.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 23 октября 2006 г.