Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 338, 2006 г.

Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер

ГРУППА ШЕВАЛЛЕ ТИПА E_6 В 27-МЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Настоящая работа, являющаяся продолжением [163, 164], посвящена детальному компьютерному изучению действия группы Шевалле $G(\mathrm{E}_6, R)$ на минимальном модуле $V(\varpi_1)$. Эта работа носит технический характер и опирается главным образом на

• реализацию 27-мерного модуля как внутреннего модуля Шевалле в унипотентном радикале параболической подгруппы типа P_7 в группе Шевалле $G(\mathrm{E}_7, R)$,

• обширные компьютерные вычисления, проведенные с использованием системы `Mathematica`.

Мы учитываем результаты, связанные с исключительной 27-мерной йордановой алгеброй, но предпочитаем непосредственно ими не пользоваться, а передоказывать все прямыми методами.

Нашими основными целями здесь являются явный выбор и табуляция знаков структурных констант этого действия, согласованных с выбором положительного базиса Шевалле в работе [163], построение полилинейных инвариантов и уравнений на элементы матриц из группы Шевалле $G(\mathrm{E}_6, R)$ в этом представлении, а также явная табуляция корневых элементов в этом представлении. Для удобства использования получающиеся таблицы воспроизводятся в трех следующих нумерациях:

• естественная нумерация,

• нумерация, связанная с ограничением на A_5,

• нумерация, связанная с ограничением на D_5.

Исследования, составившие основу настоящей работы, выполнены в рамках проектов РФФИ 01–01–00924 (СПбГУ) и 03–01–00349 (ПОМИ РАН) и INTAS 03-51-3251 и были поддержаны грантами Минвуза ‘Геометрия корневых подгрупп’ PD02–1.1–371 и ‘Надгруппы полупростых групп’ E02–1.0–61. Первый автор признателен также за поддержку программы Минвуза “Развитие научных школ Санкт-Петербурга в области теоретической и прикладной математики” на заключительном этапе работы над настоящей статьей.

Настоящая работа является общим начальным фрагментом нескольких планируемых статей, посвященных

• K-теории исключительных групп,

• изучению надгрупп группы $G(\mathrm{E}_6, R)$ в полной линейной группе $\mathrm{GL}(27, R)$,

• описанию некоторых классов подгрупп в $G(\mathrm{E}_6, R)$,

• строению унипотентных радикалов параболических подгрупп,

• геометрии корневых подгрупп,

• задачам порождения.

§1. Структурные константы

Все наши обозначения, относящиеся к корням, весам, алгебрам Ли, алгебраическим группам и представлениям, совершенно стандартны и следуют [2, 3, 4, 21, 23], см. также [158, 130], где можно найти много дальнейших ссылок. Мы не напоминаем определение групп Шевалле и основных подгрупп в них, см., например, [1, 2, 5, 21, 25–30, 123, 145, 146, 158, 160, 162, 164]. В настоящем параграфе мы лишь зафиксируем основные используемые в дальнейшем обозначения.

Прежде всего, пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – фундаментальная система в Φ, Φ^+ и Φ^- – соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Элементы Π называются *простыми* корнями, и мы всегда используем для них ту же нумерацию, что в [3]. Так как основная часть работы посвящена системе $\Phi = \mathrm{E}_6$ и отчасти системе $\Phi = \mathrm{E}_7$, то нас будет интересовать главным образом случай, когда все корни Φ имеют одинаковую длину – такие системы будут называться системами с *простыми связями* =`simply-laced`, в противоположность системам с *кратными связями* =`multiply-laced`. Как обычно, $W = W(\Phi)$ обозначает группу Вейля системы Φ; w_α – отражение относительно корня $\alpha \in \Phi$ и $s_i = w_{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, – фундаментальные отражения.

Построение групп Шевалле основано на выборе базиса Шевалле в простой комплексной алгебре Ли L типа Φ. Напомним, что выбор подалгебры Картана H в L определяет корневое разложение $L = H \bigoplus \sum L_\alpha$, где L_α – одномерные корневые подпространства, инвариантные по отношению к H. Для каждого корня

$\alpha \in \Phi^+$ выберем какой-то ненулевой корневой вектор $e_\alpha \in L_\alpha$ и отождествим корень α с линейным функционалом h на H, для которого $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$. Ограничение формы Киллинга алгебры Ли L на H невырождено и, тем самым, устанавливает канонический изоморфизм $H \cong H^*$, так что мы можем даже считать, что $\alpha \in H$. Впрочем, обычно удобнее рассматривать кокорни $h_\alpha = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Таким образом, любой выбор ненулевых $e_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$, однозначно определяет $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Phi^+$ такие, что $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. Множество $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$ является базисом алгебры Ли L, называемым базисом Вейля. При этом $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta} e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ – числа Картана. Структурные константы $N_{\alpha\beta}$ определяются равенством $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$. Базис Вейля можно нормировать так, чтобы все структурные константы $N_{\alpha\beta}$ были целыми, в этом случае он называется **базисом Шевалле**, а множество $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi\}$ – **системой Шевалле**.

Для систем с простыми связями всегда $N_{\alpha\beta} = 0, \pm 1$, так что нам нужно только зафиксировать *знаки* структурных констант. Мы зафиксируем **положительный** базис Шевалле, который определяется тем свойством, что $N_{\alpha\beta} > 0$ для всех экстраспециальных пар, см. [155, 46, 86, 163]. Для систем с простыми связями это условие означает в точности, что $N_{\alpha_i, \beta} = +1$ каждый раз, как $\alpha_i + \beta \in \Phi$ обладает тем свойством, что если $\alpha_j + \gamma = \alpha_i + \beta$ для какого-то фундаментального корня α_j и какого-то положительного корня γ, то $j > i$.

Знаки структурных констант в положительном базисе Шевалле затабулированы в [163] и для удобства сверки с дальнейшими вычислениями мы воспроизводим оттуда таблицу 3, содержащую структурные константы алгебры Ли типа E_6 для положительной половины системы Шевалле e_α, $\alpha \in \Phi^+$. Остальные три четверти полной таблицы структурных констант легко восстановить при помощи соотношений. При этом для контроля вычисления в [163], проводились двумя принципиально различными способами:

- при помощи индуктивного алгоритма Титса [155], см. также [46],
- при помощи коцикла Френкеля–Каца [75], см. также [76, 104, 142].

Вычисления при помощи алгоритма Титса проводились и ранее

[45, 86], но обычно для другого порядка корней. С другой стороны, очевидный выбор формы и знаков в алгоритме Френкеля–Каца не ведет к положительному базису Шевалле. В [163] сохранена форма Картана, но модифицированы знаки, иными словами, там считается, что $\varepsilon(\alpha) = -1$ для некоторых положительных корней. С другой стороны, в [50, 54] описано построение таблицы структурных констант в положительном базисе Шевалле, в котором знаки всех положительных корней равны $+1$, но модифицирована билинейная форма, которая больше не задается числами Картана.

Пусть теперь $G = G(\Phi, R)$ есть односвязная группа Шевалле типа Φ над кольцом R. Выбор базиса Шевалле задает, в частности, расщепимый максимальный тор $T = T(\Phi, R)$ в группе Шевалле G и параметризацию корневых унипотентных подгрупп X_α, $\alpha \in \Phi$, относительно тора T. Фиксируем эту параметризацию, пусть $x_\alpha(\xi)$ – элементарный корневой унипотент, отвечающий $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$. При этом

$$X_\alpha = \{x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\}.$$

Для двух элементов x, y группы G через $[x, y]$ обозначается их левонормированный коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$. Коммутационная формула Шевалле утверждает, что

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\eta^j)$$

для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ таких, что $\alpha + \beta \neq 0$, и $\xi, \eta \in R$. Произведение в правой части формулы берется по всем корням вида $i\alpha + j\beta \in \Phi$, $i, j \in \mathbb{N}$, в некотором фиксированном порядке. При этом структурные константы группы Шевалле $N_{\alpha\beta ij}$ не зависят от ξ и η. Ясно, что $N_{\alpha\beta 11} = N_{\alpha\beta}$ суть в точности структурные константы алгебры Ли L в соответствующем базисе Шевалле. Для системы с простыми связями единственная положительная линейная комбинация корней α и β, которая может быть корнем, это их сумма $\alpha + \beta$. Таким образом в этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид $[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = e$ в случае, если $\alpha + \beta$ не является корнем, и вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta}\xi\eta),$$

если $\alpha + \beta$ является корнем. Таким образом, в этом случае построенные в [163] таблицы структурных констант одновременно являются таблицами структурных констант групп Шевалле типов E_6, E_7 и E_8. Что касается других систем корней, см. формулы в [46], а также таблицы и дальнейшие ссылки в [164].

§2. Модули Вейля

Обычно мы рассматриваем группу Шевалле $G = G(\Phi, R)$ вместе с действием на **модуле Вейля** $V = V(\omega)$ для некоторого доминантного веса ω. В настоящей работе мы рассматриваем только случай, когда старший вес ω модуля V фундаментальный, $\omega = \varpi_r$. Однако, во многих вопросах структурной теории удобнее проводить вычисления в представлениях, не являющихся фундаментальными, или даже в приводимых представлениях, если при этом получаются более простые уравнения.

Пусть, как и выше, Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l. Обозначим через $Q(\Phi)$ ее решетку корней, а через $P(\Phi)$ – ее решетку весов. Напомним, что $P(\Phi)$ состоит из целочисленных линейных комбинаций фундаментальных весов $\varpi_1, \dots, \varpi_l$, которые образуют двойственный базис по отношению к базису $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$, где $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Как обычно, $P_{++}(\Phi)$ обозначает конус *доминантных* целых весов, являющихся неотрицательными целочисленными линейными комбинациями фундаментальных весов $\varpi_1, \dots, \varpi_l$.

Фиксируем доминантный вес $\omega \in P_{++}(\Phi)$ и пусть $V = V(\omega)$ – модуль Вейля группы G со старшим весом ω. Соответствующее представление $G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ будет обозначаться через $\pi = \pi(\omega)$. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается *набор* весов модуля $V = V(\omega)$ *с учетом кратности*. Для обозначения *множества* весов, рассматриваемых *без* кратности, мы обычно будем писать $\overline{\Lambda}(\omega)$. В настоящей работе нас будут интересовать главным образом только микровесовые модули, см. [4, 123, 126, 130, 158, 162] и содержащиеся там ссылки. Для микровесового представления все веса экстремальны и, значит, имеют кратность 1, так что в этом случае $\Lambda = \overline{\Lambda}(\omega)$ совпадает с Вейлевской орбитой старшего веса, $\Lambda = W\omega$.

В дальнейшем мы фиксируем **допустимый** базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Напомним, что базис называется допустимым, если выполняются два следующих условия.

• Каждый вектор v^λ действительно является вектором веса λ, если рассматривать λ как вес *без кратности*.

• Действие корневых унипотентов $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$ в базисе v^λ, $\lambda \in \Lambda(\omega)$, задается матрицами, элементы которых суть полиномы от ξ с целыми коэффициентами.

Лемма Мацумото, см. [123, 146], утверждает, что для микровесовых представлений можно так нормировать допустимый базис, чтобы

$$x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda\alpha}\xi v^{\lambda+\alpha},$$

где все структурные константы действия $c_{\lambda\alpha}$ равны ± 1. В действительности, в дальнейшем мы всегда выбираем **кристаллический** базис, в котором все структурные константы $c_{\lambda\alpha}$ равны $+1$ для простых и отрицательных простых корней, т.е. $c_{\lambda\alpha} = +1$, если $\alpha \in \pm\Pi$. Существование такого базиса вытекает из общих результатов Дж. Люстига и М. Кашивара, элементарные доказательства приведены в [162] и [6].

Мы мыслим вектор $a \in V$, $a = \sum v^\lambda a_\lambda$, как *столбец* координат $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять себе как *строку* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Разумеется, по отношению к весам Λ^* контраградиентного модуля V^* картина обратная: элементы V^* представляются *столбцами* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$, а элементы V – *строками* $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$. Поэтому мы еще раз обращаем внимание на то, что мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля V – индексы λ, μ, ν и т.д. принадлежат Λ. Иными словами, нам удобно нумеровать координаты вектора из V^* весами модуля V и записывать их как строки – в то время как обычно они нумеруются весами самого модуля V^* и записываются как столбцы.

Один из принципиальных технических моментов состоит в том, что элементы этих строк являются не линейно упорядоченными, а лишь частично упорядоченными, в соответствии с порядком на Λ, задаваемым выбором системы простых корней Π. А именно, мы полагаем, что $\lambda \geqslant \mu$, если $\lambda - \mu = \sum m_i\alpha_i$, где $m_i \geqslant 0$. При описанной выше интерпретации элементов модуля V элементы группы Шевалле естественно мыслить как матрицы $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ. Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов gv^μ, $\mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: μ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\mu}$, а λ-я строка – через $g_{\lambda*}$.

§3. Внутренние модули Шевалле

Как обычно, мы обозначаем через $U = U(\Phi, R)$ подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами X_α, отвечающими положительным корням $\alpha \in \Phi^+$, а через $B = TU$ – стандартную борелевскую подгруппу. Для любого множества $J \subseteq \Pi$ простых корней мы обозначаем через Φ_J подсистему в Φ, порожденную J, через $P_J \geqslant B$ – соответствующую стандартную параболическую подгруппу в G, через L_J – ее фактор Леви, являющийся редуктивной группой типа Φ_J, а через

$$U_J = \langle X_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_J \rangle$$

– ее унипотентный радикал. В случае, когда $R = K$ является полем,

$$L_J = T\langle X_\alpha,\ \alpha \in \Phi_J \rangle.$$

При этом P_J является полупрямым произведением $P_J = L_J \leftthreetimes U_J$, где L_J действует на нормальном делителе U_J сопряжением.

Мы рассматриваем также противоположную параболическую подгруппу P_J^- с той же подгруппой Леви L_J и противоположным унипотентным радикалом

$$U_J^- = \langle X_{-\alpha},\ \alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_J \rangle.$$

В действительности мы будем интересоваться преимущественно случаем максимальных параболических подгрупп. Фиксируем r, $1 \leqslant r \leqslant l$, и положим $J = J_r = \Pi \setminus \{\alpha_r\}$. Соответствующая максимальная параболическая подгруппа, ее подгруппа Леви и унипотентный радикал будут обозначаться через P_r, L_r, U_r, соответственно. Положим $\Sigma_r = \Phi^+ \setminus \Phi_J$ и обозначим через $\Sigma_r(h)$ множество корней $\alpha \in \Sigma_r$, имеющих α_r-уровень h. Иными словами,

$$\Sigma_r(h) = \{\alpha = \sum m_i\alpha_i,\ m_r = h\}.$$

Ясно, что $\Sigma_r(h) = \emptyset$ при $h > h_r$, где через h_r обозначен коэффициент, с которым α_r входит в разложение максимального корня. Объединение всех $\Sigma_r(h)$, $h \geqslant k$, будет обозначаться через $\widetilde{\Sigma}_r(k)$, при этом $\widetilde{\Sigma}_r(1) = \Sigma_r$. Положим $U_r(h) = \prod X_\alpha$, где произведение берется по всем корням $\alpha \in \widetilde{\Sigma}_r(h)$ в произвольном порядке. Из коммутационной формулы Шевалле вытекает, что $U_r(h)$ подгруппа в U_r, причем $U_r(1) = U_r$. На самом деле $U_r(h)$ почти всегда совпадает с h-м членом нижнего центрального ряда группы

U_r, но мы определили $U_r(h)$ как произведение всех корневых подгрупп, отвечающих корням уровня $\geqslant h$, именно для того, чтобы избежать обсуждения маленьких исключений.

Структура последовательных факторов $U_r(h)/U_r(h+1)$ как L_r-модулей хорошо известна, см., например, [36, 132]. А именно, для любых r, $1 \leqslant r \leqslant l$, и h, $h \leqslant h_r$, фактор-группа

$$U_r(h)/U_r(h+1) \cong \oplus X_\alpha, \qquad \alpha \in \Sigma_r(h)$$

является L_r-модулем Вейля со старшим весом ω, где ω – элемент $\Sigma_r(h)$ наибольшей высоты. Поясним, что здесь речь идет о прямой сумме абелевых групп, в то время как в определении $U_r(h)$ фигурировало произведение подгрупп фиксированной группы. Сформулированное выше утверждение представляет собой тривиальный частный случай результатов работы [36], с заменой неприводимых модулей на модули Вейля, чтобы избежать упоминания об очень плохих простых числах.

В действительности чаще нас интересует не сама подгруппа Леви L_r, а ее коммутант[1] $G_r = [L_r, L_r]$. Если r фиксировано, то мы пишем просто Σ, $\Sigma(h)$ вместо Σ_r, $\Sigma_r(h)$ и т.д. Таким образом, $\Phi = \Delta \cup \Sigma \cup (-\Sigma)$. Самым большим и, как правило, наиболее интересным является фактор $\Sigma/\Sigma(2)$. Особенно важны следующие два случая:

- унипотентный радикал U_r абелев, $U_r(2) = 1$,
- унипотентный радикал U_r экстра-специален, $U_r(2) = X_\delta$, где δ – максимальный корень Φ.

Примером абелева случая является 27-мерный модуль для E_6, который реализуется как U_7 в группе типа E_7, а примером экстра-специального случая является 56-мерный модуль для E_7, который реализуется как $U_8/U_8(2)$ в группе типа E_8. В действительности основная часть вычислений в настоящей работе проводилась – или дублировалась! – именно в такой реализации группы Шевалле типа $G(\mathrm{E}_6, R)$, и мы детально обсудим ее в §5.

§4. Системы корней типа E_l

В настоящей работе, как и в работе [163], мы используем

[1] Как всегда, говоря о нормализаторах, коммутантах, центральных рядах и пр. подгрупп в G мы имеем в виду коммутант L_r *в смысле теории алгебраических групп*, а не коммутант ее группы точек!

гиперболическую реализацию систем корней типа E_l в $(l+1)$-мерном пространстве Минковского [16], $240 = 2\binom{8}{2} + 2\binom{8}{3} + 2\binom{8}{2} + 2\binom{8}{1}$. Эта реализация *значительно* удобнее для вычислений, чем обычные реализации в эвклидовом пространстве.

• Реализация E_l как элементов минимальной нормы в кольце целых октав Кэли, $240 = 2\binom{8}{1} + 2^4 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7$, где $7 = 2^2 + 2 + 1$ есть количество прямых – и дополнений к ним – на плоскости Фано, которую использовали Коксетер и Фрейденталь.

• Излагаемая в большинстве стандартных учебников по группам и алгебрам Ли реализация Картана, $240 = 4\binom{8}{2} + 2^7$.

Дело в том, что в гиперболической реализации ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРНЕЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОРТОНОРМИРОВАННОМУ БАЗИСУ ЯВЛЯЮТСЯ ЦЕЛЫМИ. В то же время мы сохраняем обычную нумерацию простых корней из [3]. Так как все вычисления настоящей статьи самым существенным образом зависят от этой реализации систем корней типа E_6 и E_7, то сейчас мы совсем коротко ее напомним, в [91] или [163] можно найти много дальнейших деталей. Разумеется, в действительности эта реализация эквивалентна обычной реализации E_8 в терминах компактных октав $\mathbb{O}$, изоморфизм устанавливается посредством $\mathrm{SL}(2,\mathbb{O}) \cong \mathrm{Spin}(9,1,\mathbb{R})$, см. [37]. Поскольку в настоящей статье нас интересуют вычисления, а не дифференциальная геометрия или геометрия чисел, мы не будем развивать эту тему.

Рассмотрим вещественное векторное пространство $U = \mathbb{R}^{l,1}$ размерности $l+1$ с невырожденным симметрическим скалярным произведением $(\ ,\ ): U \times U \to \mathbb{R}$ сигнатуры $(l,1)$. Зафиксируем в нем ортонормированный базис $e_0, e_1, \dots, e_l$ такой, что $(e_0, e_0) = -1$ и $(e_i, e_i) = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant l$. В первую очередь нас будет интересовать случай $l = 8$. Обозначим через $L \leqslant \mathbb{R}^{8,1}$ решетку, состоящую из всех векторов $v \in \mathbb{R}^{8,1}$, все координаты которых $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_8$ в разложении по базису $e_0, e_1, \dots, e_8$ целые,

$$v = \lambda e_0 + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_8 e_8, \qquad \lambda, \mu_1, \dots, \mu_8 \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим теперь через Φ множество всех векторов $v \in L$, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\lambda - (\mu_1 + \ldots + \mu_8) = 0, \\ -\lambda^2 + \mu_1^2 + \ldots + \mu_8^2 = 2. \end{cases}$$

Все решения этой системы уравнений, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 3, \qquad \mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_8,$$

перечислены в следующей таблице.

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
0	1	0	0	0	0	0	0	-1
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0	0
3	2	1	1	1	1	1	1	1

Легко проверить, что все остальные целочисленные решения получаются из этих при помощи следующих двух типов преобразований.

- Произвольная перестановка $\mu_1, \ldots, \mu_8$.
- Одновременная смена знака всех координат.

Таким образом, с точностью до знака каждый элемент Φ имеет следующую форму:

$$\begin{cases} \beta_{ij} = e_i - e_j, \quad i > j, \\ \gamma_{ijh} = e_0 + e_i + e_j + e_h, \\ \eta_{ij} = 2e_0 + e_1 + \ldots + \widehat{e}_i + \ldots + \widehat{e}_j + \ldots + e_8, \\ \zeta_i = 3e_0 + e_1 + \ldots + 2e_i + \ldots + e_8, \end{cases}$$

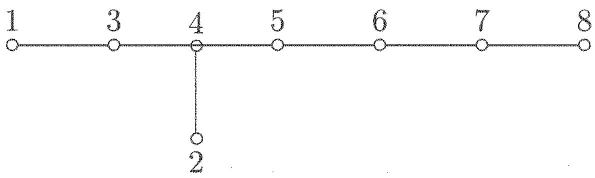
где индексы $i, j, h = 1, \ldots, 8$ попарно различны, а шляпка $\widehat{\ }$ над индексом означает, что этот индекс следует пропустить.

Легко проверить, что ограничение скалярного произведения на гиперплоскость V ортогональную к вектору $3e_0 + e_1 + \ldots + e_8$, положительно определено и что Φ представляет собой систему корней типа E_8 в V, см. [16], [163]. Зафиксируем в Φ следующую систему положительных корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\}$:

$$\alpha_1 = e_2 - e_1, \quad \alpha_2 = e_0 + e_1 + e_2 + e_3, \quad \alpha_3 = e_3 - e_2, \quad \alpha_4 = e_4 - e_3,$$

$$\alpha_5 = e_5 - e_4, \quad \alpha_6 = e_6 - e_5, \quad \alpha_7 = e_7 - e_6, \quad \alpha_8 = e_8 - e_7.$$

Нумерация этих корней следует [3] и приведена на следующей диаграмме:



Перечисленные выше корни β_i, γ_{ijh}, η_{ij} и ζ_i представляют собой множество Φ^+ положительных корней относительно фундаментальной системы корней Π.

Чтобы получить отсюда систему корней типа E_7, достаточно взять те корни из E_8, для которых $\mu_8 = 0$ – или, что то же самое, для которых α_8 не появляется в их разложении по фундаментальным корням. Точно так же, для того, чтобы получить систему корней типа E_6 достаточно взять те корни из E_8, для которых $\mu_7 = \mu_8 = 0$ – или, что то же самое, для которых как α_7, так и α_8 не появляются в их разложении по фундаментальным корням.

В дальнейшем мы используем для корней систему обозначений, известную как **запись Дынкина = `Dynkin notation`**, иными словами, диаграммы Дынкина с координатными метками. При этом корень $\alpha \in \Phi^+$, для которого

$$\alpha = p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3 + s\alpha_4 + t\alpha_5 + u\alpha_6 + v\alpha_7 + w\alpha_8$$

для некоторых $p, q, r, s, t, u, v, w \in \mathbb{N}_0$, обозначается через

$$\alpha = \begin{smallmatrix} prstuvw \\ q \end{smallmatrix}.$$

Таким же образом, естественно, описываются и корни систем E_7 и E_6. Сумма коэффициентов

$$\mathrm{ht}(\alpha) = p + q + r + s + t + u + v + w$$

называется высотой корня α. В каждой системе корней относительно фиксированного порядка имеется единственный корень максимальной высоты, называемый максимальным или старшим корнем. В записи Дынкина максимальные корни систем E_6 и E_7

имеют вид

$$2e_0 + e_1 + \ldots + e_6 = (2,1,1,1,1,1,1) = \overset{12321}{2},$$

$$2e_0 + e_2 + \ldots + e_7 = (2,0,1,1,1,1,1,1) = \overset{234321}{2}.$$

Высоты этих корней равны $11 = 12 - 1$ и $17 = 18 - 1$, соответственно. Для экономии места в таблицах вместо записи Дынкина мы будем использовать **строчную запись Дынкина** = `string Dynkin notation`, в которой корень α записывается строкой коэффициентов $pqrstuvw$. В этой записи максимальные корни систем E_6 и E_7 имеют вид 122321 и 2234321, соответственно.

Для корней все коэффициенты в разложении по простым корням имеют одинаковый знак, но если нужно обозначить целочисленную линейную комбинацию простых корней с разными знаками, то минусы в форме Дынкина принято ставить не перед коэффицентами, а *над* ними. Например, $\alpha_1 - \alpha_2$ в форме Дынкина записывается как $\overset{10000}{\bar{1}}$.

В дальнейшем мы всегда упорядочиваем положительные корни в соответствии с порядком, называемым по-английски `height lexicographic`. Этот порядок *регулярный*, в том смысле, что корни меньшей высоты всегда предшествуют корням большей высоты, и *лексикографический* на корнях данной высоты. Мы пишем $\alpha \prec \beta$, если α предшествует β относительно этого порядка. По определению это значит, что либо $\mathrm{ht}(\alpha) < \mathrm{ht}(\beta)$, либо $\mathrm{ht}(\alpha) = \mathrm{ht}(\beta)$ и целое число, представленное строчной формой Дынкина корня α, *больше*, чем целое число, представленное строчной формой Дынкина корня β.

В работе [163] приведен код, который порождает таблицы корней систем E_l в гиперболическом базисе и в базисе простых корней. Мы не будем воспроизводить этот код, который просто переводит приведенное выше определение на язык `Mathematica`, а ограничимся ответом, тем более, что в [163] положительные корни перечислены только в записи Дынкина, но не в гиперболической записи. В действительности, вычисления производились как раз в гиперболической форме, так что основным объектом является следующий список `positiveE6`:

```
{{0,-1,1,0,0,0,0},{1,1,1,1,0,0,0},{0,0,-1,1,0,0,0},
{0,0,0,-1,1,0,0},{0,0,0,0,-1,1,0},{0,0,0,0,0,-1,1},
```

```
{0,-1,0,1,0,0,0},{1,1,1,0,1,0,0},{0,0,-1,0,1,0,0},
{0,0,0,-1,0,1,0},{0,0,0,0,-1,0,1},{0,-1,0,0,1,0,0},
{1,1,0,1,1,0,0},{1,1,1,0,0,1,0},{0,0,-1,0,0,1,0},
{0,0,0,-1,0,0,1},{1,0,1,1,1,0,0},{0,-1,0,0,0,1,0},
{1,1,0,1,0,1,0},{1,1,1,0,0,0,1},{0,0,-1,0,0,0,1},
{1,0,1,1,0,1,0},{0,-1,0,0,0,0,1},{1,1,0,0,1,1,0},
{1,1,0,1,0,0,1},{1,0,1,0,1,1,0},{1,0,1,1,0,0,1},
{1,1,0,0,1,0,1},{1,0,0,1,1,1,0},{1,0,1,0,1,0,1},
{1,1,0,0,0,1,1},{1,0,0,1,1,0,1},{1,0,1,0,0,1,1},
{1,0,0,1,0,1,1},{1,0,0,0,1,1,1},{2,1,1,1,1,1,1}}
```

После того, как этот список однажды вычислен, уже не имеет значения, откуда он взялся. Начальный фрагмент этого списка длины шесть

```
{{0,-1,1,0,0,0,0},{1,1,1,1,0,0,0},{0,0,-1,1,0,0,0},
{0,0,0,-1,1,0,0},{0,0,0,0,-1,1,0},{0,0,0,0,0,-1,1}}
```

выбирался в качестве системы простых корней **rootbaseE6**, после чего для всех остальных корней решается система линейных уравнений, выражающая их через **rootbaseE6**, что дает строчную форму Дынкина. Мы не приводим аналогичные списки **positiveE7** и **rootbaseE7**, которые порождаются совершенно аналогично, но для удобства пользования последующими таблицами в таблицах 1 и 2 воспроизводятся списки положительных корней систем E_6 и E_7 относительно **height lexicographic order**.

§5. Веса E_6

По определению базис фундаментальных весов **weightbaseE6** двойственен к базису простых корней **rootbaseE6**. Единственный нюанс, который необходимо при этом учитывать, состоит в том, что в гиперболической реализации корни E_6 живут в семимерном, а не в шестимерном пространстве. Чтобы убрать лишнюю размерность при построении весов необходимо проверять еще ортогональность – в смысле *эвклидова* скалярного произведения! – получающихся векторов следующему вектору

```
testvectorE6={3,-1,-1,-1,-1,-1,-1};
```

Таким образом фундаментальные веса $\varpi_1, \dots, \varpi_6$ являются решениями следующих систем линейных уравнений:

```
omegaE6[i_]:=LinearSolve[
             Append[rootbasebisE6,testvectorE6],
```

```
                Table[If[j==i,1,0],{j,1,7}]] /; 1<=i<=6
```

Список rootbasebisE6 отличается от списка rootbaseE6 ровно в одной позиции, а именно, его второй элемент имеет вид {-1,1,1,1,0,0,0}. Это сделано для того, чтобы решение было ортогонально α_2 в смысле *гиперболического* скалярного произведения. Так как остальные α_i не содержат e_0, для них безразлично, берется ли эвклидово или гиперболическое скалярное произведение, поэтому их менять не нужно. Разумеется, с таким же успехом мы могли домножить матрицу Append[rootbasebisE6,testvectorbisE6], где

```
testvectorbisE6={3,1,1,1,1,1,1};
```

справа на матрицу Грама DiagonalMatrix[{-1,1,1,1,1,1,1}]. Теперь вычисление

```
weightbaseE6=Table[omegaE6[i],{i,6}]
```

возвращает координаты фундаментальных весов в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^{6,1}$:

```
{{1,-1/3,2/3,2/3,2/3,2/3,2/3},{2,1,1,1,1,1,1},
{2,1/3,1/3,4/3,4/3,4/3,4/3},{3,1,1,1,2,2,2},
{2,2/3,2/3,2/3,2/3,5/3,5/3},{1,1/3,1/3,1/3,1/3,1/3,4/3}}
```

Доминантный (целый) вес – это в точности линейная комбинация фундаментальных весов с неотрицательными целыми коэффициентами или, что то же самое, вес, скалярные произведения которого со всеми простыми корнями неотрицательные целые. Следующая функция является тестом доминантности:

```
dominantE6Q[u_]:=And@@Table[Block[
              {xxx=hip[u,rootbaseE6[[i]]},
                           xxx>=0&&IntegerQ[xxx]],{i,6}]]
```

Через hip здесь обозначено гиперболическое скалярное произведение в $\mathbb{R}^{l,1}$, которое вводится следующим образом:

```
hip[u_,v_]:=-u[[1]]*v[[1]]+Sum[u[[i]]*v[[i]],
              {i,2,Length[u]}] /; Length[u]==Length[v]
                           hip[u_]:=hip[u,u]
```

Следующий примитивный код служил нам, чтобы породить множество весов $\overline{\Lambda}(\omega)$ представления со старшим весом ω. Чтобы избежать бесконечного вычисления, нужно, конечно, проверять доминантность ω:

```
weightsE6[u_]:=Block[{i,j,list={u},len=hip[u],we},
```

```
            For[j=1,j<=Length[list],j++,
    For[i=1,i<=6,i++,we=list[[j]]-rootbaseE6[[i]];
    If[hip[we]<=len&&!MemberQ[list,we],
    list=Append[list,we]]]];
                Return[list]] /; dominantE6Q[u]
```

Этот текст *чудовищно* неэффективен, так как, например, уже порождение при помощи него 27 весов представления $V(\omega_1)$ занимает около 0.02 секунды. Вероятно, в данном случае даже простая рекурсия была бы лучше. Однако, поскольку размерность всех рассматриваемых нами представлений не превосходит 248, мы не пытались оптимизировать код.

§6. 27-мерный модуль для E_6

Теперь вычисление

```
minimalE6=weightsE6[omegaE6[1]]
```

возвращает список из 27 весов минимального модуля. Эти веса приведены в таблице 3, вместе с их выражениями в форме Дынкина в базисе из простых корней и в базисе фундаментальных весов, соответственно. Эти выражения получены как решения систем линейных уравнений:

```
rootformE6[u_]:=LinearSolve[Transpose[rootbaseE6],u]
weightformE6[u_]:=LinearSolve[Transpose[weightbaseE6],u]
```

Обратите внимание, что в отличие от положительных корней веса модуля $V(\varpi_1)$ расположены в этой таблице не в порядке расположения весов, а в порядке их *убывания*, начиная со старшего веса ϖ_1, имеющего высоту 8, до младшего веса $-\varpi_6$, имеющего высоту -8.

Однако, в действительности часто удобнее использовать для вычислений реализацию $V(\varpi_1)$ как внутреннего модуля Шевалле в группе $G(\mathrm{E}_7, R)$. А именно, рассмотрим стандартную параболическую подгруппу $P_7 \leqslant G(\mathrm{E}_7, R)$. Коммутант $G_7 = [L_7, L_7]$ ее подгруппы Леви является односвязной группой Шевалле типа E_6, причем действие G_7 сопряжением на абелевом унипотентном радикале U_7 превращает U_7 в $G(\mathrm{E}_6, R)$ модуль $V(\varpi_1)$. Как следует из теоремы 1 работы [162], система $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Sigma = \Sigma_7$, отвечающая положительному базису Шевалле, является кристаллическим базисом модуля $V(\varpi_1)$. Поэтому мы можем прочитать константы действия, выбрав из таблицы структурных констант для алгебры Ли типа E_7 строки, отвечающие корням из E_6, и столбцы, отвечающие корням из Σ.

Комментарий. Для восстановления исторической перспективы заметим, что в действительности ход событий был прямо противоположен. Вначале Евгений Плоткин, пользуясь таблицами Поля Гилки и Гари Зейтца из [86] и дополнительными неопубликованными таблицами, которые они нам прислали, частично вручную, частично при помощи компьютера нарисовал таблицы констант действия как для этого, так и для некоторых других представлений, которыми мы пользовались при проверке совпадения знаков в первой версии разложения унипотентов. После этого первый автор еще раз вычислил эти таблицы на компьютере, обратил внимание на свойства положительности и заметил, как на основе этих свойств прочесть все структурные константы непосредственно по весовой диаграмме, на основе чего оказалось возможным дать *априорные* доказательства разложения унипотентов в микровесовых представлениях. После этого Роджер Картер истолковал эти свойства как следствия положительности кристаллического базиса, и именно в таком виде это изложено в [162].

Выберем среди положительных корней E_7 те, которые принадлежат E_6, и те, которые принадлежат Σ:

```
positiveE6insideE7=Select[positiveE7,
                        Last[rootformE7[#]]==0&]
                  minimalE6insideE7=Select[positiveE7,
                        Last[rootformE7[#]]==1&]
```

Впрочем, корни E_6 внутри E_7 *в том же порядке* получаются и просто дорисовыванием 0 к корням E_6 в обычном порядке:

```
positiveE6insideE7=Map[Append[#,0]&,positiveE6]
```

Веса модуля $V(\varpi_1)$ как корни E_7 перечислены в порядке возрастания высоты в таблице 4. Видно, что пользоваться этой таблицей гораздо удобнее, чем предыдущей, так как теперь ВСЕ КОЭФФИЦЕНТЫ В РАЗЛОЖЕНИИ ВЕСОВ как по простым корням E_7, так и по соответствующему гиперболическому базису ЯВЛЯЮТСЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ.

Фактически мы проводили вычисления именно в такой реализации. В частности, теперь для построения таблицы констант действия остается лишь выбрать из построенной в [163] таблицы структурных констант для E_7 строки с номерами, соответствующими позициям элементов `positiveE6insideE7`, и столбцы с номерами, соответствующими позициям элементов `minimalE6insideE7`, в списке `positiveE7`. Результат вопроизведен в таблице 6.

Из чистого любопытства мы повторили вычисления из [163], нужные для построения этой таблицы. При этом мы получили очередное блестящее подтверждение мысли Кнута, что компьютеры становятся все лучше и лучше, в то время как все остальное становится все хуже и хуже. На самом деле, даже при помощи рекуррентного алгоритма вычисление этой таблицы занимает меньше десяти секунд, т.е. меньше, чем в 1990-е годы занимало вычисление одной ее строки!

Ввиду следующего очевидного факта (по поводу его доказательства см., например, [162, лемма 4]) константы действия для отрицательных корней также читаются по этой таблице.

Лемма. *Для любого $\alpha \in \Phi^+$ и любого $\lambda \in \Lambda$ имеет место равенство*

$$c_{\lambda+\alpha,-\alpha} = c_{\lambda,\alpha}.$$

В действительности в практических вычислениях часто удобнее пользоваться не таблицей констант действия, а **матрицей знаков** представления $V(\varpi_1)$, строки и столбцы которой занумерованы весами этого представления, а в позиции (λ, μ) стоит коэффициент $c_{\lambda,\mu-\lambda}$, с которым корневой элемент $x_{\mu-\lambda}(1)$ прибавляет v^μ к v^λ, либо 0, если $\mu - \lambda$ не является корнем. Матрица знаков представления $V(\varpi_1)$ для нумерации весов как корней E_7 приведена в таблице 7.

§7. Весовая диаграмма $V(\varpi_1)$

Важным инструментом при изучении и использовании представлений исключительных групп являются *весовые диаграммы*. Весовые диаграммы были определены Дынкиным в 1951 году и использовались его учениками, в первую очередь Винбергом, однако никогда не появлялись в их опубликованных работах, как сказал авторам сам Евгений Борисович, главным образом из-за чисто технических трудностей включения картинок в математический текст в докомпьютерную эпоху! Они визуализируют действие элементов из группы на данном модуле и, в известном смысле, служат заменой обычных матричных вычислений. В случае микровесовых представлений они совпадают с *кристаллическими графами* Кашивара. Подробное обсуждение весовых диаграмм и множество дальнейших ссылок можно найти в работах [158, 130, 162].

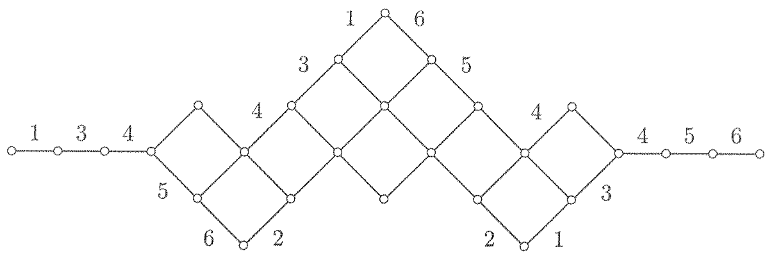
Первоначально весовые диаграммы возникли в теории представлений как чисто комбинаторный объект, описывающий порядок Брюа на факторах группы Вейля – первый взгляд, см. библиографию в [158, 130]. Вскоре после этого было осознано, что при помощи них очень удобно описывать действие группы/алгебры Ли *с точностью до знаков* – второй взгляд, см. [123, 146, 158, 130]. Наконец, сравнительно недавно выяснилось, что в действительности весовые диаграммы полностью описывают действие, *включая знаки* – третий взгляд.

Весовая диаграмма представления π это помеченный – или, в терминологии Кашивара, *окрашенный* – ориентированный граф,

• вершины которого отвечают весам представления π, обычно с кратностями,

• две вершины λ и μ соединяются стрелкой с **меткой** i = **цвета** i, направленной от μ к λ, если $\lambda - \mu = \alpha_i$ является i-м простым корнем.

При этом стрелки обычно не ставятся, и положительными направлениями считаются направления справа налево и снизу вверх. Разумеется, если веса λ и/или μ кратные, нужно еще уточнить, что именно подразумевается под этим равенством. В общем случае решение проблемы кратностей *совершенно нетривиально* и было получено только в знаменитых работах Люстига и Кашивара в контексте теории квантовых групп. Вскоре после этого Литтельманн предложил поразительно красивый элементарный, но весьма хитроумный подход к построению этих графов – *модель путей*. Однако, для микровесовых представлений кратности всех весов равны 1, так что никаких проблем не возникает.



Весовая диаграмма часто используется также как стенографическая запись соответствующего **весового графа**. Вершинами весового графа снова являются все веса представления π, но теперь ребра отвечают *всем* положительным корням (а не только простым корням, как в случае весовой диаграммы). Иными словами, веса λ и μ соединяются стрелкой с меткой $\alpha \in \Phi^+$, направленной из μ в λ, если $\lambda - \mu = \alpha$. Весовые графы часто удовлетворяют очень сильным свойствам регулярности и встречаются в громадном количестве работ по комбинаторике, конечным геометриям и упаковке сфер, см. [42] и содержащиеся там ссылки. Весовой граф типа (E_6, ϖ_1) – или его дополнение! – называется обычно **графом Шлефли**. Он впервые возник в теории алгебраических поверхностей. А именно, рассмотрим поверхность, получающуюся из комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ раздутием l точек в общем положении. Граф Шлефли описывает конфигурацию 27 прямых, возникающих на этой поверхности при $l = 6$.

Точнее, пусть $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3(K)$ – трехмерное проективное пространство над $\mathbb{C}$. Мы используем выражение кубическая гиперповерхность как сокращение для *гладкой поверхности* $X \subseteq \mathbb{P}^3$ *степени* 3. Пусть (x_0, x_1, x_2, x_3) – однородные координаты в $\mathbb{P}^3$. Тогда X является множеством решений кубического уравнения

$$\sum a_{ijkl} x_0^i x_1^j x_2^k x_3^l = 0, \quad i + j + k + l = 3.$$

Почти любой выбор 20 коэффициентов a_{ijkl} приводит к гладкой поверхности: допустимые выборы образуют открытое подмножество в $\mathbb{P}^{19}$.

Знаменитая классическая теорема алгебраической геометрии утверждает, что на каждой кубической гиперповерхности X имеется 27 прямых, причем конфигурация этих прямых не зависит от рассматриваемой поверхности. А именно, если Y и Z – две такие прямые на X, то либо $Y \cap Z = \emptyset$, либо Y и Z трансверсально пересекаются в единственной точке. В алгебраической геометрии эту картинку принято изображать как граф, вершины которого соответствуют прямым, причем две вершины в том и только том случае соединяются ребром, когда соответствуюшие прямые пересекаются.

Только что упомянутая теорема утверждает, что получающийся граф не зависит от выбора X. Поэтому мы можем выбрать для вычислений особенно простую модель. Самая известная кубическая гиперповерхность, это, разумееется, *кубическая поверхность Ферма*, задаваемая уравнением

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Пусть $\eta = e^{2\pi i/3}$ – первообразный корень из 1 степени 3. Тогда 27 прямых можно описать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ ij \end{bmatrix} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 + \eta^i x_1 = 0,\ \ x_2 + \eta^j x_3 = 0\},$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ ij \end{bmatrix} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 + \eta^i x_2 = 0,\ \ x_1 + \eta^j x_3 = 0\},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ ij \end{bmatrix} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 + \eta^i x_3 = 0,\ \ x_1 + \eta^j x_2 = 0\},$$

где в каждом случае $0 \leqslant i, j \leqslant 2$. Тот факт, что прямые возникают группами по 3, сразу вызывает в памяти конструкцию Фрейденталя E_6. Естественно, это не просто совпадение. Решив несколько систем алгебраических уравнений, легко получить следующие правила:

- $\begin{bmatrix} r \\ ij \end{bmatrix}$ пересекает $\begin{bmatrix} r \\ kl \end{bmatrix}$, если и только если $i = k$ или $j = l$;
- $\begin{bmatrix} 1 \\ ij \end{bmatrix}$ пересекает $\begin{bmatrix} 2 \\ kl \end{bmatrix}$, если и только если $i - j \equiv k - l \pmod 3$;
- $\begin{bmatrix} 1 \\ ij \end{bmatrix}$ пересекает $\begin{bmatrix} 3 \\ kl \end{bmatrix}$, если и только если $i + j \equiv k - l \pmod 3$;
- $\begin{bmatrix} 2 \\ ij \end{bmatrix}$ пересекает $\begin{bmatrix} 3 \\ kl \end{bmatrix}$, если и только если $i + j \equiv k + l \pmod 3$.

Нарисовав теперь соответствующий граф, легко убедиться, что это в точности *дополнение* весового графа представления

(E_6, ϖ_1). А именно, в весовом графе каждый вес соединен ровно с 16 другими весами, в то время как в графе, описывающем конфигурацию 27 прямых, каждая прямая пересекается ровно с 10 другими прямыми.

Только что описанная конструкция 27 прямых демонстрировала симметрию типа $3\,\mathrm{A}_2$. Можно дать другие описания, в которых отчетливо видны другие симметрии. Например, в контексте раздутия шести точек $p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{P}^2$ хорошо видна симметрия типа A_5. А именно, в этом случае 27 прямых можно описать следующим образом, см. [24, теорема 4.9]:

• 6 исключительных кривых раздутия $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$;

• собственные прообразы = `strict transforms` 15 прямых $p_i p_j$, $i \neq j$;

• собственные прообразы = `strict transforms` 6 коник, проходящих через $p_1, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_6$, $1 \leqslant i \leqslant 6$.

В книге [18] та же конфигурация описана в терминах симметрии типа D_5.

§8. Ограничение на A_5 и D_5

При доказательстве результатов о группах Шевалле над кольцами обычно происходит либо индукция по размерности кольца – такие доказательства называются арифметическими, – либо по рангу группы – такие доказательства называются геометрическими, – либо и то и другое. Для группы типа E_6 большинство обычных геометрических доказательств основаны на редукции к группе типа D_5 при помощи вычислений с элементами, лежащими в группе типа A_5, либо к группе типа A_5 при помощи вычислений с элементами, лежащими в группе типа D_5. Эти группы с необходимостью возникают по той простой причине, что при редукции к меньшему рангу обычно удаляется одна из крайних вершин диаграммы Дынкина. Удаление α_1 или α_6 в системе E_6 дает D_5, а удаление α_2 дает A_5. Так что это в точности подгруппы Леви максимальных параболических подгрупп P_1 и P_6 или P_2, соответственно. Случай E_7 несколько сложнее в частности и потому, что для него при редукции к меньшему рангу естественно возникают *три* различные подгруппы типов E_6, D_6 и A_6.

Поэтому для многих вычислений необходимо хорошо понимать, как 27-мерный E_6-модуль устроен с точки зрения ограничения на подсистемы A_5 и D_5. Как ограничения $V(\varpi_1)$ на подгруппы этих типов раскладываются на неприводимые компоненты, хорошо известно и легко посчитать. Как объяснено в [130], для этого достаточно просто зачеркнуть ребра с меткой 2 или 1 в весовой диаграмме.

Таким образом,

$$V(E_6,\varpi_1)\downarrow A_5 = V(A_5,\varpi_1)\oplus V(A_5,\varpi_4)\oplus V(A_5,\varpi_1),$$
$$V(E_6,\varpi_1)\downarrow D_5 = V(D_5,0)\oplus V(D_5,\varpi_4)\oplus V(D_5,\varpi_1).$$

Обратите внимание, что нумерация простых корней и весов в правой части – это обычная нумерация в A_5 и D_5, соответственно, а вовсе не их нумерация как простых корней E_6. Говоря попростому, при ограничении на A_5 27-мерный модуль $V(\varpi_1)$ раскладывается на два естественных 6-мерных модуля и 15-мерный модуль, являющийся четвертой внешней степенью естественного. При ограничении на D_5 он тоже раскладывается на три слагаемых: одномерный модуль, полуспинорный модуль размерности 16 и 10-мерный естественный модуль.

При рассмотрении $V(\varpi_1)$ как внутреннего модуля Шевалле в группе типа E_7 эти разложения сразу усматриваются следующим образом. Так как из всех простых корней только α_2 имеет ненулевой коэффициент при e_0, то A_5-компоненты различаются по значению коэффициента при e_0, который для весов $V(\varpi_1)$ может принимать значения 0,1 и 2. Таким образом, для получения весов в порядке, согласованном с A_5-ветвлением, достаточно выбрать из списка веса с соответствующими значениями *первой* компоненты и потом снова соединить получившиеся списки:

```
minimalE6branchA5=Apply[Join,Table[
            Select[minimalE6insideE7,First[#]==i&],
                        {i,0,2}]]
```

С другой стороны, D_5-компоненты удобно различать непосредственно по значению коэффициента при α_1, в разложении по базису простых корней, который для весов $V(\varpi_1)$ также принимает три значения 0,1 и 2. Таким образом, проще всего применить к весу `rootformE7`, а потом проделать *буквально* то же самое, что в предыдущем случае:

```
minimalE6branchD5=Apply[Join,Table[
            Select[minimalE6insideE7,
                  First[rootformE7[#]]==i&], {i,0,2}]]
```

§9. Матрица знаков

Теперь у нас все готово для того, чтобы явно вычислить таблицы знаков представления $V(\varpi_1)$ и корневые элементы. В работе [163] мы двумя способами вычисляли структурные константы алгебры Ли типа E_l: при помощи рекуррентного алгоритма, `mu[l,i,j]`, и при помощи коцикла Френкеля–Каца, `kac[l,i,j]`. Получающаяся таблица структурных констант E_6 воспроизведена как таблица 5. А из таблицы для E_7 мы выберем нужную нам часть:

```
minimalE6insideE7sign=Table[
        nu[7,positiveE6insideE7[[i]],
            minimalE6insideE7[[j]]], {i,1,36},{j,1,27}]]
```

Определенная в [163] функция `nu[7,x,y]` как раз и выражает структурные константы для E_7. Ее отличие от функции `mu` состоит в том, что аргументами являются сами корни, а не их номера. На самом деле, мы не обращались к электронной версии [163], а заново пересчитали все нужные нам знаки. При этом мы с удовлетворением отметили рост производительности компьютеров по сравнению с 1990-ми годами: даже по рекуррентному алгоритму вычисление всех нужных нам структурных констант действия заняло меньше 10 секунд. Получающаяся таблица воспроизведена как таблица 6.

Часто удобнее пользоваться таблицей знаков в другом виде, не как таблицей структурных констант действия, а как *матрицей знаков*:

```
signtable=Table[
    nu[7,minimalE6insideE7[[j]]-minimalE6insideE7[[i]],
            minimalE6insideE7[[i]]], {i,1,27},{j,1,27}]]
```

В отличие от матрицы структурных констант действия, строки которой занумерованы корнями, а столбцы – весами, в матрице знаков как строки, так и столбцы занумерованы весами модуля $V(\varpi_1)$. В позиции (λ,μ) стоит коэффициент, с которым корневой элемент e_α, где $\alpha=\mu-\lambda$, прибавляет номер столбца к номеру строки. Матрица знаков воспроизведена в таблице 7, все дальнейшие таблицы вычислялись на ее основе.

Ниже мы воспроизводим результаты в трех нумерациях весов: *естественной*, связанной с ограничением на A_5 и связанной с ограничением на D_5. Таблица 8 показывает соответствие этих нумераций. При этом в согласии с традицией мы нумеруем веса не начиная с младшего, как это принято в `Computer Science`, а начиная со старшего, как принято в алгебре. Это значит, что – кроме номеров строк и столбцов! – воспроизведенная в таблице 9 матрица знаков получается из матрицы в таблице 7 транспонированием относительно побочной диагонали. Таким образом, за исключением типографских изысков – всевозможных `\vrule`, `\tablerule`, etc. – таблица 9 представляет собой табличную форму следующей матрицы:

```
minimalE6insideE7signtable=
                Reverse[Transpose[Reverse[signtable]]]
```

Таблицы 12 и 15 получаются из нее переупорядочиванием весов в соответствии с A_5-нумерацией и D_5-нумерацией, соответственно. Это можно сделать многими способами, например, вычислив соответствующие перестановки. Однако, поскольку мы работаем с крошечными списками, вычисление с которыми занимает доли секунды, бороться за эффективность не имеет смысла. Следующая функция возвращает *номер* элемента y в списке x

```
search[x_,y_]:=Nest[First,Position[x,y],2]
```

– напомним, что внутренняя функция `Position` возвращает *список* позиций, оформленных в виде списка, поэтому нам нужно убрать *две* пары скобок. Теперь перейти от естественной нумерации к A_5-нумерации можно, например, так:

```
minimalE6branchA5signtable=Table[
        minimalE6insideE7signtable
        [search[minimalE6insideE7,minimalE6branchA5[[i]]],
        search[minimalE6insideE7,minimalE6branchA5[[j]]]]],
                           {i,1,27},{j,1,27}]
```

Для D_5-нумерации делается ровно то же самое, но веса, естественно, выбираются из списка `minimalE6branchD5`.

Мы разбили получающиеся матрицы на блоки в соответствии с A_5-ветвлением и D_5-ветвлением, соответственно, чтобы была лучше видна их структура.

Например, в таблице 12 в северо-западном и юго-восточном углах хорошо видны два естественных 6-мерных представления группы $\mathrm{SL}(6, R)$, соответствующей подсистеме $\langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle$, а в северо-восточном и юго-западном углах – склеивающее их действие группы $\mathrm{SL}(2, R)$, отвечающей старшему корню δ.

С другой стороны, в таблице 15 хорошо видно, что при D_5-нумерации для любого элемента из алгебры Ли L типа E_6 последние 10 элементов первого столбца равны 0 – именно этот факт лежит в основе проведенного в [7], [8] Доказательства из Книги для этого случая.

§10. Элементарные корневые элементы

Теперь у нас все готово, чтобы вычислить корневые элементы для всех трех перечисленных нумераций корней. Зададим прежде всего элементы e_α:

```
rooteE6insideE7[h_]:=Table[
      If[minimalE6insideE7[[i]]-minimalE6insideE7[[j]]==
       positiveE6insideE7[[h]],
         minimalE6insideE7sign[[h,j]],0],
             {i,1,27},{j,1,27}]
```

Для естественной нумерации получающиеся элементы e_α приведены в таблице 10. Подчеркнем, что здесь $1 \leqslant h \leqslant 36$ есть номер *положительного* корня. Из §7 мы знаем, что корневой элемент $e_{-\alpha}$, отвечающий отрицательному корню, равен e_α^t. Таким образом, остальные 36 корневых элементов являются просто транспонированными к тем 36 элементам, которые приведены в таблице.

Матрицы `rooteE6branchA5[h_]` и `rooteE6branchD5[h_]` задаются аналогично, но при этом в правой части вместо h указывается, естественно, место веса `minimalE6branchA5[[h]]` или, соответственно, `minimalE6branchD5[[h]]` в списке весов `minimalE6insideE7`, вычисленное с использованием функции `search`. Получающиеся результаты приведены в таблицах 13 и 16.

Теперь мы можем легко задать остальные корневые элементы как матрицы. Например, так как представление $V(\varpi_1)$ микровесовое, то в нем $e_\alpha^2 = 0$ и, значит, $x_\alpha(\xi) = e + \xi e_\alpha$. Поэтому корневые элементы задаются следующим образом.

```
rootxE6insideE7[h_,x_]:=IdentityMatrix[27]+
         x*rooteE6insideE7[h]
```

Естественно, при определении элементов

`rootxE6branchA5[h_,x_]` и `rootxE6branchD5[h_,x_]`

вместо `rooteE6insideE7[h]` нужно пользоваться

`rooteE6branchA5[h_]` и `rooteE6branchD5[h_]`, соответственно.

Как обычно, мы полагаем $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in R^*$. Таким образом, мы можем теперь задать элемент $w_\alpha(\varepsilon)$ как матрицу:

```
rootwE6insideE7[h_,x_]:=rootxE6insideE7[h,x].
          Transpose[rootxE6insideE7[h,-Power[x,-1]].
                              rootxE6insideE7[h,x]
```

Наконец, *полупростой* корневой элемент $h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)w_\alpha(1)^{-1}$, где $\varepsilon \in R^*$ можно выразить через $w_\alpha(\varepsilon)$,

```
roothE6insideE7[h_,x_]:=rootwE6insideE7[h,x].
rootwE6insideE7[h,-1]
```

либо, при желании, непосредственно через элементы $x_\alpha(\xi)$.

Впрочем, в тех вычислениях, в которых участвует небольшое количество корневых элементов, мы предпочитаем хранить и использовать элементы e_α и $x_\alpha(\xi)$ как *разреженные* матрицы – иными словами, в формате `SparseArray` – и обращаться к матрицам 27×27 только на самом последнем этапе и только в тех случаях, когда это действительно нужно. Мы не приводим соответствующие коды. Зная таблицы корней, весов и знаков, каждый, кто знаком с основами программирования в `Mathematica`, легко напишет их сам.

§11. Инвариантная кубическая форма

Еще одним важнейшим инструментом при изучении группы Шевалле типа E_6 в 27-мерном представлении является инвариантная кубическая форма Q, ее полная поляризация F и ее 27 частных производных $f_1, \dots, f_{27}$, описывающие уравнения на орбиту вектора старшего веса.

Эту форму впервые построил Леонард Диксон в 1905 году, а самые элементарные ее конструкции предложили в 1951–1952 годах Клод Шевалле и Ганс Фрейденталь [48, 49], [77–82]. Фрейденталь работал над полем характеристики 0, для характеристик $\neq 2, 3$ эту форму использовали Тони Спрингер, Жак Титс, Джордж Селигман, Натан Джекобсон, Фердинанд Фельдкамп, Арье Коэн, Брюс Куперстейн и другие, см., например, [100, 101], [139–141], [143, 144, 153, 154], [165–167], [68–71], [52] и содержащиеся там ссылки. В [140] Тони Спрингер дал аксиоматическое описание формы Q. Естественно, это в точности форма нормы исключительной 27-мерной йордановой алгебры. Априори характеристики 2 и 3 могут создавать здесь проблемы. В действительности, как обнаружил, на чуть другом языке, Майкл Ашбахер [31–33], этого не происходит. Обычные доказательства идентификации используют трудные геометрические результаты: классификацию простых алгебраических групп или принадлежащую Титсу локальную характеризацию билдингов.

• **Конструкция в терминах** $3\,\mathrm{A}_2$**.** Замечательная конструкция Фрейденталя вскрывает симметрию по отношению к $3\,\mathrm{A}_2$. Пусть $M(3,R)$ – полное матричное кольцо степени 3 над коммутативным кольцом R, а

$$V = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in M(3,K)\}$$

– свободный $M(3,R)$-модуль ранга 3, рассматриваемый как свободный R-модуль ранга 27. Определим на V кубическую форму F следующей формулой:

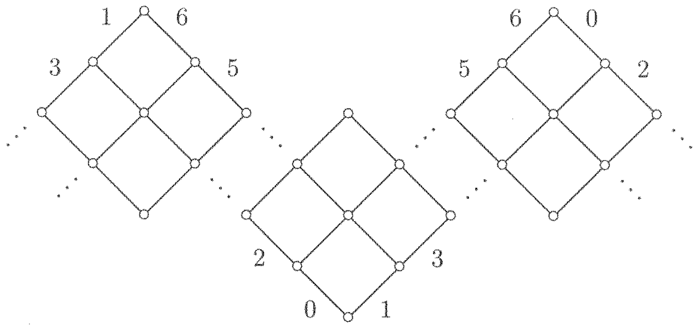
$$F((x,y,z)) = \det(x) + \det(y) + \det(z) - \operatorname{tr}(xyz).$$

Тогда $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ можно отождествить с группой $\mathrm{Isom}(F,K)$, состоящей из всех преобразований $g \in \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(27,K)$, таких, что $F(g(x,y,z)) = F(x,y,z)$.

На следующем рисунке мы видим 3×3-матрицы на весовой диаграмме 27-мерного представления. Это ограничение π на подсистему типа $3\,\mathrm{A}_2$, порожденную α_0 и всеми простыми корнями, кроме α_4:

$$3\,\mathrm{A}_2 = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + \langle \alpha_5, \alpha_6 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_0 \rangle.$$

При этом диаграмма разрезается по ребрам, помеченным 4, и вводятся дополнительные ребра с меткой 0, соединяющие вершины, разность которых равна α_0. Самый простой способ сделать это состоит в том, чтобы рассмотреть порядок Брюа на *аффинной* группе Вейля $\overline{W} = \overline{W}(\Phi)$. Тогда индуцированный порядок Брюа на $\overline{W}(\mathrm{E}_6)/W(\mathrm{D}_5)$ можно изобразить в виде бесконечной полосы, состоящей из весовых диаграмм типа (E_6, ϖ_1), склеенных ребрами с меткой 0. После этого нужно разрезать эту бесконечную картинку по ребрам с меткой 4 и взять три соседние связные компоненты:



На получающейся картинке отчетливо видны три 3×3-матрицы и действие на них трех копий группы $\mathrm{SL}(3, K)$. Каждая 9-мерная компонента изоморфна тензорному произведению *векторного* представления одной копии группы $\mathrm{SL}(3, K)$ и *ковекторного* представления другой копии $\mathrm{SL}(3, K)$. При этом все три копии $\mathrm{SL}(3, K)$ циклически переставляются, так что каждая из них один раз появляется в каждой роли, что является зримым выражением тройственности.

• **Конструкция в терминах** A_5**.** Первоначальная конструкция Диксона обладала симметрией типа A_5. В 1951 году смысл этой конструкции объяснил Шевалле [48]. Аналогичные конструкции позже дали Шульт и Ашбахер [31].

Рассмотрим ограничение π на подгруппу типа A_5. Это эквивалентно следующему разложению $V = U \oplus \bigwedge^2(U^*) \oplus U$, где U – естественное 6-мерное представление $\mathrm{SL}(6, R) = G(\mathrm{A}_5, R)$. Дополнительную симметрию по отношению к $\mathrm{A}_1 = (\mathrm{A}_5)^\perp$ можно описать следующим образом. Эта копия A_1 порождается α_0, и соответствующая подгруппа $G(\mathrm{A}_1, K) \cong \mathrm{SL}(2, K)$ оставляет на месте $\bigwedge^2(U^*)$, но при этом склеивает две копии U. Получающееся 12-мерное представление является тензорным произведением естественных представлений $\mathrm{SL}(6, K)$ и $\mathrm{SL}(2, K)$.

В терминах описанного выше разложения внешнее произведение задает на V две трилинейные формы. А именно, произведение двух векторов и одного бивектора на двойственном пространстве является скаляром, как и произведение трех бивекторов. Искомая трилинейная форма на V получается как сумма этих двух.

Подробное описание формы F в этой реализации и явную таблицу знаков можно найти в [31].

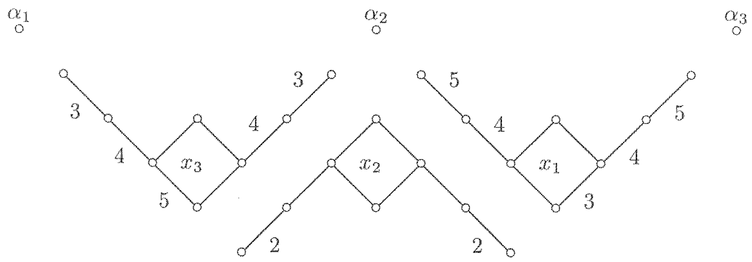
• **Конструкция в терминах** D_4. В литературе по алгебраическим группам чаще всего используется конструкция в терминах алгебры Кэли–Диксона и исключительной 27-мерной йордановой алгебры, которая вскрывает симметрию по отношению к D_4 и связь с F_4. Эту конструкцию можно описать следующим образом. Пусть $\operatorname{char} K \neq 2, 3$ и C – *расщепимая алгебра октонионов* над полем K, отвечающая квадратичной форме N. Это единственная *композиционная алгебра* размерности 8 над полем K с делителями 0. Иными словами, $N(xy) = N(x)N(y)$ для всех $x, y \in C$. В [70, 37, 144] можно найти матричную реализацию этой алгебры и много дальнейших ссылок. Обозначим через $x \mapsto x^*$ каноническую инволюцию на C, а через $T(x) = x + x^*$ – след. Выберем теперь ненулевые скаляры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K^*$ и определим инволюцию кольца $M(3, C)$:

$$a \mapsto g^{-1}(a^*)^t g, \qquad g = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Пусть J – множество эрмитовых матриц по отношению к этой инволюции Иными словами, J состоит из всех матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & x_3 & \gamma_1^{-1}\gamma_3 x_2^* \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1 x_3^* & \alpha_2 & x_1 \\ x_2 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 x_1^* & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$, $x_1, x_2, x_3 \in C$. Тогда J замкнуто относительно умножения $ab = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$, где $a \cdot b$ обычное матричное умножение в $M(3, C)$. Относительно этого умножения J становится йордановой алгеброй, см. [70, 144]. На следующей картинке видно, как три скалярных и три октонионных компоненты располагаются в 27-мерном представлении V.



Теперь обычная формула для определителя

$$\det(a) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + T(x_1x_2x_3) - \\ - \alpha_1\gamma_3^{-1}\gamma_2 N(x_1) - \alpha_2\gamma_1^{-1}\gamma_3 N(x_2) - \alpha_3\gamma_2^{-1}\gamma_1 N(x_3)$$

определяет кубическую форму на J. Однако обычно удобнее рассматривать не саму форму det, а поляризовать ее до трилинейной формы F на J такой, что $F(x,x,x) = \det(x)$.

§12. Инвариантная кубическая форма, CONTINUED

Еще одна конструкция формы, в которой очевидна симметрия по отношению ко всей группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$, и доказательство, которое не использует ничего, кроме элементарной линейной алгебры, намечены в [158]. Более детально эта конструкция обсуждается в [162], см. также [6].

Эта конструкция основана на том известном факте, что мономы кубической формы образуют одну орбиту относительно действия группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Назовем тройку весов (λ,μ,ν) представления $V(\varpi_1)$ *триадой*, если λ,μ,ν – попарно ортогональные корни E_7 – или, что то же самое, если их попарные разности $\lambda-\mu$, $\lambda-\nu$, $\mu-\nu$ не являются корнями. В терминологии Ашбахера [31] тройка весов (λ,μ,ν) в том и только том случае является триадой, когда соответствующие весовые векторы v^λ, v^μ, v^ν порождают *специальную плоскость*.

Обозначим через Θ множество всех триад, $|\Theta| = 27\cdot 10$. Тогда трилинейная форма F принимает следующие значения:

$$F(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } (\lambda,\mu,\nu)\in\Theta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и нам остается только уточнить знаки.

Мы зафиксируем знак так, чтобы $F(v^{\lambda_0}, v^{\mu_0}, v^{\nu_0}) = 1$ для следующей *выделенной триады*:

$$(\lambda_0,\mu_0,\nu_0) = \left(\begin{smallmatrix}000001\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}234321\\2\end{smallmatrix}\right).$$

Тогда для любой другой триады (λ,μ,ν) сумма

$$\lambda+\mu+\nu = \lambda_0+\mu_0+\nu_0 = \begin{smallmatrix}246543\\3\end{smallmatrix}$$

ортогональна ко всем фундаментальным корням $\alpha_1, \dots, \alpha_6$. Это значит, что для каждого фундаментального отражения $w_\alpha \in W(\mathrm{E}_6)$ имеет место следующая альтернатива:

• либо $w_\alpha(\lambda, \mu, \nu) = (\lambda, \mu, \nu)$,

• либо в точности два среди весов λ, μ, ν передвигаются отражением w_α, причем в различных направлениях, скажем,

$$w_\alpha(\lambda) = \lambda + \alpha, \qquad w_\alpha(\mu) = \mu - \alpha, \qquad w_\alpha(\nu) = \nu.$$

Посмотрев на это с точки зрения означенного базиса $\pm v^\lambda$, на котором действует *расширенная* группа Шевалле, мы видим, что либо под действием $w_\alpha(1)$ тройка базисных векторов v^λ, v^μ, v^ν не меняется, либо она переходит в *другую* тройку и при этом происходит *одна* смена знака. Таким образом, мы получаем следующий результат, сформулированный в §3 работы [162] на чуть другом языке.

Лемма. *В инвариантной трилинейной форме F имеем*

$$F(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = \mathrm{sign}(w),$$

где w – самый короткий элемент группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ такой, что

$$w(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = (\lambda, \mu, \nu).$$

При практическом вычислении этот алгоритм проще всего реализовать не глядя на все элементы группы Вейля, а просто добавляя на каждом шаге то, что получается из уже имеющихся триад под действием фундаментальных отражений, меняя при этом знак.

Вначале зададим выделенную тройку, *вместе со знаком*:

```
distriple={Sort[Part[minimalE6insideE7,1,13,27]],1}
```

Теперь мы должны проделать следующую процедуру: пройтись по всем простым корням и всем перестановкам триады (λ, μ, ν) и проверить, получатся ли при этом новые триады. Если получатся, то применить эту процедуру к каждой из них. Например, из выделенной триалы получаются две новые

$$w_{\alpha_1}(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = \left({000001 \atop 0}, {112221 \atop 1}, {134321 \atop 2} \right),$$

$$w_{\alpha_6}(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = \left({000011 \atop 0}, {012211 \atop 1}, {234321 \atop 2} \right),$$

причем они, естественно, войдут со знаком минус, и т.д.

Таким образом, породить список триад, вместе с соответствующими знаками, можно, например, так. Снова, поскольку этот список порождается ровно один раз, мы совершенно не заботимся об эффективности.

```
triples=Block[{trip={distriple},newtriple},
    For[i=1,i<=Length[trip],Outer[
    If[MemberQ[minimalE6insideE7,trip[[i,#1[[1]]]]-#2]&&
        MemberQ[minimalE6insideE7,trip[[i,#1[[2]]]]+#2],
      newtriple=Join[Sort[
      {trip[[i,#1[[1]]]]-#2,trip[[i,#1[[2]]]]+#2,
      trip[[i,#1[[3]]]]}],{-trip[[i,4]]}];
      If[!MemberQ[trip,newtriple],
      AppendTo[trip,newtriple]]]&,
      Permutations[1,2,3],Most[rootbaseE7],1];i++],
                                      Return[trip]]
```

Так как мы на каждом шаге *сортируем* триады, то эта функция возвращает список Θ_0 из 45 *неупорядоченных* триад $\{\lambda, \mu, \nu\}$. Чтобы получить отсюда список Θ всех 270 триад, нужно просто применить к каждому элементу списка Θ_0 всевозможные перестановки первых трех его частей.

Список Θ_0 неупорядоченных триад – это в точности то, что нам нужно, чтобы задать кубическую форму. При суммировании по *упорядоченным* триадам возникает лишний коэффициент 6, которые создает проблемы в характеристиках 2 и 3.

Таблица 11 как раз и представляет собой список триад, записанных как мономы кубической формы при помощи поиска соответствующих весов в списке весов `minimalE6insideE7` и – честно посчитанные при помощи оператора `D` – производные этой формы.

В таблицах 14 и 17 приведены кубические формы и их производные для A_5-порядка и D_5-порядка. Для построения этих таблиц мы, как и в §9, просто превратили список неупорядоченных триад в список мономов не поиском их номера в `minimalE6insideE7`, а поиском их номеров в `minimalE6branchA5` или `minimalE6branchD5`, соответственно.

Кроме упомянутых в тексте, в библиографии мы приводим дальнейшие работы, в которых производятся вычисления с исключительными группами Шевалле – в первую очередь с группами типов E_6 и E_7 – в минимальных представлениях. В частности, цитируются те известные нам статьи, в которых содержатся *явные* вычисления – в особенности, компьютерные! – *каких-то* структурных констант, корневых элементов, инвариантов, уравнений, орбит, etc. Кроме того, мы цитируем некоторые *важнейшие* работы, в которых эти вычисления применяются к задачам СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ[2]: описанию подгрупп, разложений, классов сопряженности, порождения, K-теории и т.д. Наш список *весьма* селективен и заведомо не претендует на полноту. Так, мы практически не цитируем работы, посвященные собственно теории представлений исключительных групп, их применениям в алгебраической геометрии и теории чисел, связанным с ними автоморфным функциям, комбинаторным геометриям, когомологиям, etc. – а также работы, опубликованные в физических журналах.

[2]Первый автор начал эту работу – как и работу [163] – в первой половине 1990-х годов, главным образом в Милане и Билефельде, частично в Кэмбридже и Бар Илане. Я искренне признателен многим своим итальянским и немецким друзьям, в первую очередь Лино Ди Мартино и Тони Баку за неизменную поддержку в трудное время. Именно совместные работы с Ди Мартино и Евгением Плоткиным были для меня основным стимулом разработать явные алгоритмы вычислений в исключительных группах и затабулировать то, что для этого нужно. Я имел счастье обстоятельно обсуждать эти вопросы со многими лучшими специалистами по исключительным группам, в особенности с Майклом Ашбахером, Гари Зейтцем, Роджером Картером, Арье Коэном, Брюсом Куперстейном и Игорем Френкелем. Многие моменты стали мне ясны именно в результате этих бесед. В последние годы новый стимул вернуться к эти вопросам и довести их до конца был дан работами моих учеников, в которых получен замечательный прогресс в некоторых из этих направлений: [7–9], [13, 15, 19, 127]. Всем им я глубоко благодарен. Н.В.

Таблица 1. Положительные корни E_6

1	$\substack{10000\\0}=(0,-1,1,0,0,0,0)$	$\substack{00000\\1}=(1,1,1,1,0,0,0)$
	$\substack{01000\\0}=(0,0,-1,1,0,0,0)$	$\substack{00100\\0}=(0,0,0,-1,1,0,0)$
	$\substack{00010\\0}=(0,0,0,0,-1,1,0)$	$\substack{00001\\0}=(0,0,0,0,0,-1,1)$
2	$\substack{11000\\0}=(0,-1,0,1,0,0,0)$	$\substack{00100\\1}=(1,1,1,0,1,0,0)$
	$\substack{01100\\0}=(0,0,-1,0,1,0,0)$	$\substack{00110\\0}=(1,1,0,1,1,0,0)$
	$\substack{00011\\0}=(0,0,0,0,-1,0,1)$	
3	$\substack{11100\\0}=(0,-1,0,0,1,0,0)$	$\substack{01100\\1}=(1,1,0,1,1,0,0)$
	$\substack{00110\\1}=(1,1,1,0,0,1,0)$	$\substack{01110\\0}=(0,0,-1,0,0,1,0)$
	$\substack{00111\\0}=(0,0,0,-1,0,0,1)$	
4	$\substack{11100\\1}=(1,0,1,1,1,0,0)$	$\substack{11110\\0}=(0,-1,0,0,0,1,0)$
	$\substack{01110\\1}=(1,1,0,1,0,1,0)$	$\substack{00111\\1}=(1,1,1,0,0,0,1)$
	$\substack{01111\\0}=(0,0,-1,0,0,0,1)$	
5	$\substack{11110\\1}=(1,0,1,1,0,1,0)$	$\substack{11111\\0}=(0,-1,0,0,0,0,1)$
	$\substack{01210\\1}=(1,1,0,0,1,1,0)$	$\substack{01111\\1}=(1,1,0,1,0,0,1)$
6	$\substack{11210\\1}=(1,0,1,0,1,1,0)$	$\substack{11111\\1}=(1,0,1,1,0,0,1)$
	$\substack{01211\\1}=(1,1,0,0,1,0,1)$	
7	$\substack{12210\\1}=(1,0,0,1,1,1,0)$	$\substack{11211\\1}=(1,0,1,0,1,0,1)$
	$\substack{01221\\1}=(1,1,0,0,0,1,1)$	
8	$\substack{12211\\1}=(1,0,0,1,1,0,1)$	$\substack{11221\\1}=(1,0,1,0,0,1,1)$

9 $\genfrac{}{}{0pt}{}{12221}{1} = (1,0,0,1,0,1,1)$

10 $\genfrac{}{}{0pt}{}{12321}{1} = (1,0,0,0,1,1,1)$

11 $\genfrac{}{}{0pt}{}{12321}{2} = (2,1,1,1,1,1,1)$

Таблица 2. Положительные корни E_7

1 $\genfrac{}{}{0pt}{}{100000}{0} = (0,-1,1,0,0,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000000}{1} = (1,1,1,1,0,0,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{010000}{0} = (0,0,-1,1,0,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001000}{0} = (0,0,0,-1,1,0,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{000100}{0} = (0,0,0,0,-1,1,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000010}{0} = (0,0,0,0,0,-1,1,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{000001}{0} = (0,0,0,0,0,0,-1,1)$

2 $\genfrac{}{}{0pt}{}{110000}{0} = (0,-1,0,1,0,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001000}{1} = (1,1,1,0,1,0,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{011000}{0} = (0,0,-1,0,1,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001100}{0} = (0,0,0,-1,0,1,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{000110}{0} = (0,0,0,0,-1,0,1,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000011}{0} = (0,0,0,0,0,-1,0,1)$

3 $\genfrac{}{}{0pt}{}{111000}{0} = (0,-1,0,0,1,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{011000}{1} = (1,1,0,1,1,0,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{001100}{1} = (1,1,1,0,0,1,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{011100}{0} = (0,0,-1,0,0,1,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{001110}{0} = (0,0,0,-1,0,0,1,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000111}{0} = (0,0,0,0,-1,0,0,1)$

4 $\genfrac{}{}{0pt}{}{111000}{1} = (1,0,1,1,1,0,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{111100}{0} = (0,-1,0,0,0,1,0,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{011100}{1} = (1,1,0,1,0,1,0,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001110}{1} = (1,1,1,0,0,0,1,0)$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{011110}{0} = (0,0,-1,0,0,0,1,0)$ $\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001111}{0} = (0,0,0,-1,0,0,0,1)$

5 $\substack{111100\\1} = (1,0,1,1,0,1,0,0)$ $\quad \substack{111110\\0} = (0,-1,0,0,0,0,1,0)$

$\substack{012100\\1} = (1,1,0,0,1,1,0,0)$ $\quad \substack{011110\\1} = (1,1,0,1,0,0,1,0)$

$\substack{001111\\1} = (1,1,1,0,0,0,0,1)$ $\quad \substack{011111\\0} = (0,0,-1,0,0,0,0,1)$

6 $\substack{112100\\1} = (1,0,1,0,1,1,0,0)$ $\quad \substack{111110\\1} = (1,0,1,1,0,0,1,0)$

$\substack{111111\\0} = (0,-1,0,0,0,0,0,1)$ $\quad \substack{012110\\1} = (1,1,0,0,1,0,1,0)$

$\substack{011111\\1} = (1,1,0,1,0,0,0,1)$

7 $\substack{122100\\1} = (1,0,0,1,1,1,0,0)$ $\quad \substack{112110\\1} = (1,0,1,0,1,0,1,0)$

$\substack{111111\\1} = (1,0,1,1,0,0,0,1)$ $\quad \substack{012210\\1} = (1,1,0,0,0,1,1,0)$

$\substack{012111\\1} = (1,1,0,0,1,0,0,1)$

8 $\substack{122110\\1} = (1,0,0,1,1,0,1,0)$ $\quad \substack{112210\\1} = (1,0,1,0,0,1,1,0)$

$\substack{112111\\1} = (1,0,1,0,1,0,0,1)$ $\quad \substack{012211\\1} = (1,1,0,0,0,1,0,1)$

9 $\substack{122210\\1} = (1,0,0,1,0,1,1,0)$ $\quad \substack{122111\\1} = (1,0,0,1,1,0,0,1)$

$\substack{112211\\1} = (1,0,1,0,0,1,0,1)$ $\quad \substack{012221\\1} = (1,1,0,0,0,0,1,1)$

10 $\substack{123210\\1} = (1,0,0,0,1,1,1,0)$ $\quad \substack{122211\\1} = (1,0,0,1,0,1,0,1)$

$\substack{112221\\1} = (1,0,1,0,0,0,1,1)$

11 $\substack{123210\\2} = (2,1,1,1,1,1,1,0)$ $\quad \substack{123211\\1} = (1,0,0,0,1,1,0,1)$

$\substack{122221\\1} = (1,0,0,1,0,0,1,1)$

12 $\substack{123211\\2} = (2,1,1,1,1,1,0,1)$ $\quad \substack{123221\\1} = (1,0,0,0,1,0,1,1)$

13 $\substack{123221\\2} = (2,1,1,1,1,0,1,1)$ $\quad \substack{123321\\1} = (1,0,0,0,0,1,1,1)$

14 $\substack{123321\\2} = (2,1,1,1,0,1,1,1)$

15 $\begin{smallmatrix}124321\\2\end{smallmatrix} = (2,1,1,0,1,1,1,1)$

16 $\begin{smallmatrix}134321\\2\end{smallmatrix} = (2,1,0,1,1,1,1,1)$

17 $\begin{smallmatrix}234321\\2\end{smallmatrix} = (2,0,1,1,1,1,1,1)$

Таблица 3. Веса $V(\varpi_1)$

8	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}45642\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}10000\\0\end{smallmatrix}$	$= (1,-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
7	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15642\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}\bar{1}1000\\0\end{smallmatrix}$	$= (1,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
6	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12642\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}0\bar{1}100\\0\end{smallmatrix}$	$= (1,\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
5	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12342\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}00\bar{1}10\\1\end{smallmatrix}$	$= (1,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
4	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12342\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}00010\\\bar{1}\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12312\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}000\bar{1}1\\1\end{smallmatrix}$	$= (1,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
3	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12312\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}001\bar{1}1\\\bar{1}\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1231\bar{1}\\3\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}0000\bar{1}\\1\end{smallmatrix}$	$= (1,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
2	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12012\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}01\bar{1}01\\0\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1231\bar{1}\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}0010\bar{1}\\\bar{1}\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
1	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\bar{1}012\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}1\bar{1}001\\0\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1201\bar{1}\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}01\bar{1}1\bar{1}\\0\end{smallmatrix}$	$= (0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
0	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\bar{2}\bar{1}012\\0\end{pmatrix}$	$= \begin{smallmatrix}\bar{1}0001\\0\end{smallmatrix}$	$= (0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

	$\frac{1}{3}\binom{1\bar{1}01\bar{1}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{1\bar{1}01\bar{1}}{0}$	$=$	$(0,-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
	$\frac{1}{3}\binom{120\overline{21}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{010\bar{1}0}{0}$	$=$	$(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-1}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{21}01\bar{1}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{1}001\bar{1}}{0}$	$=$	$(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
	$\frac{1}{3}\binom{1\bar{1}0\overline{21}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{1\bar{1}1\bar{1}0}{0}$	$=$	$(0,-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-2}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{21}0\overline{21}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{1}01\bar{1}0}{0}$	$=$	$(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
	$\frac{1}{3}\binom{1\overline{1321}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{10\bar{1}00}{1}$	$=$	$(0,-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-3}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{21321}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{1}1\bar{1}00}{1}$	$=$	$(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
	$\frac{1}{3}\binom{1\overline{1321}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{10000}{\bar{1}}$	$=$	$(-1,-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-4}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{21321}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{\bar{1}1000}{\bar{1}}$	$=$	$(-1,-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
	$\frac{1}{3}\binom{\overline{24321}}{0}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{0\bar{1}000}{1}$	$=$	$(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-5}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{24321}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{0\bar{1}100}{\bar{1}}$	$=$	$(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-6}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{24621}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{00\bar{1}10}{0}$	$=$	$(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-7}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{24651}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{000\bar{1}1}{0}$	$=$	$(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$
$\mathbf{-8}$	$\frac{1}{3}\binom{\overline{24654}}{\bar{3}}$	$=$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{0000\bar{1}}{0}$	$=$	$(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

Таблица 4. Веса $V(\varpi_1)$ как корни E_7

1	$\genfrac{}{}{0pt}{}{000001}{0} = (0,0,0,0,0,0,-1,1)$	
2	$\genfrac{}{}{0pt}{}{000011}{0} = (0,0,0,0,0,-1,0,1)$	
3	$\genfrac{}{}{0pt}{}{000111}{0} = (0,0,0,0,-1,0,0,1)$	
4	$\genfrac{}{}{0pt}{}{001111}{0} = (0,0,0,-1,0,0,0,1)$	
5	$\genfrac{}{}{0pt}{}{001111}{1} = (1,1,1,0,0,0,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{011111}{0} = (0,0,-1,0,0,0,0,1)$
6	$\genfrac{}{}{0pt}{}{111111}{0} = (0,-1,0,0,0,0,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{011111}{1} = (1,1,0,1,0,0,0,1)$
7	$\genfrac{}{}{0pt}{}{111111}{1} = (1,0,1,1,0,0,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{012111}{1} = (1,1,0,0,1,0,0,1)$
8	$\genfrac{}{}{0pt}{}{112111}{1} = (1,0,1,0,1,0,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{012211}{1} = (1,1,0,0,0,1,0,1)$
9	$\genfrac{}{}{0pt}{}{122111}{1} = (1,0,0,1,1,0,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{112211}{1} = (1,0,1,0,0,1,0,1)$
	$\genfrac{}{}{0pt}{}{012221}{1} = (1,1,0,0,0,0,1,1)$	
10	$\genfrac{}{}{0pt}{}{122211}{1} = (1,0,0,1,0,1,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{112221}{1} = (1,0,1,0,0,0,1,1)$
11	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123211}{1} = (1,0,0,0,1,1,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{122221}{1} = (1,0,0,1,0,0,1,1)$
12	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123211}{2} = (2,1,1,1,1,1,0,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123221}{1} = (1,0,0,0,1,0,1,1)$
13	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123221}{2} = (2,1,1,1,1,0,1,1)$	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123321}{1} = (1,0,0,0,0,1,1,1)$
14	$\genfrac{}{}{0pt}{}{123321}{2} = (2,1,1,1,0,1,1,1)$	
15	$\genfrac{}{}{0pt}{}{124321}{2} = (2,1,1,0,1,1,1,1)$	
16	$\genfrac{}{}{0pt}{}{134321}{2} = (2,1,0,1,1,1,1,1)$	
17	$\genfrac{}{}{0pt}{}{234321}{2} = (2,0,1,1,1,1,1,1)$	

Таблица 5. Структурные константы $G(\mathrm{E}_6, R)$

	10000 01000 00100 00010 00001 00000	01000 00100 01010 00111 00001 10000	01000 00110 01101 01111 10011 10000	01100 01011 01110 11111 10111 10001	01100 01011 11111 11121 11111 10101	11011 11111 11121 21222 11111 01101	01111 11111 12122 22223 21222 11111	1 2 2 3 2 1
100000	00+00	000+0	00+0+	000+0	+00++	00+00	+0000	0
010000	000+0	000++	0+00+	+0+00	+0+00	00000	0000+	0
001000	−00+0	00+0+	000+0	+000+	00000	+000+	00+00	0
000100	0−−0+	0−000	+0000	000+0	0+00+	0+000	000+0	0
000010	000−0	+0−−0	0−−00	0−000	00000	00+0+	0+000	0
000001	0000−	0000−	000−−	00−−0	0−0−0	−00−0	00000	0
101000	000+0	00+0+	000+0	+000+	000−0	00−00	−0000	0
010100	00−0+	0−000	+000−	00−00	−0−00	00000	000+0	0
001100	−−00+	00000	+00−0	0000−	0+000	0+000	00−00	0
000110	0−−00	+−000	00−00	0−000	0000−	0−000	0+000	0
000011	000−0	00−−0	0−−00	0−000	000−0	−00−0	00000	0
101100	0−00+	00000	+00−0	000−−	0000−	00000	+0000	0
011100	−000+	0000+	+0000	+0−00	00−00	00000	00−00	0
010110	00−00	+−0+0	0+000	00000	+0+00	00000	0+000	0
001110	−−000	+0+00	00000	0−00+	00000	0−00−	00000	0
000111	0−−00	0−000	00−00	0−0+0	0+000	000−0	00000	0
111100	0000+	0000+	+000+	+0000	+0000	00000	+0000	0
101110	0−000	+0+00	00+00	0000+	0000+	00+00	00000	0
011110	−00−0	+0000	0+000	−0000	00+00	0000−	00000	0
010111	00−00	0−0+0	0+00−	00−00	00000	000−0	00000	0
001111	−−000	00+00	000−0	0−000	0+000	+0000	00000	0
111110	000−0	+00−0	00000	−0000	−0000	00+00	00000	0
101111	0−000	00+00	00+−0	000−0	000−0	00000	00000	0
011210	−0000	++000	+0000	00000	00+00	0+000	00000	0
011111	−00−0	0000+	0+000	00−00	00000	+0000	00000	0
111210	00−00	+0000	+0000	00000	−000−	00000	00000	0
111111	000−0	000−+	0000+	00000	000−0	00000	00000	0
011211	−000−	0+000	00000	00−00	0−000	00000	00000	0
112210	00000	+0000	+0000	+000+	00000	00000	00000	0
111211	00−0−	00000	0000+	000+0	00000	00000	00000	0
011221	−0000	0+000	0−000	0−000	00000	00000	00000	0
112211	0000−	0000−	000−0	00000	00000	00000	00000	0
111221	00−00	000+0	00+00	00000	00000	00000	00000	0
112221	000−0	00−00	00000	00000	00000	00000	00000	0
112321	0−000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0
122321	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0

Таблица 6. Структурные константы $V(\varpi_1)$

	0000001	0000011	0000111	0001111	0011111	0101111	1011111	0111111	1111111	0112111	1112111	0112211	1121111	1112211	0112221	1122211	1112221	1123211	1122221	1223211	1123221	1223221	1123321	1223321	1224321	1234321	2234321
100000	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	0	+	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0
010000	0	0	0	+	0	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	+	0	0	0	0
001000	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
000100	0	0	+	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	0	0	0	+	0	0	0
000010	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0
000001	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0
101000	0	0	0	+	+	0	0	0	0	−	0	−	0	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
010100	0	0	+	0	0	−	−	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	0	0	−	0	0	0	0
001100	0	0	+	0	−	0	0	0	+	0	0	0	0	−	0	0	−	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0
000110	0	+	0	0	0	0	0	−	−	0	0	0	+	0	0	0	0	0	−	0	0	+	0	0	0	0	0
000011	+	0	0	0	0	0	0	0	0	−	−	0	−	0	0	0	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0
101100	0	0	+	0	−	0	0	−	0	0	0	+	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0
011100	0	0	+	+	0	0	−	0	0	0	0	0	0	−	0	0	−	0	0	0	0	0	−	0	0	0	0
010110	0	+	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0
001110	0	+	0	0	+	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
000111	+	0	0	0	0	0	0	+	+	0	0	0	−	0	0	−	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
111100	0	0	+	+	0	+	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	−	0	0	0	0
101110	0	+	0	0	+	0	0	+	0	+	0	0	0	0	−	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
011110	0	+	0	−	0	0	+	0	0	0	−	0	0	0	0	0	+	0	0	0	−	0	0	0	0	0	0
010111	+	0	0	0	0	−	−	0	0	0	0	0	−	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0
001111	+	0	0	0	−	0	0	0	+	0	+	0	0	+	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
111110	0	+	0	−	0	−	0	0	0	+	0	0	0	0	−	0	0	0	0	0	−	0	0	0	0	0	0
101111	+	0	0	0	−	0	0	−	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
011210	0	+	+	0	0	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0
011111	+	0	0	+	0	0	−	0	0	0	+	0	0	+	0	0	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111210	0	+	+	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	−	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0
111111	+	0	0	+	0	+	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0
011211	+	0	−	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112210	0	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111211	+	0	−	0	0	+	0	+	0	0	0	−	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
011221	+	+	0	0	0	0	−	0	−	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112211	+	0	−	−	−	0	0	0	0	0	0	−	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111221	+	+	0	0	0	+	0	+	0	+	0	0	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112221	+	+	0	−	−	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
112321	+	+	+	0	−	0	0	−	−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
122321	+	+	+	+	0	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 7. Матрица знаков $V(\varpi_1)$

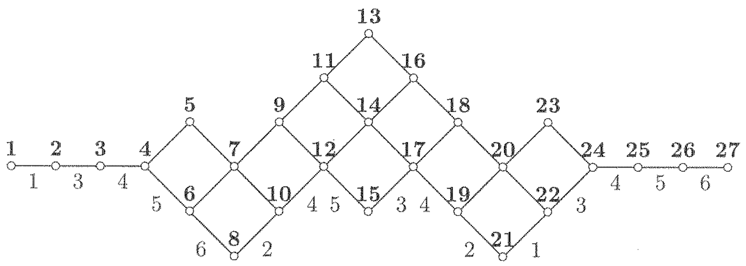
	0000001	0000011	0000111	0001111	0011111	0101111	1011111	0111111	1111111	0112111	1112111	0112211	1122111	1112211	0112221	1122211	1112221	1123211	1122221	1223211	1123221	1223221	1123321	1223321	1224321	1234321	2234321
0000001	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	0	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0
0000011	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	+	0	0	0	0	0
0000111	+	+	0	+	+	+	+	+	+	0	0	+	0	+	−	+	−	0	−	0	0	0	+	+	0	0	0
0001111	+	+	+	0	+	+	+	0	0	+	+	−	0	−	+	0	+	+	0	0	−	0	−	0	+	0	0
0011111	+	+	+	+	0	0	0	+	+	−	−	+	0	+	−	0	−	0	0	+	0	−	0	−	−	0	0
0101111	+	+	+	+	0	0	+	+	0	−	0	+	+	0	−	−	0	−	+	0	+	0	+	0	0	+	0
1011111	+	+	+	+	0	+	0	0	+	0	−	0	−	+	0	+	−	+	−	0	−	0	−	0	0	0	+
0111111	+	+	+	0	+	+	0	0	+	+	0	−	−	0	+	+	0	0	−	−	0	+	0	+	0	−	0
1111111	+	+	+	0	+	0	+	+	0	0	+	0	+	−	0	−	+	0	+	+	0	−	0	−	0	0	−
0112111	+	+	0	+	−	−	0	+	0	0	+	+	−	0	−	0	0	+	0	+	−	−	0	0	+	+	0
1112111	+	+	0	+	−	0	−	0	+	+	0	0	+	+	0	0	−	−	0	−	+	+	0	0	−	0	+
0112211	+	0	+	−	+	+	0	−	0	+	0	0	0	+	+	−	0	+	0	+	0	0	−	−	−	−	0
1122111	+	+	0	0	0	+	−	−	+	−	+	0	0	0	0	+	0	+	−	+	−	−	0	0	0	−	−
1112211	+	0	+	−	+	0	+	0	−	0	+	+	0	0	0	+	+	−	0	−	0	0	+	+	+	0	−
0112221	0	+	−	+	−	−	0	+	0	−	0	+	0	0	0	0	+	0	−	0	+	+	−	−	−	−	0
1122211	+	0	+	0	0	−	+	+	−	0	0	−	+	+	0	0	0	+	+	+	0	0	−	−	0	+	+
1112221	0	+	−	+	−	0	−	0	+	0	−	0	0	+	+	0	0	0	+	0	−	−	+	+	+	0	−
1123211	+	0	0	+	0	−	+	0	0	+	−	+	+	−	0	+	0	0	0	+	+	0	+	0	−	−	−
1122221	0	+	−	0	0	+	−	−	+	0	0	0	−	0	−	+	+	0	0	0	+	+	−	−	0	+	+
1223211	+	0	0	0	+	0	0	−	+	+	−	+	+	−	0	+	0	+	0	0	0	+	0	+	+	+	+
1123221	0	+	0	−	0	+	−	0	0	−	+	0	−	0	+	0	−	+	+	0	0	+	+	0	−	−	−
1223221	0	+	0	0	−	0	0	+	−	−	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+	+	0	0	+	+	+	+
1123321	0	0	+	−	0	+	−	0	0	0	0	−	0	+	−	−	+	+	−	0	+	0	0	+	−	−	−
1223321	0	0	+	0	−	0	0	+	−	0	0	−	0	+	−	−	+	0	−	+	0	+	+	0	+	+	+
1224321	0	0	0	+	−	0	0	0	0	+	−	−	0	+	−	0	+	−	0	+	−	+	−	+	0	+	+
1234321	0	0	0	0	0	+	0	−	0	+	0	−	−	0	−	+	0	−	+	+	−	+	−	+	+	0	+
2234321	0	0	0	0	0	0	+	0	−	0	+	0	−	−	0	+	−	−	+	+	−	+	−	+	+	+	0

Таблица 8. Нумерации весов: естественная, A_5 и D_5

1	$\substack{234321\\2}$	$\substack{234321\\2}$	$\substack{234321\\2}$
2	$\substack{134321\\2}$	$\substack{134321\\2}$	$\substack{134321\\2}$
3	$\substack{124321\\2}$	$\substack{124321\\2}$	$\substack{124321\\2}$
4	$\substack{123321\\2}$	$\substack{123321\\2}$	$\substack{123321\\2}$
5	$\substack{123321\\1}$	$\substack{123221\\2}$	$\substack{123321\\1}$
6	$\substack{123221\\2}$	$\substack{123211\\2}$	$\substack{123221\\2}$
7	$\substack{123221\\1}$	$\substack{123321\\1}$	$\substack{123221\\1}$
8	$\substack{123211\\2}$	$\substack{123221\\1}$	$\substack{123211\\2}$
9	$\substack{122221\\1}$	$\substack{122221\\1}$	$\substack{122221\\1}$
10	$\substack{123211\\1}$	$\substack{123211\\1}$	$\substack{123211\\1}$
11	$\substack{112221\\1}$	$\substack{112221\\1}$	$\substack{112221\\1}$
12	$\substack{122211\\1}$	$\substack{122211\\1}$	$\substack{122211\\1}$
13	$\substack{012221\\1}$	$\substack{012221\\1}$	$\substack{112211\\1}$
14	$\substack{112211\\1}$	$\substack{112211\\1}$	$\substack{122111\\1}$
15	$\substack{122111\\1}$	$\substack{122111\\1}$	$\substack{112111\\1}$
16	$\substack{012211\\1}$	$\substack{012211\\1}$	$\substack{111111\\1}$
17	$\substack{112111\\1}$	$\substack{112111\\1}$	$\substack{111111\\0}$
18	$\substack{012111\\1}$	$\substack{012111\\1}$	$\substack{012221\\1}$
19	$\substack{111111\\1}$	$\substack{111111\\1}$	$\substack{012211\\1}$
20	$\substack{011111\\1}$	$\substack{011111\\1}$	$\substack{012111\\1}$
21	$\substack{111111\\0}$	$\substack{001111\\1}$	$\substack{011111\\1}$

22	011111 0	111111 0	011111 0
23	001111 1	011111 0	001111 1
24	001111 0	001111 0	001111 0
25	000111 0	000111 0	000111 0
26	000011 0	000011 0	000011 0
27	000001 0	000001 0	000001 0

Таблица 9. Матрица знаков: естественная нумерация весов



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	0	−	−	0	+	0	−	0	+	0	0	0	0	0	0
2	+	0	+	+	−	+	−	+	+	−	0	+	−	0	−	−	0	+	0	−	0	+	0	0	0	0	0
3	+	+	0	+	−	+	−	+	0	−	+	0	−	+	0	−	−	+	0	0	0	0	−	+	0	0	0
4	+	+	+	0	+	+	0	+	−	0	+	−	−	+	0	−	0	0	−	+	0	0	−	0	+	0	0
5	−	−	−	+	0	0	+	0	−	+	+	−	−	+	0	−	0	0	0	0	−	+	0	−	+	0	0
6	+	+	+	+	0	0	+	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	−	−	+	0	0	−	0	0	+	0
7	−	−	−	0	+	+	0	0	+	+	−	0	+	0	−	0	+	−	0	0	−	+	0	−	0	+	0
8	+	+	+	+	0	+	0	0	0	+	0	+	0	−	+	+	−	+	+	−	0	0	+	0	0	0	+
9	+	+	0	−	−	+	+	0	0	0	+	+	−	0	−	0	0	0	+	−	−	+	0	0	−	+	0
10	−	−	−	0	+	0	+	+	0	0	0	+	0	−	+	+	−	+	0	0	+	−	0	+	0	0	+
11	−	0	+	+	+	−	−	0	+	0	0	0	+	+	0	0	−	0	+	0	−	0	−	+	−	+	0
12	+	+	0	−	−	0	0	+	+	+	0	0	0	+	+	−	0	0	−	+	+	−	0	0	+	0	+
13	0	−	−	−	−	+	+	0	−	0	+	0	0	0	0	+	0	−	0	+	0	−	−	+	−	+	0
14	−	0	+	+	+	0	0	−	0	−	+	+	0	0	0	+	+	0	−	0	+	0	+	−	+	0	+
15	−	−	0	0	0	−	−	+	−	+	0	+	0	0	0	0	+	−	+	−	−	+	0	0	0	+	+
16	0	−	−	−	−	0	0	+	0	+	0	−	+	+	0	0	0	+	0	−	0	+	+	−	+	0	+
17	+	0	−	0	0	+	+	−	0	−	−	0	0	+	+	0	0	+	+	0	−	0	−	+	0	+	+
18	0	+	+	0	0	−	−	+	0	+	0	0	−	0	−	+	+	0	0	+	0	−	−	+	0	+	+
19	−	0	0	−	0	−	0	+	+	0	+	−	0	−	+	0	+	0	0	+	+	0	+	0	+	+	+
20	0	−	0	+	0	+	0	−	−	0	0	+	+	0	−	−	0	+	+	0	0	+	+	0	+	+	+
21	+	0	0	0	−	0	−	0	−	+	−	+	0	+	−	0	−	0	+	0	0	+	0	+	+	+	+
22	0	+	0	0	+	0	+	0	+	−	0	−	−	0	+	+	0	−	0	+	+	0	0	+	+	+	+
23	0	0	−	−	0	−	0	+	0	0	−	0	−	+	0	+	−	−	+	+	0	0	0	+	+	+	+
24	0	0	+	0	−	0	−	0	0	+	+	0	+	−	0	−	+	+	0	0	+	+	+	0	+	+	+
25	0	0	0	+	+	0	0	0	−	0	−	+	−	+	0	+	0	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+
26	0	0	0	0	0	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+
27	0	0	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0

Таблица 10. Корневые элементы: естественная нумерация весов

$$e_{\substack{10000\\0}} = e_{1,2} + e_{11,13} + e_{14,16} + e_{17,18} + e_{19,20} + e_{21,22}$$
$$e_{\substack{00000\\1}} = e_{4,5} + e_{6,7} + e_{8,10} + e_{19,21} + e_{20,22} + e_{23,24}$$
$$e_{\substack{01000\\0}} = e_{2,3} + e_{9,11} + e_{12,14} + e_{15,17} + e_{20,23} + e_{22,24}$$
$$e_{\substack{00100\\0}} = e_{3,4} + e_{7,9} + e_{10,12} + e_{17,19} + e_{18,20} + e_{24,25}$$
$$e_{\substack{00010\\0}} = e_{4,6} + e_{5,7} + e_{12,15} + e_{14,17} + e_{16,18} + e_{25,26}$$
$$e_{\substack{00001\\0}} = e_{6,8} + e_{7,10} + e_{9,12} + e_{11,14} + e_{13,16} + e_{26,27}$$
$$e_{\substack{11000\\0}} = e_{1,3} - e_{9,13} - e_{12,16} - e_{15,18} + e_{19,23} + e_{21,24}$$
$$e_{\substack{00100\\1}} = -e_{3,5} + e_{6,9} + e_{8,12} - e_{17,21} - e_{18,22} + e_{23,25}$$
$$e_{\substack{01100\\0}} = e_{2,4} - e_{7,11} - e_{10,14} + e_{15,19} - e_{18,23} + e_{22,25}$$
$$e_{\substack{00110\\0}} = e_{3,6} - e_{5,9} + e_{10,15} - e_{14,19} - e_{16,20} + e_{24,26}$$
$$e_{\substack{00011\\0}} = e_{4,8} + e_{5,10} - e_{9,15} - e_{11,17} - e_{13,18} + e_{25,27}$$
$$e_{\substack{11100\\0}} = e_{1,4} + e_{7,13} + e_{10,16} - e_{15,20} - e_{17,23} + e_{21,25}$$
$$e_{\substack{01100\\1}} = -e_{2,5} - e_{6,11} - e_{8,14} - e_{15,21} + e_{18,24} + e_{20,25}$$
$$e_{\substack{00110\\1}} = -e_{3,7} - e_{4,9} + e_{8,15} + e_{14,21} + e_{16,22} + e_{23,26}$$
$$e_{\substack{01110\\0}} = e_{2,6} + e_{5,11} - e_{10,17} - e_{12,19} + e_{16,23} + e_{22,26}$$
$$e_{\substack{00111\\0}} = e_{3,8} - e_{5,12} - e_{7,15} + e_{11,19} + e_{13,20} + e_{24,27}$$
$$e_{\substack{11100\\1}} = -e_{1,5} + e_{6,13} + e_{8,16} + e_{15,22} + e_{17,24} + e_{19,25}$$
$$e_{\substack{11110\\0}} = e_{1,6} - e_{5,13} + e_{10,18} + e_{12,20} + e_{14,23} + e_{21,26}$$
$$e_{\substack{01110\\1}} = -e_{2,7} + e_{4,11} - e_{8,17} + e_{12,21} - e_{16,24} + e_{20,26}$$
$$e_{\substack{00111\\1}} = -e_{3,10} - e_{4,12} - e_{6,15} - e_{11,21} - e_{13,22} + e_{23,27}$$
$$e_{\substack{01111\\0}} = e_{2,8} + e_{5,14} + e_{7,17} + e_{9,19} - e_{13,23} + e_{22,27}$$

$$e_{\substack{11110\\1}} = -e_{1,7} - e_{4,13} + e_{8,18} - e_{12,22} - e_{14,24} + e_{19,26}$$

$$e_{\substack{11111\\0}} = e_{1,8} - e_{5,16} - e_{7,18} - e_{9,20} - e_{11,23} + e_{21,27}$$

$$e_{\substack{01210\\1}} = e_{2,9} + e_{3,11} + e_{8,19} + e_{10,21} + e_{16,25} + e_{18,26}$$

$$e_{\substack{01111\\1}} = -e_{2,10} + e_{4,14} + e_{6,17} - e_{9,21} + e_{13,24} + e_{20,27}$$

$$e_{\substack{11210\\1}} = e_{1,9} - e_{3,13} - e_{8,20} - e_{10,22} + e_{14,25} + e_{17,26}$$

$$e_{\substack{11111\\1}} = -e_{1,10} - e_{4,16} - e_{6,18} + e_{9,22} + e_{11,24} + e_{19,27}$$

$$e_{\substack{01211\\1}} = e_{2,12} + e_{3,14} - e_{6,19} - e_{7,21} - e_{13,25} + e_{18,27}$$

$$e_{\substack{12210\\1}} = -e_{1,11} - e_{2,13} + e_{8,23} + e_{10,24} + e_{12,25} + e_{15,26}$$

$$e_{\substack{11211\\1}} = e_{1,12} - e_{3,16} + e_{6,20} + e_{7,22} - e_{11,25} + e_{17,27}$$

$$e_{\substack{01221\\1}} = -e_{2,15} - e_{3,17} - e_{4,19} - e_{5,21} + e_{13,26} + e_{16,27}$$

$$e_{\substack{12211\\1}} = -e_{1,14} - e_{2,16} - e_{6,23} - e_{7,24} - e_{9,25} + e_{15,27}$$

$$e_{\substack{11221\\1}} = -e_{1,15} + e_{3,18} + e_{4,20} + e_{5,22} + e_{11,26} + e_{14,27}$$

$$e_{\substack{12221\\1}} = e_{1,17} + e_{2,18} - e_{4,23} - e_{5,24} + e_{9,26} + e_{12,27}$$

$$e_{\substack{12321\\1}} = -e_{1,19} - e_{2,20} - e_{3,23} + e_{5,25} + e_{7,26} + e_{10,27}$$

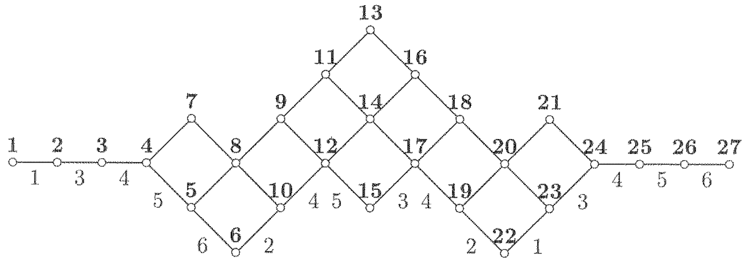
$$e_{\substack{12321\\2}} = e_{1,21} + e_{2,22} + e_{3,24} + e_{4,25} + e_{6,26} + e_{8,27}$$

Таблица 11. Кубическая форма: естественная нумерация весов

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & x_1x_{13}x_{27} - x_1x_{16}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{22}x_{23} \\
& - x_2x_{11}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{23} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{12}x_{26} + x_3x_{15}x_{25} - x_3x_{19}x_{22} + x_3x_{20}x_{21} \\
& - x_4x_7x_{27} + x_4x_{10}x_{26} - x_4x_{15}x_{24} + x_4x_{17}x_{22} - x_4x_{18}x_{21} \\
& + x_5x_6x_{27} - x_5x_8x_{26} + x_5x_{15}x_{23} - x_5x_{17}x_{20} + x_5x_{18}x_{19} \\
& - x_6x_{10}x_{25} + x_6x_{12}x_{24} - x_6x_{14}x_{22} + x_6x_{16}x_{21} + x_7x_8x_{25} \\
& - x_7x_{12}x_{23} + x_7x_{14}x_{20} - x_7x_{16}x_{19} - x_8x_9x_{24} + x_8x_{11}x_{22} \\
& - x_8x_{13}x_{21} + x_9x_{10}x_{23} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{16}x_{17} - x_{10}x_{11}x_{20} \\
& + x_{10}x_{13}x_{19} + x_{11}x_{12}x_{18} - x_{11}x_{15}x_{16} - x_{12}x_{13}x_{17} + x_{13}x_{14}x_{15}
\end{aligned}$$

$$f_1(x) = x_{13}x_{27} - x_{16}x_{26} + x_{18}x_{25} - x_{20}x_{24} + x_{22}x_{23}$$
$$f_2(x) = -x_{11}x_{27} + x_{14}x_{26} - x_{17}x_{25} + x_{19}x_{24} - x_{21}x_{23}$$
$$f_3(x) = x_9x_{27} - x_{12}x_{26} + x_{15}x_{25} - x_{19}x_{22} + x_{20}x_{21}$$
$$f_4(x) = -x_7x_{27} + x_{10}x_{26} - x_{15}x_{24} + x_{17}x_{22} - x_{18}x_{21}$$
$$f_5(x) = x_6x_{27} - x_8x_{26} + x_{15}x_{23} - x_{17}x_{20} + x_{18}x_{19}$$
$$f_6(x) = x_5x_{27} - x_{10}x_{25} + x_{12}x_{24} - x_{14}x_{22} + x_{16}x_{21}$$
$$f_7(x) = -x_4x_{27} + x_8x_{25} - x_{12}x_{23} + x_{14}x_{20} - x_{16}x_{19}$$
$$f_8(x) = -x_5x_{26} + x_7x_{25} - x_9x_{24} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{21}$$
$$f_9(x) = x_3x_{27} - x_8x_{24} + x_{10}x_{23} - x_{14}x_{18} + x_{16}x_{17}$$
$$f_{10}(x) = x_4x_{26} - x_6x_{25} + x_9x_{23} - x_{11}x_{20} + x_{13}x_{19}$$
$$f_{11}(x) = -x_2x_{27} + x_8x_{22} - x_{10}x_{20} + x_{12}x_{18} - x_{15}x_{16}$$
$$f_{12}(x) = -x_3x_{26} + x_6x_{24} - x_7x_{23} + x_{11}x_{18} - x_{13}x_{17}$$
$$f_{13}(x) = x_1x_{27} - x_8x_{21} + x_{10}x_{19} - x_{12}x_{17} + x_{14}x_{15}$$
$$f_{14}(x) = x_2x_{26} - x_6x_{22} + x_7x_{20} - x_9x_{18} + x_{13}x_{15}$$
$$f_{15}(x) = x_3x_{25} - x_4x_{24} + x_5x_{23} - x_{11}x_{16} + x_{13}x_{14}$$
$$f_{16}(x) = -x_1x_{26} + x_6x_{21} - x_7x_{19} + x_9x_{17} - x_{11}x_{15}$$
$$f_{17}(x) = -x_2x_{25} + x_4x_{22} - x_5x_{20} + x_9x_{16} - x_{12}x_{13}$$
$$f_{18}(x) = x_1x_{25} - x_4x_{21} + x_5x_{19} - x_9x_{14} + x_{11}x_{12}$$
$$f_{19}(x) = x_2x_{24} - x_3x_{22} + x_5x_{18} - x_7x_{16} + x_{10}x_{13}$$
$$f_{20}(x) = -x_1x_{24} + x_3x_{21} - x_5x_{17} + x_7x_{14} - x_{10}x_{11}$$
$$f_{21}(x) = -x_2x_{23} + x_3x_{20} - x_4x_{18} + x_6x_{16} - x_8x_{13}$$
$$f_{22}(x) = x_1x_{23} - x_3x_{19} + x_4x_{17} - x_6x_{14} + x_8x_{11}$$
$$f_{23}(x) = x_1x_{22} - x_2x_{21} + x_5x_{15} - x_7x_{12} + x_9x_{10}$$
$$f_{24}(x) = -x_1x_{20} + x_2x_{19} - x_4x_{15} + x_6x_{12} - x_8x_9$$
$$f_{25}(x) = x_1x_{18} - x_2x_{17} + x_3x_{15} - x_6x_{10} + x_7x_8$$
$$f_{26}(x) = -x_1x_{16} + x_2x_{14} - x_3x_{12} + x_4x_{10} - x_5x_8$$
$$f_{27}(x) = x_1x_{13} - x_2x_{11} + x_3x_9 - x_4x_7 + x_5x_6$$

Таблица 12. Матрица знаков для A_5-нумерации весов



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	0	−	−	0	+	0	−	0	0	+	0	0	0	0	0
2	+	0	+	+	+	+	−	−	+	−	0	+	−	0	−	−	0	+	0	−	0	0	+	0	0	0	0
3	+	+	0	+	+	+	−	−	0	−	+	0	−	+	0	−	−	+	0	0	−	0	0	+	0	0	0
4	+	+	+	0	+	+	+	0	−	0	+	−	−	+	0	−	0	0	−	+	−	0	0	0	+	0	0
5	+	+	+	+	0	+	0	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	−	−	+	−	0	0	0	0	+	0
6	+	+	+	+	+	0	0	0	0	+	0	+	0	−	+	+	−	+	+	−	+	0	0	0	0	0	+
7	−	−	−	+	0	0	0	+	−	+	+	−	−	+	0	−	0	0	0	0	0	−	+	−	+	0	0
8	−	−	−	0	+	0	+	0	+	+	−	0	+	0	−	0	+	−	0	0	0	−	+	−	0	+	0
9	+	+	0	−	+	0	−	+	0	0	+	+	−	0	−	0	0	0	+	−	0	−	+	0	−	+	0
10	−	−	−	0	0	+	+	+	0	0	0	+	0	−	+	+	−	+	0	0	0	+	−	+	0	0	+
11	−	0	+	+	−	0	+	−	+	0	0	0	+	+	0	0	−	0	+	0	−	−	0	+	−	+	0
12	+	+	0	−	0	+	−	0	+	+	0	0	0	+	+	−	0	0	−	+	0	+	−	0	+	0	+
13	0	−	−	−	+	0	−	+	−	0	+	0	0	0	0	+	0	−	0	+	−	0	−	+	−	+	0
14	−	0	+	+	0	−	+	0	0	−	+	+	0	0	0	+	+	0	−	0	+	+	0	−	+	0	+
15	−	−	0	0	−	+	0	−	−	+	0	+	0	0	0	0	+	−	+	−	0	−	+	0	0	+	+
16	0	−	−	−	0	+	−	0	0	+	0	−	+	+	0	0	0	+	0	−	+	0	+	−	+	0	+
17	+	0	−	0	+	−	0	+	0	−	−	0	0	+	+	0	0	+	+	0	−	−	0	+	0	+	+
18	0	+	+	0	−	+	0	−	0	+	0	0	−	0	−	+	+	0	0	+	−	0	−	+	0	+	+
19	−	0	0	−	−	+	0	0	+	0	+	−	0	−	+	0	+	0	0	+	+	+	0	0	+	+	+
20	0	−	0	+	+	−	0	0	−	0	0	+	+	0	−	−	0	+	+	0	+	0	+	0	+	+	+
21	0	0	−	−	−	+	0	0	0	0	−	0	−	+	0	+	−	−	+	+	0	0	0	+	+	+	+
22	+	0	0	0	0	0	−	−	−	+	−	+	0	+	−	0	−	0	+	0	0	0	+	+	+	+	+
23	0	+	0	0	0	0	+	+	+	−	0	−	−	0	+	+	0	−	0	+	0	+	0	+	+	+	+
24	0	0	+	0	0	0	−	−	0	+	+	0	+	−	0	−	+	+	0	0	+	+	+	0	+	+	+
25	0	0	0	+	0	0	+	0	−	0	−	+	−	+	0	+	0	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+
26	0	0	0	0	+	0	0	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+
27	0	0	0	0	0	+	0	0	0	+	0	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0

Таблица 13. Корневые элементы для A_5-нумерации весов

$$
\begin{aligned}
e_{\substack{10000\\0}} &= e_{1,2} + e_{11,13} + e_{14,16} + e_{17,18} + e_{19,20} + e_{22,23}\\
e_{\substack{00000\\1}} &= e_{4,7} + e_{5,8} + e_{6,10} + e_{19,22} + e_{20,23} + e_{21,24}\\
e_{\substack{01000\\0}} &= e_{2,3} + e_{9,11} + e_{12,14} + e_{15,17} + e_{20,21} + e_{23,24}\\
e_{\substack{00100\\0}} &= e_{3,4} + e_{8,9} + e_{10,12} + e_{17,19} + e_{18,20} + e_{24,25}\\
e_{\substack{00010\\0}} &= e_{4,5} + e_{7,8} + e_{12,15} + e_{14,17} + e_{16,18} + e_{25,26}\\
e_{\substack{00001\\0}} &= e_{5,6} + e_{8,10} + e_{9,12} + e_{11,14} + e_{13,16} + e_{26,27}\\
e_{\substack{11000\\0}} &= e_{1,3} - e_{9,13} - e_{12,16} - e_{15,18} + e_{19,21} + e_{22,24}\\
e_{\substack{00100\\1}} &= -e_{3,7} + e_{5,9} + e_{6,12} - e_{17,22} - e_{18,23} + e_{21,25}\\
e_{\substack{01100\\0}} &= e_{2,4} - e_{8,11} - e_{10,14} + e_{15,19} - e_{18,21} + e_{23,25}\\
e_{\substack{00110\\0}} &= e_{3,5} - e_{7,9} + e_{10,15} - e_{14,19} - e_{16,20} + e_{24,26}\\
e_{\substack{00011\\0}} &= e_{4,6} + e_{7,10} - e_{9,15} - e_{11,17} - e_{13,18} + e_{25,27}\\
e_{\substack{11100\\0}} &= e_{1,4} + e_{8,13} + e_{10,16} - e_{15,20} - e_{17,21} + e_{22,25}\\
e_{\substack{01100\\1}} &= -e_{2,7} - e_{5,11} - e_{6,14} - e_{15,22} + e_{18,24} + e_{20,25}\\
e_{\substack{00110\\1}} &= -e_{3,8} - e_{4,9} + e_{6,15} + e_{14,22} + e_{16,23} + e_{21,26}\\
e_{\substack{01110\\0}} &= e_{2,5} + e_{7,11} - e_{10,17} - e_{12,19} + e_{16,21} + e_{23,26}\\
e_{\substack{00111\\0}} &= e_{3,6} - e_{7,12} - e_{8,15} + e_{11,19} + e_{13,20} + e_{24,27}\\
e_{\substack{11100\\1}} &= -e_{1,7} + e_{5,13} + e_{6,16} + e_{15,23} + e_{17,24} + e_{19,25}\\
e_{\substack{11110\\0}} &= e_{1,5} - e_{7,13} + e_{10,18} + e_{12,20} + e_{14,21} + e_{22,26}\\
e_{\substack{01110\\1}} &= -e_{2,8} + e_{4,11} - e_{6,17} + e_{12,22} - e_{16,24} + e_{20,26}\\
e_{\substack{00111\\1}} &= -e_{3,10} - e_{4,12} - e_{5,15} - e_{11,22} - e_{13,23} + e_{21,27}\\
e_{\substack{01111\\0}} &= e_{2,6} + e_{7,14} + e_{8,17} + e_{9,19} - e_{13,21} + e_{23,27}
\end{aligned}
$$

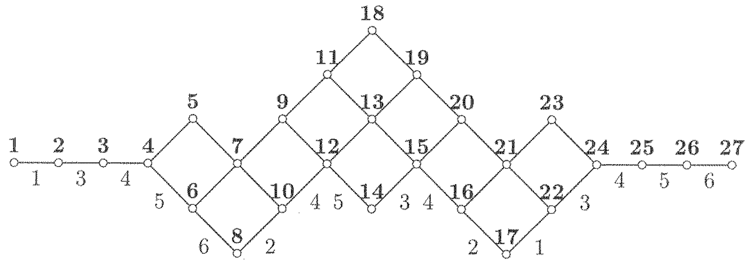
$$e_{\substack{11110\\1}} = -e_{1,8} - e_{4,13} + e_{6,18} - e_{12,23} - e_{14,24} + e_{19,26}$$
$$e_{\substack{11111\\0}} = e_{1,6} - e_{7,16} - e_{8,18} - e_{9,20} - e_{11,21} + e_{22,27}$$
$$e_{\substack{01210\\1}} = e_{2,9} + e_{3,11} + e_{6,19} + e_{10,22} + e_{16,25} + e_{18,26}$$
$$e_{\substack{01111\\1}} = -e_{2,10} + e_{4,14} + e_{5,17} - e_{9,22} + e_{13,24} + e_{20,27}$$
$$e_{\substack{11210\\1}} = e_{1,9} - e_{3,13} - e_{6,20} - e_{10,23} + e_{14,25} + e_{17,26}$$
$$e_{\substack{11111\\1}} = -e_{1,10} - e_{4,16} - e_{5,18} + e_{9,23} + e_{11,24} + e_{19,27}$$
$$e_{\substack{01211\\1}} = e_{2,12} + e_{3,14} - e_{5,19} - e_{8,22} - e_{13,25} + e_{18,27}$$
$$e_{\substack{12210\\1}} = -e_{1,11} - e_{2,13} + e_{6,21} + e_{10,24} + e_{12,25} + e_{15,26}$$
$$e_{\substack{11211\\1}} = e_{1,12} - e_{3,16} + e_{5,20} + e_{8,23} - e_{11,25} + e_{17,27}$$
$$e_{\substack{01221\\1}} = -e_{2,15} - e_{3,17} - e_{4,19} - e_{7,22} + e_{13,26} + e_{16,27}$$
$$e_{\substack{12211\\1}} = -e_{1,14} - e_{2,16} - e_{5,21} - e_{8,24} - e_{9,25} + e_{15,27}$$
$$e_{\substack{11221\\1}} = -e_{1,15} + e_{3,18} + e_{4,20} + e_{7,23} + e_{11,26} + e_{14,27}$$
$$e_{\substack{12221\\1}} = e_{1,17} + e_{2,18} - e_{4,21} - e_{7,24} + e_{9,26} + e_{12,27}$$
$$e_{\substack{12321\\1}} = -e_{1,19} - e_{2,20} - e_{3,21} + e_{7,25} + e_{8,26} + e_{10,27}$$
$$e_{\substack{12321\\2}} = e_{1,22} + e_{2,23} + e_{3,24} + e_{4,25} + e_{5,26} + e_{6,27}$$

Таблица 14. Кубическая форма для A_5-нумерации весов

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & x_1x_{13}x_{27} - x_1x_{16}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{21}x_{23} \\
& - x_2x_{11}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{22} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{12}x_{26} + x_3x_{15}x_{25} - x_3x_{19}x_{23} + x_3x_{20}x_{22} \\
& - x_4x_8x_{27} + x_4x_{10}x_{26} - x_4x_{15}x_{24} + x_4x_{17}x_{23} - x_4x_{18}x_{22} \\
& + x_5x_7x_{27} - x_5x_{10}x_{25} + x_5x_{12}x_{24} - x_5x_{14}x_{23} + x_5x_{16}x_{22} \\
& - x_6x_7x_{26} + x_6x_8x_{25} - x_6x_9x_{24} + x_6x_{11}x_{23} - x_6x_{13}x_{22} \\
& + x_7x_{15}x_{21} - x_7x_{17}x_{20} + x_7x_{18}x_{19} - x_8x_{12}x_{21} + x_8x_{14}x_{20} \\
& - x_8x_{16}x_{19} + x_9x_{10}x_{21} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{16}x_{17} - x_{10}x_{11}x_{20} \\
& + x_{10}x_{13}x_{19} + x_{11}x_{12}x_{18} - x_{11}x_{15}x_{16} - x_{12}x_{13}x_{17} + x_{13}x_{14}x_{15}
\end{aligned}$$

$$f_1(x) = x_{13}x_{27} - x_{16}x_{26} + x_{18}x_{25} - x_{20}x_{24} + x_{21}x_{23}$$
$$f_2(x) = -x_{11}x_{27} + x_{14}x_{26} - x_{17}x_{25} + x_{19}x_{24} - x_{21}x_{22}$$
$$f_3(x) = x_9x_{27} - x_{12}x_{26} + x_{15}x_{25} - x_{19}x_{23} + x_{20}x_{22}$$
$$f_4(x) = -x_8x_{27} + x_{10}x_{26} - x_{15}x_{24} + x_{17}x_{23} - x_{18}x_{22}$$
$$f_5(x) = x_7x_{27} - x_{10}x_{25} + x_{12}x_{24} - x_{14}x_{23} + x_{16}x_{22}$$
$$f_6(x) = -x_7x_{26} + x_8x_{25} - x_9x_{24} + x_{11}x_{23} - x_{13}x_{22}$$
$$f_7(x) = x_5x_{27} - x_6x_{26} + x_{15}x_{21} - x_{17}x_{20} + x_{18}x_{19}$$
$$f_8(x) = -x_4x_{27} + x_6x_{25} - x_{12}x_{21} + x_{14}x_{20} - x_{16}x_{19}$$
$$f_9(x) = x_3x_{27} - x_6x_{24} + x_{10}x_{21} - x_{14}x_{18} + x_{16}x_{17}$$
$$f_{10}(x) = x_4x_{26} - x_5x_{25} + x_9x_{21} - x_{11}x_{20} + x_{13}x_{19}$$
$$f_{11}(x) = -x_2x_{27} + x_6x_{23} - x_{10}x_{20} + x_{12}x_{18} - x_{15}x_{16}$$
$$f_{12}(x) = -x_3x_{26} + x_5x_{24} - x_8x_{21} + x_{11}x_{18} - x_{13}x_{17}$$
$$f_{13}(x) = x_1x_{27} - x_6x_{22} + x_{10}x_{19} - x_{12}x_{17} + x_{14}x_{15}$$
$$f_{14}(x) = x_2x_{26} - x_5x_{23} + x_8x_{20} - x_9x_{18} + x_{13}x_{15}$$
$$f_{15}(x) = x_3x_{25} - x_4x_{24} + x_7x_{21} - x_{11}x_{16} + x_{13}x_{14}$$
$$f_{16}(x) = -x_1x_{26} + x_5x_{22} - x_8x_{19} + x_9x_{17} - x_{11}x_{15}$$
$$f_{17}(x) = -x_2x_{25} + x_4x_{23} - x_7x_{20} + x_9x_{16} - x_{12}x_{13}$$
$$f_{18}(x) = x_1x_{25} - x_4x_{22} + x_7x_{19} - x_9x_{14} + x_{11}x_{12}$$
$$f_{19}(x) = x_2x_{24} - x_3x_{23} + x_7x_{18} - x_8x_{16} + x_{10}x_{13}$$
$$f_{20}(x) = -x_1x_{24} + x_3x_{22} - x_7x_{17} + x_8x_{14} - x_{10}x_{11}$$
$$f_{21}(x) = x_1x_{23} - x_2x_{22} + x_7x_{15} - x_8x_{12} + x_9x_{10}$$
$$f_{22}(x) = -x_2x_{21} + x_3x_{20} - x_4x_{18} + x_5x_{16} - x_6x_{13}$$
$$f_{23}(x) = x_1x_{21} - x_3x_{19} + x_4x_{17} - x_5x_{14} + x_6x_{11}$$
$$f_{24}(x) = -x_1x_{20} + x_2x_{19} - x_4x_{15} + x_5x_{12} - x_6x_9$$
$$f_{25}(x) = x_1x_{18} - x_2x_{17} + x_3x_{15} - x_5x_{10} + x_6x_8$$
$$f_{26}(x) = -x_1x_{16} + x_2x_{14} - x_3x_{12} + x_4x_{10} - x_6x_7$$
$$f_{27}(x) = x_1x_{13} - x_2x_{11} + x_3x_9 - x_4x_8 + x_5x_7$$

Таблица 15. Матрица знаков для D_5-нумерации весов



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	+	0	+	+	−	+	−	+	+	−	0	+	0	−	0	0	0	−	−	+	−	+	0	0	0	0	0
3	+	+	0	+	−	+	−	+	0	−	+	0	+	0	−	0	0	−	−	+	0	0	−	+	0	0	0
4	+	+	+	0	+	+	0	+	−	0	+	−	+	0	0	−	0	−	−	0	+	0	−	0	+	0	0
5	−	−	−	+	0	0	+	0	−	+	+	−	+	0	0	0	−	−	−	0	0	+	0	−	+	0	0
6	+	+	+	+	0	0	+	+	+	0	−	0	0	−	+	−	0	+	0	−	+	0	−	0	0	+	0
7	−	−	−	0	+	+	0	0	+	+	−	0	0	−	+	0	−	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0
8	+	+	+	+	0	+	0	0	0	+	0	+	−	+	−	+	0	0	+	+	−	0	+	0	0	0	+
9	+	+	0	−	−	+	+	0	0	0	+	+	0	−	0	+	−	−	0	0	−	+	0	0	−	+	0
10	−	−	−	0	+	0	+	+	0	0	0	+	−	+	−	0	+	0	+	+	0	−	0	+	0	0	+
11	−	0	+	+	+	−	−	0	+	0	0	0	+	0	−	+	−	+	0	0	0	0	−	+	−	+	0
12	+	+	0	−	−	0	0	+	+	+	0	0	+	+	0	−	+	0	−	0	+	−	0	0	+	0	+
13	−	0	+	+	+	0	0	−	0	−	+	+	0	0	+	−	+	0	+	0	0	0	+	−	+	0	+
14	−	−	0	0	0	−	−	+	−	+	0	+	0	0	+	+	−	0	0	−	−	+	0	0	0	+	+
15	+	0	−	0	0	+	+	−	0	−	−	0	+	+	0	+	−	0	0	+	0	0	−	+	0	+	+
16	−	0	0	−	0	−	0	+	+	0	+	−	−	+	+	0	+	0	0	0	+	0	+	0	+	+	+
17	+	0	0	0	−	0	−	0	−	+	−	+	+	−	−	+	0	0	0	0	0	+	0	+	+	+	+
18	0	−	−	−	−	+	+	0	−	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	−	+	−	−	+	−	+	0
19	0	−	−	−	−	0	0	+	0	+	0	−	+	0	0	0	0	+	0	+	−	+	+	−	+	0	+
20	0	+	+	0	0	−	−	+	0	+	0	0	0	−	+	0	0	−	+	0	+	−	−	+	0	+	+
21	0	−	0	+	0	+	0	−	−	0	0	+	0	−	0	+	0	+	−	+	0	+	+	0	+	+	+
22	0	+	0	0	+	0	+	0	+	−	0	−	0	+	0	0	+	−	+	−	+	0	0	+	+	+	+
23	0	0	−	−	0	−	0	+	0	0	−	0	+	0	−	+	0	−	+	−	+	0	0	+	+	+	+
24	0	0	+	0	−	0	−	0	0	+	+	0	−	0	+	0	+	+	−	+	0	+	+	0	+	+	+
25	0	0	0	+	+	0	0	0	−	0	−	+	+	0	0	+	+	−	+	0	+	+	+	+	0	+	+
26	0	0	0	0	0	+	+	0	+	0	+	0	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	0	+
27	0	0	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	0

Таблица 16. Корневые элементы для D_5-нумерации весов

$$e_{\substack{10000\\0}} = e_{1,2} + e_{11,18} + e_{13,19} + e_{15,20} + e_{16,21} + e_{17,22}$$

$$e_{\substack{00000\\1}} = e_{4,5} + e_{6,7} + e_{8,10} + e_{16,17} + e_{21,22} + e_{23,24}$$

$$e_{\substack{01000\\0}} = e_{2,3} + e_{9,11} + e_{12,13} + e_{14,15} + e_{21,23} + e_{22,24}$$

$$e_{\substack{00100\\0}} = e_{3,4} + e_{7,9} + e_{10,12} + e_{15,16} + e_{20,21} + e_{24,25}$$

$$e_{\substack{00010\\0}} = e_{4,6} + e_{5,7} + e_{12,14} + e_{13,15} + e_{19,20} + e_{25,26}$$

$$e_{\substack{00001\\0}} = e_{6,8} + e_{7,10} + e_{9,12} + e_{11,13} + e_{18,19} + e_{26,27}$$

$$e_{\substack{11000\\0}} = e_{1,3} - e_{9,18} - e_{12,19} - e_{14,20} + e_{16,23} + e_{17,24}$$

$$e_{\substack{00100\\1}} = -e_{3,5} + e_{6,9} + e_{8,12} - e_{15,17} - e_{20,22} + e_{23,25}$$

$$e_{\substack{01100\\0}} = e_{2,4} - e_{7,11} - e_{10,13} + e_{14,16} - e_{20,23} + e_{22,25}$$

$$e_{\substack{00110\\0}} = e_{3,6} - e_{5,9} + e_{10,14} - e_{13,16} - e_{19,21} + e_{24,26}$$

$$e_{\substack{00011\\0}} = e_{4,8} + e_{5,10} - e_{9,14} - e_{11,15} - e_{18,20} + e_{25,27}$$

$$e_{\substack{11100\\0}} = e_{1,4} + e_{7,18} + e_{10,19} - e_{14,21} - e_{15,23} + e_{17,25}$$

$$e_{\substack{01100\\1}} = -e_{2,5} - e_{6,11} - e_{8,13} - e_{14,17} + e_{20,24} + e_{21,25}$$

$$e_{\substack{00110\\1}} = -e_{3,7} - e_{4,9} + e_{8,14} + e_{13,17} + e_{19,22} + e_{23,26}$$

$$e_{\substack{01110\\0}} = e_{2,6} + e_{5,11} - e_{10,15} - e_{12,16} + e_{19,23} + e_{22,26}$$

$$e_{\substack{00111\\0}} = e_{3,8} - e_{5,12} - e_{7,14} + e_{11,16} + e_{18,21} + e_{24,27}$$

$$e_{\substack{11100\\1}} = -e_{1,5} + e_{6,18} + e_{8,19} + e_{14,22} + e_{15,24} + e_{16,25}$$

$$e_{\substack{11110\\0}} = e_{1,6} - e_{5,18} + e_{10,20} + e_{12,21} + e_{13,23} + e_{17,26}$$

$$e_{\substack{01110\\1}} = -e_{2,7} + e_{4,11} - e_{8,15} + e_{12,17} - e_{19,24} + e_{21,26}$$

$$e_{\substack{00111\\1}} = -e_{3,10} - e_{4,12} - e_{6,14} - e_{11,17} - e_{18,22} + e_{23,27}$$

$$e_{\substack{01111\\0}} = e_{2,8} + e_{5,13} + e_{7,15} + e_{9,16} - e_{18,23} + e_{22,27}$$

$$e_{\substack{11110\\1}} = -e_{1,7} - e_{4,18} + e_{8,20} - e_{12,22} - e_{13,24} + e_{16,26}$$

$$e_{\substack{11111\\0}} = e_{1,8} - e_{5,19} - e_{7,20} - e_{9,21} - e_{11,23} + e_{17,27}$$

$$e_{\substack{01210\\1}} = e_{2,9} + e_{3,11} + e_{8,16} + e_{10,17} + e_{19,25} + e_{20,26}$$

$$e_{\substack{01111\\1}} = -e_{2,10} + e_{4,13} + e_{6,15} - e_{9,17} + e_{18,24} + e_{21,27}$$

$$e_{\substack{11210\\1}} = e_{1,9} - e_{3,18} - e_{8,21} - e_{10,22} + e_{13,25} + e_{15,26}$$

$$e_{\substack{11111\\1}} = -e_{1,10} - e_{4,19} - e_{6,20} + e_{9,22} + e_{11,24} + e_{16,27}$$

$$e_{\substack{01211\\1}} = e_{2,12} + e_{3,13} - e_{6,16} - e_{7,17} - e_{18,25} + e_{20,27}$$

$$e_{\substack{12210\\1}} = -e_{1,11} - e_{2,18} + e_{8,23} + e_{10,24} + e_{12,25} + e_{14,26}$$

$$e_{\substack{11211\\1}} = e_{1,12} - e_{3,19} + e_{6,21} + e_{7,22} - e_{11,25} + e_{15,27}$$

$$e_{\substack{01221\\1}} = -e_{2,14} - e_{3,15} - e_{4,16} - e_{5,17} + e_{18,26} + e_{19,27}$$

$$e_{\substack{12211\\1}} = -e_{1,13} - e_{2,19} - e_{6,23} - e_{7,24} - e_{9,25} + e_{14,27}$$

$$e_{\substack{11221\\1}} = -e_{1,14} + e_{3,20} + e_{4,21} + e_{5,22} + e_{11,26} + e_{13,27}$$

$$e_{\substack{12221\\1}} = e_{1,15} + e_{2,20} - e_{4,23} - e_{5,24} + e_{9,26} + e_{12,27}$$

$$e_{\substack{12321\\1}} = -e_{1,16} - e_{2,21} - e_{3,23} + e_{5,25} + e_{7,26} + e_{10,27}$$

$$e_{\substack{12321\\2}} = e_{1,17} + e_{2,22} + e_{3,24} + e_{4,25} + e_{6,26} + e_{8,27}$$

Таблица 17. Кубическая форма для D_5-нумерации весов

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & x_1x_{18}x_{27} - x_1x_{19}x_{26} + x_1x_{20}x_{25} - x_1x_{21}x_{24} + x_1x_{22}x_{23} \\
& - x_2x_{11}x_{27} + x_2x_{13}x_{26} - x_2x_{15}x_{25} + x_2x_{16}x_{24} - x_2x_{17}x_{23} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{12}x_{26} + x_3x_{14}x_{25} - x_3x_{16}x_{22} + x_3x_{17}x_{21} \\
& - x_4x_7x_{27} + x_4x_{10}x_{26} - x_4x_{14}x_{24} + x_4x_{15}x_{22} - x_4x_{17}x_{20} \\
& + x_5x_6x_{27} - x_5x_8x_{26} + x_5x_{14}x_{23} - x_5x_{15}x_{21} + x_5x_{16}x_{20} \\
& - x_6x_{10}x_{25} + x_6x_{12}x_{24} - x_6x_{13}x_{22} + x_6x_{17}x_{19} + x_7x_8x_{25} \\
& - x_7x_{12}x_{23} + x_7x_{13}x_{21} - x_7x_{16}x_{19} - x_8x_9x_{24} + x_8x_{11}x_{22} \\
& - x_8x_{17}x_{18} + x_9x_{10}x_{23} - x_9x_{13}x_{20} + x_9x_{15}x_{19} - x_{10}x_{11}x_{21} \\
& + x_{10}x_{16}x_{18} + x_{11}x_{12}x_{20} - x_{11}x_{14}x_{19} - x_{12}x_{15}x_{18} + x_{13}x_{14}x_{18}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x_{18}x_{27} - x_{19}x_{26} + x_{20}x_{25} - x_{21}x_{24} + x_{22}x_{23}\\
f_2(x) &= -x_{11}x_{27} + x_{13}x_{26} - x_{15}x_{25} + x_{16}x_{24} - x_{17}x_{23}\\
f_3(x) &= x_9x_{27} - x_{12}x_{26} + x_{14}x_{25} - x_{16}x_{22} + x_{17}x_{21}\\
f_4(x) &= -x_7x_{27} + x_{10}x_{26} - x_{14}x_{24} + x_{15}x_{22} - x_{17}x_{20}\\
f_5(x) &= x_6x_{27} - x_8x_{26} + x_{14}x_{23} - x_{15}x_{21} + x_{16}x_{20}\\
f_6(x) &= x_5x_{27} - x_{10}x_{25} + x_{12}x_{24} - x_{13}x_{22} + x_{17}x_{19}\\
f_7(x) &= -x_4x_{27} + x_8x_{25} - x_{12}x_{23} + x_{13}x_{21} - x_{16}x_{19}\\
f_8(x) &= -x_5x_{26} + x_7x_{25} - x_9x_{24} + x_{11}x_{22} - x_{17}x_{18}\\
f_9(x) &= x_3x_{27} - x_8x_{24} + x_{10}x_{23} - x_{13}x_{20} + x_{15}x_{19}\\
f_{10}(x) &= x_4x_{26} - x_6x_{25} + x_9x_{23} - x_{11}x_{21} + x_{16}x_{18}\\
f_{11}(x) &= -x_2x_{27} + x_8x_{22} - x_{10}x_{21} + x_{12}x_{20} - x_{14}x_{19}\\
f_{12}(x) &= -x_3x_{26} + x_6x_{24} - x_7x_{23} + x_{11}x_{20} - x_{15}x_{18}\\
f_{13}(x) &= x_2x_{26} - x_6x_{22} + x_7x_{21} - x_9x_{20} + x_{14}x_{18}\\
f_{14}(x) &= x_3x_{25} - x_4x_{24} + x_5x_{23} - x_{11}x_{19} + x_{13}x_{18}\\
f_{15}(x) &= -x_2x_{25} + x_4x_{22} - x_5x_{21} + x_9x_{19} - x_{12}x_{18}\\
f_{16}(x) &= x_2x_{24} - x_3x_{22} + x_5x_{20} - x_7x_{19} + x_{10}x_{18}\\
f_{17}(x) &= -x_2x_{23} + x_3x_{21} - x_4x_{20} + x_6x_{19} - x_8x_{18}\\
f_{18}(x) &= x_1x_{27} - x_8x_{17} + x_{10}x_{16} - x_{12}x_{15} + x_{13}x_{14}\\
f_{19}(x) &= -x_1x_{26} + x_6x_{17} - x_7x_{16} + x_9x_{15} - x_{11}x_{14}\\
f_{20}(x) &= x_1x_{25} - x_4x_{17} + x_5x_{16} - x_9x_{13} + x_{11}x_{12}\\
f_{21}(x) &= -x_1x_{24} + x_3x_{17} - x_5x_{15} + x_7x_{13} - x_{10}x_{11}\\
f_{22}(x) &= x_1x_{23} - x_3x_{16} + x_4x_{15} - x_6x_{13} + x_8x_{11}\\
f_{23}(x) &= x_1x_{22} - x_2x_{17} + x_5x_{14} - x_7x_{12} + x_9x_{10}\\
f_{24}(x) &= -x_1x_{21} + x_2x_{16} - x_4x_{14} + x_6x_{12} - x_8x_9\\
f_{25}(x) &= x_1x_{20} - x_2x_{15} + x_3x_{14} - x_6x_{10} + x_7x_8\\
f_{26}(x) &= -x_1x_{19} + x_2x_{13} - x_3x_{12} + x_4x_{10} - x_5x_8\\
f_{27}(x) &= x_1x_{18} - x_2x_{11} + x_3x_9 - x_4x_7 + x_5x_6
\end{aligned}
$$

Литература

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами.* — Алгебра и анализ **5**, No. 2 (1993), 74–90.
2. А. Борель, *Свойства и линейные представления Шевалле.* Семинар по алгебраическим группам. М. (1973), 9–59.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV – VI, М. (1972).
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* VII, VIII, М. (1978).
5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. Об-ва, **1** (1990), 64–109.
6. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и Анализ **19** (2007).
7. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
8. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из книги.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
9. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* F_4 *и* ${}^2\mathrm{E}_6$. — Алгебра и Анализ (to appear).
10. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР, **40**, No. 1 (1990), 145–147.
11. Н. А. Вавилов, В. Г. Халин, `Mathematica 5.*` *для нематематика.* Вып. 1. Первое знакомство. ОЦЭиМ СПб (2005), 1–180.
12. Н. А. Вавилов, В. Г. Халин `Mathematica 5.*` *для нематематика.* Вып. 2. Основы синтаксиса. ОЦЭиМ, СПб (2005), 1–136.
13. В. Г. Казакевич, А. К. Ставрова, *Подгруппы, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **319** (2004), 199–215.
14. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — Успехи мат. наук **41**, No. 1 (1986), 57–96.
15. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
16. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* Наука, М. (1972).
17. Е. Б. Плоткин, *Сюръективная стабилизация* K_1*-функтора для некоторых исключительных групп Шевалле.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **198** (1991), 65–88.
18. М. Рид, *Алгебраическая геометрия для всех.* Мир, М. (1989), 1–147.
19. Н. С. Семенов, *Один аргумент в пользу гурвицевости* $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, q)$. — Зап. научн. сем. ПОМИ **305** (2003), 228–237.
20. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* Итоги науки и техн. Сер. совр. пробл. мат. Фундам. направл. ВИНИТИ **55** (1989), 5–136.
21. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М. (1975).
22. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, М. (1980).
23. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, М. (2003).

24. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Мир, М. (1981).
25. E. Abe, *Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **21**, No. 3 (1969), 474–494.
26. E. Abe, *Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings.* — Commun. Algebra **11**, No. 12 (1983), 1271–1307.
27. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Radical Theory, Sendai (1988), 1–23.
28. E. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
29. E. Abe, J. Hurley, *Centers of Chevalley groups over commutative rings.* — Comm. Algebra **16**, No. 1 (1988) 57–74.
30. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 185–198.
31. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. I – IV. – Invent. Math. **89**, No. 1 (1987), 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84; J. Algebra **131** No. 1 (1990), 23–39.
32. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. dedic. **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
33. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms.* Finite Geometries, Buildings and Related topics Oxford Univ. Press (1990), 75–84.
34. H. Azad, *Structure constants of algebraic groups.* — J. Algebra **75**, No. 1 (1982), 209–222.
35. H. Azad, *The Jacobi identity.* — Punjab Univ. J. Math. **16** (1983), 9–29.
36. H. Azad, M. Barry, G. M. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups.* — Comm. Algebra **18**, No. 2 (1990), 551–562.
37. J. C. Baez, *The octonions.* — Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205.
38. J. Baez, *Review of J. H. Conway, D. A. Smith, On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic and symmetry.* — Bull. Amer. Math. Soc. **42**, No. 2 (2005), 229–243.
39. R. Bix, *Octonion planes over local rings.* — Trans. Amer. Math. Soc. **261**, No. 1 (1980), 417–438.
40. R. Bix, *Isomorphism theorems for octonion planes over local rings.* — Trans. Amer. Math. Soc. **266**, No. 2 (1981), 423–439.
41. A. Borel, *Le plan projectif des octaves et les sphéres commes espaces homogénes.* — C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 1378–1380.
42. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance regular graphs.* Springer–Verlag, N.Y. et al. (1989).
43. R. B. Brown, *A minimal representation for the Lie algebra* E_7. — Ill. J. Math. **12**, No. 1 (1968), 190–200.
44. R. B. Brown, *Groups of type* E_7. — J. reine angew. Math. **236** (1969), 79–102.
45. N. Burgoyne, C. Williamson, *Some computations involving simple Lie algebras.* Proc. 2nd Symp. Symbolic and algebraic manipulation. N.Y. Ass. Comp. Mach. (1971).
46. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Wiley, London et al. (1972).
47. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters.* London et al., Wiley (1985).

48. C. Chevalley, *Sur le groupe exceptionnel* (E_6). — C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), 1991–1993.
49. C. Chevalley, R. D. Schafer, *The exceptional simple Lie algebras* F_4 *and* E_6. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 137–141.
50. A. M. Cohen, *Point-like spaces related to Buildings.* Handbook of Incidence Geometry (1995), 647–737.
51. A. M. Cohen, B. N. Cooperstein, *A characterization of some geometries of exceptional Lie type.* — Geom. dedic. **15**, No. 1 (1983), 73–105.
52. A. M. Cohen, B. N. Cooperstein, *The 2-spaces of the standard* $\mathrm{E}_6(q)$*-module.* — Geom. dedic. **25**, No. 1–3 (1988), 467–480.
53. A. M. Cohen, R. H. Cushman, *Gröbner bases and standard monomial theory.* Computational algebraic geometry, Progress in Mathematics 109, Birkhäuser (1993), 41–60.
54. A. M. Cohen, R. L. Griess, B. Lisser, *The group* $L(2,61)$ *embeds in the Lie group of type* E_8. — Comm. Algebra **21**, No. 6 (1993), 1889–1907.
55. A. M. Cohen, M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz, *The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic.* — Proc. London Math. Soc. **64**, No. 1 (1992), 21–48.
56. A. M. Cohen, S. H. Murray, *Algorithm for Lang's theorem.* arXiv: math.GR/0506068v1, 03.06.2005, 1–29.
57. A. M. Cohen, S. H. Murray, D. E. Taylor, *Computing in groups of Lie type.* — Math. Comput. **73** (2004), 1477–1498.
58. A. M. Cohen, D. B. Wales, *Embeddings of the group* $L(2,13)$ *in groups of Lie type* E_6. — Israel J. Math. **82**, No. 1–3 (1993), 45–86.
59. A. M. Cohen, D. B. Wales, *Finite subgroups of* $\mathrm{F}_4(\mathbb{C})$ *and* $\mathrm{E}_6(\mathbb{C})$. — Proc. London Math. Soc. **94** (1997), 105–150.
60. B. N. Cooperstein, *Subgroups of the group* $\mathrm{E}_6(q)$ *which are generated by root subgroups.* — J. Algebra **46**, No. 2 (1977), 355–388.
61. B. N. Cooperstein, *The geometry of root subgroups in exceptional groups.* I, II. Geom. dedic. **8** (1979), 317–381; **15** (1983), 1–45.
62. B. N. Cooperstein, *Subgroups of exceptional groups of Lie type generated by long root subgroups.* I, II. — J. Algebra **70**, No. 1 (1981), 270–282; 283–298.
63. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7. I. *A four form for* E_7. — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), 361–389.
64. E. Corrigan, T. J. Hollowood, *The exceptional Jordan algebra and the superstring.* — Comm. Math. Physics **122** (1989), 393–410.
65. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* G_2 *groups.* — Trans Amer. Math. Soc., **351**, No. 12 (1999), 5051–5088.
66. A. Elduque, A. V. Iltyakov, *On polynomial invariants of exceptional simple algebraic groups.* — Canad. J. Math. **51**, No. 3 (1999), 506–522.
67. D. I. Deriziotis, A. P. Fakiolas, *The maximal tori in finite Chevalley groups of types* E_6*,* E_7 *and* E_8, Comm. Algebra **19**, No. 3 (1991), 889–903.
68. J. R. Faulkner, *Orbits of the automorphism group of the exceptional Jordan algebra.* — Trans. Amer. Math. Soc. **151**, No. 2 (1970), 433–441.
69. J. R. Faulkner, *Octonion planes defined by quadratic Jordan algebras.* — Mem. Amer. Math. Soc., No. 104 (1970), 1–71.

70. J. R. Faulkner, J. C. Ferrar, *Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures.* — Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1977), 1–35.
71. J. C. Ferrar, *Lie algebras of type* E_6. I, II. — J. Algebra **13**, No. 1 (1969), 57–72; **52**, No. 1 (1978), 201–209.
72. P. Fleischmann, I. Janiszczak, *The semisimple conjugacy classes of finite groups of Lie type* E_6 *and* E_7. — Comm. Algebra **21**, No. 1 (1993), 93–161.
73. P. Fleischmann, I. Janiszczak, *The semisimple conjugacy classes and the generic class number of the finite simple groups of Lie type* E_8. — Comm. Algebra. **22**, No. 6 (1994), 2221–2303.
74. P. Fleischmann, I. Janiszczak, *On the computation of conjugacy classes of Chevalley groups.* — Appl. Algebra Comm. Comput. **7**, No. 3 (1996), 221–234.
75. I. B. Frenkel, V. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models.* — Invent. Math. **62**, No. 2 (1980), 23–66.
76. I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster.* Academic Press, N.Y. et al. (1988).
77. H. Freudenthal, *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie.* — Notes (1951); Geom. Dedic. **19** (1985), 7–63.
78. H. Freudenthal, *Zur ebenen Oktavengeometrie.* — Indag. Math. **15** (1953), 195–200.
79. H. Freudenthal, *Sur le groupe exceptionnel* E_7. — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser.A, **56** (1953), 81–89.
80. H. Freudenthal, *Sur les invariantes caractéristiques des groupes semi-simples.* — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser.A **56** (1953), 81–89.
81. H. Freudenthal, *Beziehungen der* E_7 *und* E_8 *zur Oktavenebene.* I–XI. — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser.A **57** (1954), 218–230, 363–368; **58** (1955), 151–157, 277–285; **62** (1959), 165–201, 447–474; **66** (1963), 457–487.
82. H. Freudenthal, *Lie groups in the foundations of geometry.* — Adv. Math. **1** (1961), 145–190.
83. R. S. Garibaldi, *Structurable algebras and groups of type* E_6 *and* E_7. — J. Algebra **236**, No. 2 (2001), 651–691.
84. R. S. Garibaldi, *Cohomological invariants: exceptional groups and Spin groups, with an appendix by D. W. Hoffmann.* — Preprint Emory Univ. Atlanta (2006), 1–75.
85. R. S. Garibaldi, H. P. Peterson, *Groups of outer type* E_6 *with trivial Tits algebras.* arXiv:math.GR/0511229v1 (09.10.2005), 1–29.
86. P. Gilkey, G. M. Seitz, *Some representations of exceptional Lie algebras.* — Geom. dedic. **25**, No.1–3 (1988), 407–416.
87. R. L. Griess, *A Moufang loop, the exceptional Jordan algebra, and a cubic form in 27 variables.* — J. Algebra **131**, No. 1 (1990), 281–293.
88. M. Günaydin, *Generalized conformal and superconformal group actions and Jordan algebras.* — Mod. Phys. Lett. A **8** (1993), 1407–1416.
89. M. Günaydin, K. Koepsell, H. Nicolai, *Conformal and quasiconformal realizations of exceptional Lie groups.* — Comm. Math. Physics **221** (2001), 57–76.
90. R. M. Guralnik, M. W. Liebeck, D. Macpherson, and G. M. Seitz, *Modules for algebraic groups with finitely many orbits on subspaces.* — J. Algebra **196**, No. 1 (1997), 211–250.

91. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Comm. Algebra **24**, No. 1 (1996), 109–133.
92. S. J. Haris, *Some irreducible representations of exceptional algebraic groups.* — Amer. J. Math. **93**, No. 1 (1971), 75–106.
93. R. Hazrat and N. A. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
94. J.-Y. Hée, *Groupes de Chevalley et groupes classiques.* — Publ. Math. Univ. Paris VII **17** (1984), 1–54.
95. H. Hiller, *Geometry of Coxeter groups.* Boston and London, Pitman (1982).
96. R. Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond.* — Israel Math. Conf. Proc. **8** (1995), 1–182.
97. R. B. Howlett, L. J. Rylands, and D. E. Taylor, *Matrix generators for exceptional groups of Lie type.* — J. Symb. Comput. **11** (2000), 1–17.
98. A. Iliev, L. Manivel, *On the Chow ring of the Cayley plane.* — Compositio Math. **141** (2005), 146–160.
99. A. V. Iltyakov, *On rational invariants of the group* E_6. — Proc. Amer. Math. Soc. **124**, No. 12 (1996), 3637–3640.
100. N. Jacobson, *Some groups of transformations defined by Jordan algebras.* II. *Groups of type* F_4. — J. reine angew. Math. **204** (1960), 74–98.
101. N. Jacobson, *Some groups of transformations defined by Jordan algebras.* III. *Groups of type* $\mathrm{E}_{6\,\mathrm{I}}$. — J. reine angew. Math. **207** (1961), 61–85.
102. N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Colloquium Public., Providence, R.I. (1968).
103. N. Jacobson, *Exceptional Lie algebras.* Marcel Dekker, N.Y. (1971).
104. V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras.* 2nd ed. Cambridge Univ. Press (1985).
105. P. B. Kleidman and R. A. Wilson, *The maximal subgroups of* $\mathrm{E}_6(2)$ *and* $\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_6(2))$. — Proc. London Math. Soc. **60**, No. 2 (1990), 266–294.
106. P. B. Kleidman and R. A. Wilson, $J_3 < \mathrm{E}_6(4)$ *and* $M_{12} < \mathrm{E}_6(5)$. — J. London Math. Soc. **42**, No. 3 (1990), 555–561.
107. P. B. Kleidman and R. A. Wilson, *Sporadic simple subgroups of finite exceptional groups of Lie type.* — J. Algebra **157**, No. 2 (1993), 316–330.
108. M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of Involutions.* AMS Coll. Publ. (1998),
109. J. M. Landsberg and L. Manivel, *The projective geometry of Freudenthal's magic square.* — J. Algebra **239**, No. 2 (2001), 477–512.
110. R. Lawther, *Jordan block sizes of unipotent elements in exceptional algebraic groups.* — Comm. Algebra **23**, No. 11 (1995), 4125–4156.
111. R. Lawther and D. M. Testerman, A_1 *subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math Soc. **674** (1999), 1–131.
112. W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector.* — Proc. Amer. Math. Soc. **84**, No. 4 (1982), 605–608.
113. M. W. Liebeck, *Subgroups of exceptional groups. Algebraic groups and their representations.* (Cambridge – 1997). Kluwer Acad. Publ, Dordrecht (1998), 275–290.
114. M. W. Liebeck, J. Saxl, and G. M. Seitz, *Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type.* — Proc. London Math. Soc. **65**, No. 2 (1992), 297–325.

115. M. W. Liebeck and G. M. Seitz, *Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic.* — Geom. dedic. **36** (1990), 353–387.
116. M. W. Liebeck and G. M. Seitz, *Reductive subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **580** (1996), 1–111.
117. M. W. Liebeck and G. M. Seitz, On the subgroup structure of exceptional groups of Lie type. — Trans. Amer. Math. Soc. **350**, No. 9 (1998), 3409–3482.
118. M. W. Liebeck and G. M. Seitz, On finite subgroups of exceptional algebraic groups. — J. reine angew. Math. **515** (1999), 25–72.
119. M. W. Liebeck and G. M. Seitz, *The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups.* — Preprint Univ. Oregon (2005), 1–230.
120. G. Lusztig, *Introduction to quantum groups.* Boston et al., Birkhäuser (1993).
121. R. E. Maeder, *Programming in* **Mathematica**, 3rd ed. Addison-Wesley (1996).
122. J. G. M. Mars, *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels.* — Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 97–140.
123. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér. No. 2 (1969), 1–62.
124. K. Mizuno, *The conjugate classes of Chevalley groups of type* E_6. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **24**, No. 3 (1977), 525–563.
125. K. Mizuno, *The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups* E_7 *and* E_8. — Tokyo J. Math. **3**, No. 2 (1980), 391–458.
126. Ch. Parker and G. E. Röhrle, *Minuscule Representations.* — Preprint Universität Bielefeld, No. 72 (1993), 1–12.
127. V. Petrov, N. Semenov, and K. Zainoulline, *Zero cycles on a twisted Cayley plane.* arXiv:math. AG/0508200v2 22.09.2005, 1–15.
128. E. B. Plotkin, *Stability theorems for K-functors for Chevalley groups.* — Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima — 1990) London et al.: World Sci. (1991), 203–217.
129. E. B. Plotkin, *On the stability of* K_1*-functor for Chevalley groups of type* E_7. — J. Algebra **210** (1998), 67–85.
130. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, and N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra and Computations **8**, No. 1 (1998), 61–97.
131. R. Richardson, G. E. Röhrle, and R. Steinberg, *Parabolic subgroups with abelian unipotent radical.* — Invent. Math. **110**, No. 3 (1992), 649–671.
132. G. E. Röhrle, *On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups.* — J. Algebra **157**, No. 1 (1993), 80–115.
133. G. E. Röhrle, *On extraspecial parabolic subgroups.* — Contemp. Math. **153** (1993), 143–155.
134. L. J. Rylands and D. E. Taylor, *Construction for octonion and exceptional Jordan algebras.* — Preprint Univ. Sydney (2000), 1–11.
135. R. Scharlau, *Buildings*, Handbook of Incidence Geometries, Amsterdam, North Holland (1995), 477–645.
136. G. M. Seitz, *Maximal subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **441** (1989), 1–197.
137. G. M. Seitz, *Maximal subgroups of finite exceptional groups.* Groups and geometries (Siena–1996). Basel et al., Birkhäuser (1998), 155–161.
138. S. Splitthoff, *Finite presentability of Steinberg groups and related Chevalley groups.* — Contemp. Math. **55**, Part. II (1986), 635–687.

139. T. A. Springer, *The projective octave plane.* I, II. — Indag. Math. **22** (1962), 74–101.
140. T. A. Springer, *Characterisation of a class of cubic forms.* — Indag. Math. **24** (1962), 259–265.
141. T. A. Springer, *On the geometric algebra of the projective octave plane.* — Indag. Math. **24** (1962), 451–468.
142. T. A. Springer, *Linear algebraic groups.* 2nd ed. Birkhäuser, Boston et al. (1981).
143. T. A. Springer and F. D. Veldkamp, *On Hjelmslev–Moufang planes.* — Math. Z. **107** (1968). 249–263.
144. T. A. Springer and F. D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups.* Springer, Berlin et al. (2000).
145. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, No. 4 (1971), 965–1004.
146. M. R. Stein, *Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan J. Math. **4**, No. 1 (1978), 77–108.
147. A. V. Stepanov and N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: a Theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
148. K. Suzuki, *Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings.* — J. Algebra **175**, No. 3 (1995), 526–536.
149. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55**, Part II (1986), 693–710.
150. D. M. Testerman, *Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **390** (1988), 1–190.
151. D. M. Testerman, *A construction of certain maximal subgroups of the algebraic groups* E_6 *and* F_4. — Comm. Algebra **17**, No. 4 (1989), 1003–1016.
152. F. G. Timmesfeld, *Moufang planes and the groups* E_6^K *and* $\mathrm{SL}_2(K)$, *K a Cayley division algebra.* — Forum Math. **6**, No. 2 (1994), 209–231.
153. J. Tits, *Le plan projective des octaves et les groupes de Lie exceptionnels.* — Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **39** (1953), 309–329.
154. J. Tits, *Le plan projective des octaves et les groupes exceptionnels* E_6 *et* E_7. — Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **40** (1954), 29–40.
155. J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples.* — Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci., No. 31 (1966), 21–58.
156. J. Tits, *Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles.* I. *Construction.* — Indag. Math., No. 28 (1966), 223–237.
157. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **36**, No. 5 (1986), 219–230.
158. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima–1990). World Sci. Publ. London et al. (1991), 219–335.
159. N. A. Vavilov, *Weight elements of Chevalley groups.* — Preprint Univ. Warwick, No. 35 (1994), 1–46.
160. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press. (1995), 233–280.
161. N. A. Vavilov, *Unipotent elements in subgroups which contain a split maximal torus.* — J. Algebra **176**, No. 2 (1995), 356–367.

162. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova, **204** (2000), 1–45.
163. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type E_l.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
164. N. A. Vavilov and E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.
165. F. D. Veldkamp, *Unitary groups in projective octave planes.* — Compositio Math. **19** (1968), 213–258.
166. F. D. Veldkamp, *Collineation groups in Hjelmslev–Moufang planes.* — Math. Z. **108**, No. 1 (1968), 37–52.
167. F. D. Veldkamp, *Unitary groups in Hjelmslev–Moufang planes.* — Math. Z. **108**, No. 2 (1969), 288–312.
168. S. Wagon, `Mathematica` *in Action.* Springer-Verlag (1999).
169. N. J. Wildberger, *A combinatorial construction for simply-laced Lie algebras.* — Preprint Univ. New South Wales (2001), 1–11.
170. S. Wolfram, *The* `Mathematica` *book.* 5th ed., Wolfram Media (2003), 1–1464.

Vavilov N. A., Luzgarev A. Yu., Pevzner I. M. Chevalley group of type E_6 in the 27-dimensional representation.

The present paper is devoted to a detailed computer study of the action of Chevalley group $G(\mathrm{E}_6, R)$ on the minimal module $V(\varpi_1)$. Our main objectives are an explicit choice and tabulation of the signs of structure constants for this action, compatible with the choice of positive Chevalley base, construction of multilinear invariants and equations on the matrix entries of matrices from $G(\mathrm{E}_6, R)$ in this representation, and explicit tabulation of root elements.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 9 ноября 2006 г.