## Рефераты

УДК 517.54

К столетию со дня рождения Геннадия Михайловича Голузина. Кузьмина Г. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 5–12.

Статья представляет собой краткое эссе, посвященное жизни и научной деятельности Г. М. Голузина. Библ. – 8 назв.

УДК 511.3

О моментах элементов непрерывных дробей для некоторых рациональных чисел. Голубева Е. П. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 13–22.

Пусть $p$ – простое и $1 \leqslant a \leqslant p-1$. В работе получена асимптотическая формула для суммы по $a$ моментов порядка $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ последовательности элементов разложения $a/p$ в непрерывную дробь.

В качестве следствия получена оценка сверху для количества тех $a$, у которых в разложении хотя бы один из элементов больше, чем $\log^{\lambda} p \, (\lambda > 1)$.

Отметим, что в данном случае множество элементов не имеем предельного распределения при $p \to \infty$, в отличие от случая рациональных дробей $b/c$, $(b,c)=1$, когда $b^2+c^2 \leqslant R^2$ $(R \to \infty)$. Библ. – 5 назв.

УДК 517.54

О множестве значений системы $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ в классе типично вещественных функций. III. Голузина Е. Г. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 23–34.

Пусть $T$ – класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. Исследуется множество значений $D_{m,n}(T)$ системы

$$\{f(z_1), \dots, f(z_m), f(r_1), \dots, f(r_n)\}$$

на классе $T$, где $\{z_j\}_1^m$ – заданные различные точки круга $U$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\{r_j\}_1^m$ – заданные числа, $0 < r_j < 1$,

$j = 1, 2, \ldots, n$ ($n > 1$, $m \geqslant 1$). Дана алгебраическая характеристика множества $D_{m,n}(T)$ с помощью неотрицательных эрмитовых форм и найдены все граничные функции. В случае $\operatorname{Im} z_j = 0$, $j = 2, 3, 4$, найдено множество значений $f(z_1)$ при фиксированных значениях $f(z_j)$, $j = 2, 3, 4$. Библ. – 12 назв.

УДК 517.54

О канонических отображениях на круговые области с радиальными разрезами. Шлык В. А. Гуляев А. С. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 35–50.

Рассматриваются новые определения нормальных (по Грётшу) кольцевых и круговых областей с радиальными разрезами. Устанавливаются их геометрические и функциональные свойства. Рассуждения, основанные на методе экстремальных метрик по Фюгледе, дают возможность распространить их на $n$-мерный случай, $n \geq 2$.

Указанные свойства позволяют упростить доказательства известных результатов Штребеля и Рейха по данной тематике и придать им завершённый вид. Библ.–12 назв.

УДК 517.5

О приближении периодических функций сингулярными интегралами с положительными ядрами. Додонов Н. Ю., Жук В. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 51–72.

Для двумерного случая получены новые аппроксимативные характеристики для функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности для пространств $L_p$ периодических функций. Рассмотрен вопрос о приближении функций аналогом интеграла Фейера в пространстве периодических функций, суммируемых с квадратом на периоде. Библ. – 5 назв.

УДК 517.54

Емкости конденсаторов, обобщения лемм Грётша и симметризация. Дубинин В. Н. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 73–100.

Рассматриваются принципы симметрии и композиции для конформной емкости обобщенных конденсаторов. Обсуждается связь этои принципов с классическими леммами Грётша и некоторыми видами симметризации. Даны приложения к оценкам логарифмической и гиперболической емкостей компактов, а также к задачам об экстремальном разбиении. Библ. – 27 назв.

УДК 517.54

О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули. Дубинин В. Н. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 101–112.

В заметке показывается, что прямое применение леммы Шварца и ее обобщений к специально построенным произведениям Бляшке приводит к новым неравенствам для некоторых классов целых функций. В частности, для целых функций экспоненциального типа с нулями в замкнутой нижней полуплоскости установлены теоремы искажения, включая двуточечную теорему искажения на вещественной оси. Аналогичные теоремы получены для полиномов с нулями в замкнутом единичном круге. Уточняются классические теоремы Турана и Энкени-Ривлина. Кроме того, доказана теорема о взаимном расположении нулей и критических точек полинома. Библ. – 16 назв.

УДК 517.54

О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами. Емельянов Е. Г. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 113–133.

В работе рассматривается случай задачи об экстремальном разбиении многосвязной области $G \subset \mathbb{C}$, когда ассоциированный квадратичный дифференциал оказывается полным квадратом. Показано, что в этом случае значение функционала в данной экстремальной задаче является наименьшим в некотором классе разбиений. Библ. – 10 назв.

УДК 517.5

О приближении периодических функций линейными методами аппроксимации. Жук А. С., Жук В. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 134–164.

В работе получено обобщение известной теоремы Харди–Юнга, установлена формула, связывающая интеграл от $2\pi$-периодической функии по периоду с интегралом, вычисляемым по всей оси, даны новые аппроксимативные характеристики для функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности различных порядков для пространств $L_p$ периодических функций. Рассмотрен ряд вопросов, связанных с приближением в равномерной метрике непрерывных, периодических и четных по каждой переменной функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Библ. – 17 назв. Библ. – назв.

УДК 511

Суммы квадратов над $\circ$-кольцом Фибоначчи. Журавлев В. Г. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 165–190.

Рассмотрены диофантовы уравнения

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + \cdots + X_k^2 + [(X_k+1)\tau]^2 = A,$$

где $X_i, A \in \mathbb{Z}$ $(A \geq 0)$ — целые рациональные числа, $k = 2, 3, 4$, $\tau = (-1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение и $[*]$ обозначает целую часть числа. Для них найдены условия разрешимости и получены оценки снизу для числа решений. Указанные уравнения тесно связаны с уравнениями вида

$$X_1 \circ X_1 + \cdots + X_k \circ X_k = A,$$

где операция $\circ$ — круговое умножение Кнута. Библ. — 17 назв.

УДК 517.54

Об одном экстремально-метрическом подходе к задачам об экстремальном разбиении. Кузьмина Г. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 191–211.

В работе излагается простой экстремально-метрический подход к задачам об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов. Этот подход основывается на конструировании допустимой метрики проблемы модуля, равносильной рассматриваемой задаче об экстремальном разбиении, при помощи общих свойств траекторий ассоциированных квадратичных дифференциалов в более простых задачах об экстремальном разбиении. Библ. – 8 назв.

УДК 517.3

О рядах Дирихле, ассоциированных с кубической тета-функцией. Проскурин Н. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 212–232.

В работе исследована функция $L(\tau;\cdot)$ определенная рядом Дирихле

$$L(\tau;s)=\sum_{\nu}\frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s},\qquad s\in\mathbb{C},$$

где $\tau(\nu)$ – $\nu$-ый коэффициент Фурье кубической тета-функции Куботы–Паттерсона. Для этой функции выведены функциональное уравнение и укороченное функциональное уравнение. Установлено, что она не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}s\geqslant 1.3533$ и не имеет особенностей помимо простого полюса в точке $5/6$.

Рассмотрены вопросы, связанные с вычислением коэффициентов $\tau(\nu)$ и вычислением значений специальных функций, возникающих в укороченном функциональном уравнении. Библ. – 11 назв.

УДК 511.44

Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси. Сильванович О. В., Широков Н. А. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 233–237.

Пусть $E\subset\mathbb{R}^+$ – множество, состоящее из конечного числа отрезков и луча $[a,\infty)$, $H^r_\omega(E)$ – множество функций, заданных на $E$, для которых

$$|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(y)|\leqslant c_f\,\omega(|x-y|),$$

где модуль непрерывности $\omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^y\frac{\omega(x)}{x}dx+y\int\limits_y^\infty\frac{\omega(x)}{x^2}dx\leqslant C_0\omega(y),\qquad y>0.$$

Обозначим через $C_\sigma^{(r,\omega)}$, $\sigma > 0$, класс целых функций $F$ порядка 1/2 и типа $\sigma$, для которых

$$\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \frac{|F(z)|e^{-\sigma|\operatorname{Im}\sqrt{z}|}}{1+|z|^r\omega(|z|)+\sigma^{-2r}\omega(\sigma^{-2})} < \infty.$$

В данной работе для заданной функции $f \in H_\omega^r(E)$ строятся функции $F$ из класса $C_\sigma^{(r,\omega)}$, приближения которыми на множестве $E$ являются аналогами приближений с помощью полиномов функций, определенных на компактах. Эта аналогия состоит в построении шкалы, в которой измеряются приближения, и в конструктивном описании класса $H_\omega^r(E)$ в терминах скорости приближения, подобном описанию для полиномиальных приближений. Библ. – 4 назв.

УДК 517.54

Аналитическая функция неподвижной точки и ее свойства. Солынин А. Ю. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 238–252.

В работе обсуждаются свойства аналитической функции неподвижной точки, введенной в недавних статьях Д. Мехиа и Х. Поммеренке. В частности, доказаны экстремальные свойства таких функций, связанных с отображениями единичного круга на симметричные римановы поверхности. Библ. – 17 назв.

УДК 511.466+517.863

О распределении значений $L(1,\chi_{8p})$. Фоменко О. М. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 253–273.

Вычисляются моменты чисто мнимого порядка и моменты целого порядка величины $L(1,\chi_{8p})$, где $\chi_{8p}(n) = (8p/n)$ и $p$ пробегает простые числа $> 2$.

Вывод равномерных вариантов теорем о моментах требует привлечения расширенной гипотезы Римана для $L$-рядов Дирихле. В качестве следствий, изучено предельное распределение величины $\log L(1,\chi_{8p})$ и получены количественные аналоги $\Omega$-результатов для $L(1,\chi_{8p})$. Ранее $\Omega$-результаты для $L(1,\chi_p)$ доказали П. Т. Бейтмен, С. Човла и П. Эрдеш (1949–1950) и

М. Б. Барбан (1966), причем их методы легко переносятся на $L(1,\chi_{8p})$ Библ. – 27 назв.

УДК 511.466+517.863

Поведение средних Рисса коэффициентов $L$-функции симметрического квадрата. Фоменко О. М. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 21. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 337), СПб., 2006, с. 274–286.

Пусть $f(z)$ – голоморфная параболическая собственная форма Гекке веса $k$ относительно $SL(2,\mathbb{Z})$, $L(s,\mathrm{sym}^2 f)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, $\operatorname{Re} s > 1$, – $L$-функция симметрического квадрата, ассоциированная с $f$.

Представим среднее Рисса ($\rho \geqslant 0$)

$$\Gamma(\rho+1)^{-1}{\sum_{n\leqslant x}}'(x-n)^{\rho}c_n =: D_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)$$

в виде суммы "вычетной функции' $\Gamma(\rho+1)^{-1}L(0,\mathrm{sym}^2 f)x^{\rho}$ и "остаточного члена" $\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)$. Используя выведенный ранее (Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 247–256) аналог для $\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)$ формулы Вороного, автор оценивает интеграл

$$\int\limits_1^X \Delta_\rho^2(x;\mathrm{sym}^2 f)\,dx,$$

получая при $0<\rho\leqslant 1$ асимптотику, а при $\rho=0$ оценку сверху. Доказано также наличие при $0<\rho\leqslant 1$ предельного распределения у величины

$$x^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}}\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)$$

и, как следствие, у величины

$$x^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}}D_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f), \quad 0<\rho<1.$$

Библ. – 12 назв.