Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

О. М. Фоменко

ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНИХ РИССА КОЭФФИЦИЕНТОВ L-ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКОГО КВАДРАТА

**Посвящается 100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина**

§1. Введение

Рассмотрим пространство $S_k(\Gamma)$ голоморфных параболических форм $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(n)e^{2\pi inz}$, $z \in H := \{z = x+iy : y > 0\}$, четного веса $k \geqslant 12$ для $\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$; $S_k(\Gamma)^+$ – множество собственных форм Гекке из этого пространства с $a_f(1) = 1$. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{k-1}{2}};$$

для простого p имеем (Гекке, Делинь)

$$\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}, \qquad \alpha_f(p)\overline{\alpha_f(p)} = 1. \tag{1}$$

Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим L-функцию Гекке ($\operatorname{Re} s > 1$)

$$L(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n)n^{-s} = \prod_p \left(1 - \alpha_f(p)p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \overline{\alpha_f(p)}\,p^{-s}\right)^{-1}.$$

$L(s,f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа.

Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим симметрический квадрат $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ L-функции Гекке $L(s,f)$: при $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(s,\operatorname{sym}^2 f) := \prod_p \left(1 - \alpha_f^2(p)p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \overline{\alpha_f^2(p)}\,p^{-s}\right)^{-1}.$$

Имеем

$$L(s,\operatorname{sym}^2 f) = \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2)n^{-s} =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Функцию $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ ввел Шимура, он же изучил ее свойства (см. [1]). Используя эти свойства и теорему Ландау, выводим неравенство

$$\sum_{n \leqslant x} c_n \ll x^{\frac{1}{2}} \log^2 x.$$

В работе автора [2] была выдвинута гипотеза:

$$\sum_{n \leqslant x} c_n \ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}; \tag{2}$$

здесь и ниже ε – сколь угодно малое положительное фиксированное число. Используя (1), легко доказать, что

$$|c_n| \leqslant d_3(n) \ll n^{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $d_l(n)$ – классическая функция делителей при целом $l \geqslant 2$.

Определим средние Рисса коэффициентов функции $L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ соотношением

$$D_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f) := \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} {\sum_{n \leqslant x}}' (x-n)^\rho c_n,$$

где $\rho \geqslant 0$ – фиксированное число и $\sum'$ означает, что если $\rho = 0$ и x – целое число, то в сумме вместо c_x берется $\frac{1}{2} c_x$. В соответствии с [3], разложим среднее Рисса на "вычетную функцию" и "остаточный член":

$$D_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f) = \frac{L(0, \mathrm{sym}^2 f)}{\Gamma(\rho+1)} x^\rho + \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f).$$

Ниже мы изучим некоторые свойства функции $\Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f)$ при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. В §2 приводится аналог для $\Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f)$ (усеченной) формулы Вороного, который обобщает теорему 1 [2], а затем с помощью этого аналога оценивается интеграл

$$\int_1^X \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f)^2 \, dx$$

при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. В случае $0 < \rho \leqslant 1$ полученное соотношение является асимптотикой. При $\rho = 0$ вместо асимптотики получается оценка сверху

$$\int_1^X \Delta_0(x;\mathrm{sym}^2 f)^2\,dx \ll X^{\frac{5}{3}+\varepsilon},$$

из которой следует, что в среднем гипотеза (2) выполняется.

В §3 мы, используя аналог формулы Вороного и подходы Хис-Брауна [4], доказываем наличие при $0 < \rho \leqslant 1$ предельного распределения у величины

$$x^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}}\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f).$$

Это предельное распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега с плотностью $p(x)$, которая продолжается как целая функция на всю комплексную плоскость и достаточно быстро убывает на вещественной прямой при $|x| \to \infty$.

В качестве следствия, получаем тот же предельный закон для величины

$$x^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}}D_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f), \qquad 0 < \rho < 1.$$

Доказательство аналогичных результатов о предельном распределении $x^{-1/3}\Delta_0(x;\mathrm{sym}^2 f)$ (и $x^{-1/3}D_0(x;\mathrm{sym}^2 f)$) является трудной нерешенной задачей. Эта задача обсуждается в §4; она, в частности, связана с получением асимптотики в теореме 2 при $\rho = 0$.

§2. Аналог формулы Вороного. Среднеквадратичные оценки

Прежде всего сформулируем аналог формулы Вороного, обобщающий теорему 1 работы [2].

Теорема 1. *Пусть $x > 1$, $N \geqslant 1$. Тогда при любом фиксированном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, имеем*

$$\begin{aligned}&\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)\\ &= 2^{-\rho}\pi^{-\rho-1}3^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{3}}\sum_{n\leqslant N} c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}}\cos\left\{6\pi(nx)^{\frac{1}{3}} - \frac{\pi}{2}\rho\right\}\\ &+ O\Big(x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{6}}N^{-\frac{1}{3}\rho+\frac{1}{6}+\varepsilon}\Big) + O\Big(x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{2}{3}+\varepsilon}N^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{3}}\Big) + O(x^\varepsilon).\end{aligned}$$

В [2] приводятся лишь фрагменты доказательства; оно следует уже известным образцам (см. [5, 6]). Доказательство настоящей теоремы мало отличается от доказательства теоремы 1 [2].

Оценим теперь интеграл

$$\int_1^X \Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)^2\,dx$$

при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Используем соображения доказательства теоремы 13.5 книги [7]. Достаточно рассмотреть интеграл по $[T, 2T]$. В этом случае $T \leqslant x \leqslant 2T$ и, взяв $N = T$, получаем из теоремы 1 соотношение

$$\begin{aligned}
&\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)\\
&= 2^{-\rho}\pi^{-\rho-1}3^{-\frac12}x^{\frac23\rho+\frac13}\sum_{n\leqslant N} c_n n^{-\frac13\rho-\frac23}\cos\left\{6\pi(nx)^{\frac13}-\frac{\pi}{2}\rho\right\}\\
&+ O\Big(T^{\frac13\rho+\frac13+\varepsilon}\Big).
\end{aligned}$$

Начинаем с почленного интегрирования:

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T}\Delta_\rho(x;\mathrm{sym}^2 f)^2dx = 2^{-2\rho}\pi^{-2\rho-2}3^{-1}\int_T^{2T} x^{\frac43\rho+\frac23}\sum_{m,n\leqslant T} c_m c_n (mn)^{-\frac13\rho-\frac23}\\
&\times\cos\left\{6\pi(mx)^{\frac13}-\frac{\pi}{2}\rho\right\}\cos\left\{6\pi(nx)^{\frac13}-\frac{\pi}{2}\rho\right\}dx\\
&+ O\left(T^{\rho+\frac23+\varepsilon}\int_T^{2T}\Big|\sum_{n\leqslant T} c_n n^{-\frac13\rho-\frac23}\cos\left\{6\pi(nx)^{\frac13}-\frac{\pi}{2}\rho\right\}\Big|dx\right)\\
&+ O\Big(T^{\frac23\rho+\frac53+\varepsilon}\Big).
\end{aligned} \tag{4}$$

В первой сумме в (4) рассматриваются отдельно случаи $m = n$ и $m \neq n$. Вклад членов с $m = n$ составляет

$$\begin{aligned}
&2^{-2\rho}\pi^{-2\rho-2}3^{-1}\sum_{n\leqslant T}\int_T^{2T} x^{\frac43\rho+\frac23}c_n^2 n^{-\frac23\rho-\frac43}\cos^2\left\{6\pi(nx)^{\frac13}-\frac{\pi}{2}\rho\right\}dx\\
&= 2^{-2\rho-1}\pi^{-2\rho-2}3^{-1}\sum_{n\leqslant T} c_n^2 n^{-\frac23\rho-\frac43}\int_T^{2T} x^{\frac43\rho+\frac23}(1+\cos\{12\pi(nx)^{\frac13}-\pi\rho\})dx
\end{aligned}$$

$$= 2^{-2\rho-1}\pi^{-2\rho-2}(4\rho+5)^{-1}\Big((2T)^{\frac{4}{3}\rho+\frac{5}{3}} - T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{5}{3}}\Big)\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{4}{3}}$$

$$+ O\Big(T^{\frac{2}{3}\rho+\frac{4}{3}} \cdot \log^8 T\Big) + O\Big(T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{4}{3}}\Big). \tag{5}$$

Для получения (5) использовались: неравенства (3) и

$$\sum_{n\leqslant x} d_k^2(n) \leqslant x\big(9\log x\big)^{k-1} \qquad \text{(см. [8]);}$$

частное суммирование; классический результат ван дер Корпута [7]:

пусть $F(x)$ – вещественная дифференцируемая функция такая, что $F'(x)$ монотонна и $F'(x) \geqslant m > 0$ или $F'(x) \leqslant -m < 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда

$$\left|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\right| \leqslant 4Gm^{-1}, \tag{6}$$

где $G(x)$ – положительная монотонная функция при $a \leqslant x \leqslant b$ такая, что $|G(x)| \leqslant G$.

Из формулы $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ видно, что подсумма в (4), состоящая из членов с $m \neq n$, кратна величине

$$\sum_{m\neq n\leqslant T} c_m c_n (mn)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \int_T^{2T} x^{\frac{4}{3}\rho+\frac{2}{3}} \cos\Big\{6\pi\big(mx\big)^{1/3} - 6\pi\big(nx\big)^{1/3}\Big\}dx$$

$$+ \sum_{m\neq n\leqslant T} c_m c_n (mn)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \int_T^{2T} x^{\frac{4}{3}\rho+\frac{2}{3}} \cos\Big\{6\pi\big(mx\big)^{1/3} + 6\pi\big(nx\big)^{1/3} - \pi\rho\Big\}dx$$

$$=: S_1 + S_2.$$

Оценивая интегралы в S_2 с помощью (6), имеем

$$S_2 \ll T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{4}{3}} \sum_{m<n\leqslant T} |c_m|\ |c_n|(mn)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \Big(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\Big)^{-1}.$$

Используя оценку

$$\sum_{m\leqslant x} d_3(n) \ll x\log^2 x,$$

получаем

$$S_2 \ll T^{\rho+\frac{5}{3}} \log^5 T.$$

Аналогично, имеем

$$S_1 \ll T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{4}{3}} \sum_{m<n\leqslant T} |c_m|\ |c_n|(mn)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \left(m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$$

$$= T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{4}{3}} \left(\sum_{n\leqslant m/2} + \sum_{n>m/2} \right) =: T^{\frac{4}{3}\rho+\frac{4}{3}} (S_1' + S_1'').$$

Далее, имеем

$$S_1' \ll \sum_{m\leqslant T, m\leqslant m/2} d_3(m) d_3(n) (mn)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \cdot m^{-\frac{1}{3}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m\leqslant T} d_3(m) m^{-\frac{1}{3}\rho-1} \right) \left(\sum_{n\leqslant T} d_3(n) n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \right) \ll T^{-\frac{1}{3}\rho+\frac{1}{3}} \log^5 T,$$

$$\begin{aligned} S_1'' &\ll \sum_{m\leqslant T} d_3(m) m^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \sum_{m/2<n<m} d_3(n) n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \left(m^{1/3} - n^{1/3}\right)^{-1} \\ &\ll \sum_{m\leqslant T} d_3(m) m^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \sum_{m/2<n<m} d_3(n) n^{-\frac{1}{3}\rho} (m-n)^{-1} \\ &\ll \sum_{m\leqslant T} d_3(m) m^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{2}{3}+\varepsilon} \ll T^{-\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{3}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_1 \ll T^{\rho+\frac{5}{3}} \log^5 T + T^{\frac{2}{3}\rho+\frac{5}{3}+\varepsilon}.$$

Первый O-член в (4) оценивается с помощью неравенства Коши–Шварца как

$$\ll T^{\rho+2/3+\varepsilon} \cdot T^{1/2} \left(\int_T^{2T} \left| \sum_{n\leqslant T} c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \cos\left\{ 6\pi(nx)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\rho \right\} \right|^2 dx \right)^{1/2} \ll T^{\rho+5/3+\varepsilon};$$

при этом интеграл $\int_T^{2T} \left|\cdots\right|^2 dx$ оценивается с помощью приведенных выше вычислений как $O(T)$, если $0 < \rho \leqslant 1$; $O(T^{1+\varepsilon})$, если $\rho = 0$. Тем самым, доказана

Теорема 2. *При любом фиксированном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, имеем*

$$\int\limits_1^X \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f)^2 dx = C X^{\frac{4}{3}\rho + \frac{5}{3}} + O\left(X^{\rho + 5/3 + \varepsilon}\right),$$

где

$$C = 2^{-2\rho-1} \pi^{-2\rho-2} (4\rho+5)^{-1} \sum_{n=1}^\infty c_n^2 n^{-\frac{2}{3}\rho - \frac{4}{3}}.$$

§3. Существование предельного распределения

В настощем параграфе доказывается следующий результат.

Теорема 3. *Фиксируем ρ, $0 < \rho \leqslant 1$. Величина $x^{-\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}} \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f)$ имеет предельное распределение с плотностью $p(\alpha)$; иначе говоря, для любого интервала I справедливо соотношение*

$$X^{-1} \operatorname{mes}\left\{x \in [1, X] : x^{-\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}} \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f) \in I\right\} \longrightarrow \int\limits_I p(\alpha) d\alpha$$

при $X \to \infty$. Плотность $p(\alpha)$ и ее производные удовлетворяют условию убывания

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} p(\alpha) \ll (1 + |\alpha|)^{-A}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$ и любой константы A, причем $\ll$-константа зависит от A и k. Кроме того, $p(\alpha)$ продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$ как целая функция.

Следствие 1. *Тот же предельный закон имеет место для величины*

$$x^{-\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}} D_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f), \qquad 0 < \rho < 1.$$

Доказательство теоремы опирается на метод Хис-Брауна [4], к изложению которого мы переходим. Рассматриваем произвольную функцию $F(t)$, которая аппроксимируется в среднем осциллирующим рядом.

Предположение (H). *Пусть $a_1(t), a_2(t), \ldots$ – непрерывные вещественнозначные функции с периодом 1 и пусть существуют ненулевые константы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ такие, что*

$$\lim_{N \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \min\left\{1, \left|F(t) - \sum_{n \leqslant N} a_n(\gamma_n t)\right|\right\} dt = 0.$$

Уже выполнение условия (H) гарантирует наличие предельного распределения у $F(t)$ в слабом смысле. Более тонким является следующий результат Хис-Брауна ([4, теорема 5]), который мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(t)$ удовлетворяет* (H) *и предположим, что константы γ_i линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Предположим, кроме того, что*

$$\int_0^1 a_n(t)dt = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 a_n(t)^2 dt < \infty,$$

и что существует константа $\mu > 1$, для которой

$$\max_{t \in [0,1]} |a_n(t)| \ll n^{1-\mu}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} n^{\mu} \int_0^1 a_n(t)^2 dt = \infty.$$

Тогда $F(t)$ имеет предельное распределение с плотностью $p(\alpha)$, свойства которой сформулированы в теореме 3.

Покажем теперь, как лемма 1 применяется к величине $\Delta_\rho(x; \operatorname{sym}^2 f)$. Нам необходима следующая формула:

$$\Delta_\rho(x; \operatorname{sym}^2 f) = 2^{-\rho}\pi^{-\rho-1}3^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{3}} \sum_{n \leqslant X} c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \cos\left\{6\pi(nx)^{\frac{1}{3}} - \frac{\pi}{2}\rho\right\}$$

$$+O\left(X^{\frac{1}{3}\rho+\frac{1}{3}+\varepsilon}\right),$$

которая равномерна относительно $x \in [X, 8X]$.

Эта формула вытекает из теоремы 1.

Пусть

$$F(t) := t^{-2\rho-1}\Delta_\rho(t^3; \operatorname{sym}^2 f);$$

$$a_n(t) := \varepsilon(n)2^{-\rho}\pi^{-\rho-1}3^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{\infty} c_n(nr^3)^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \cos\left\{6\pi rt - \frac{\pi}{2}\rho\right\}$$

с $\varepsilon(n) = 1$, если n свободно от кубов, и $\varepsilon(n) = 0$ в противном случае; $\gamma_n = n^{1/3}$. В частности, мы видим, что

$$F(t) = 2^{-\rho}\pi^{-\rho-1}3^{-\frac{1}{2}}\sum_{n\leqslant T^3} c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}}\cos\left\{6\pi t n^{1/3} - \frac{\pi}{2}\rho\right\} + O(T^{-\rho+\varepsilon})$$

равномерно относительно $t \in [T, 2T]$. Тогда для любого целого $N \leqslant T^{1/2}$ имеем

$$F(t) - \sum_{n\leqslant N} a_n(\gamma_n t) \ll \left|\sum_{n\leqslant T^3}{}' c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}}\cos\left\{6\pi t n^{1/3} - \frac{\pi}{2}\rho\right\}\right|$$

$$+ \sum_{n\leqslant N} n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \sum_{r\geqslant T/\sqrt[3]{n}} c_{nr^3} r^{-\rho-2} + O(T^{-\rho+\varepsilon})$$

$$\ll \left|\sum_{n\leqslant T^3}{}' c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} e(3tn^{1/3})\right| + N^{2/3}T^{-\rho-1+\varepsilon} + T^{-\rho+\varepsilon}$$

$$\ll \left|\sum_{n\leqslant T^3}{}' c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} e(3tn^{1/3})\right| + T^{-\rho+\varepsilon}$$

равномерно относительно $t \in [T, 2T]$, причем $\sum'$ означает, что на n накладывается следующее ограничение: если $n = n_0 r^3$, где n_0 свободно от кубов, то $n_0 > N$. Воспользовавшись соображениями из §2, можно показать, что ($c > 0$)

$$\int_T^{2T}\left|\sum_{n\leqslant T^3}{}' c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} e(3tn^{1/3})\right|^2 dt = cT\sum_{n\leqslant T^3}{}' c_n^2 n^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{4}{3}} + O(T^{-\rho+1+\varepsilon})$$

$$\ll T\sum_{n>N} c_n^2 n^{-\frac{2}{3}\rho-\frac{4}{3}} + T^{-\rho+1+\varepsilon} \ll TN^{\varepsilon-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}} + T^{-\rho+1+\varepsilon}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\int_T^{2T}\left|F(t) - \sum_{n\leqslant N} a_n(\gamma_n t)\right|^2 dt$$

$$\ll T\left(T^{-\rho+\varepsilon}\right)^2 + TN^{\varepsilon-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}} + T^{1-\rho+\varepsilon} \ll TN^{\varepsilon-\frac{2}{3}\rho-\frac{1}{3}} + T^{1-\rho+\varepsilon}.$$

По неравенству Коши, имеем

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\left|F(t) - \sum_{n\leqslant N} a_n(\gamma_n t)\right| dt \ll N^{\varepsilon-\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{6}};$$

следовательно, выполняется предположение (H). Теорема сразу вытекает из леммы 1, если взять, например, $\mu = 5/3$.

§4. Замечания

В настоящем параграфе обсуждается нерешенная задача, состоящая в доказательстве существования предельного распределения у величины $x^{-1/3}\Delta_0(x;\mathrm{sym}^2 f)$. Сначала получим аналогичный факт для величины

$$A(x,f) := {\sum_{n\leqslant x}}' a_f(n),$$

где $a_f(n) = \lambda_f(n)n^{(k-1)/2}$ — n-ый коэффициент Фурье собственной формы Гекке $f \in S_k(\Gamma)^+$ (см. §1). В последнем случае аналог формулы Вороного доказан в следующем виде (см. [9]): при $1 \leqslant N \ll x$ имеем

$$A(x,f) = \pi^{-1}2^{-1/2}x^{-1/4+k/2}\sum_{n\leqslant N}\lambda_f(n)n^{-3/4}\cos\Big\{4\pi(nx)^{1/2} - \pi/4\Big\} + O\Big(x^{k/2+\varepsilon}N^{-1/2}\Big). \qquad (7)$$

Далее, используя формулу (7) и лемму 1, можно доказать следующий результат.

Теорема 4. *Величина $x^{1/4-k/2}A(x,f)$ имеет предельное распределение с плотностью $p(\alpha)$, свойства которой сформулированы в теореме* 3.

Последняя теорема вполне аналогична теореме 1 работы Хис-Брауна [4], в которой рассматривается функция (остаточный член в проблеме делителей Дирихле)

$$\Delta(x) = \sum_{n\leqslant x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1)$$

с $d(n) := d_2(n)$. При доказательстве этой теоремы Хис-Браун опирался, в частности, на классическую формулу Вороного [5] для $\Delta(x)$, весьма сходную с (7). Известна также общая проблема делителей (см. [5])

$$\sum_{n\leqslant x} d_l(n) = xP_l(\log x) + \Delta_l(x),$$

где целое $l \geqslant 2$, P_l – полином степени $l-1$, $\Delta_l(x)$ – остаточный член и $\Delta_2(x) = \Delta(x)$. Хис-Браун [4] показал, что можно изучить предельное распределение величины $x^{-1/3}\Delta_3(x)$. Хотя формула Вороного известна и в случае $\Delta_3(x)$, но использовать ее для получения предельного закона нельзя. Действительно, Аткинсон [10] доказал, что

$$\Delta_3(x) = \pi^{-1}2^{-1/2}x^{1/3}\sum_{n\leqslant T^3/x} d_3(n)n^{-2/3}\cos\Big\{6\pi(nx)^{1/3}\Big\} + O\Big(x^{1+\varepsilon}T^{-1}\Big). \tag{8}$$

при условии

$$x^{1/2+\varepsilon} \leqslant T \leqslant x^{2/3-\varepsilon} \tag{9}$$

(это условие опущено в книге Титчмарша [5]). Для успешного применения подхода Хис-Брауна, использованного при доказательстве теоремы 3, требуется расширить интервал (9) так, чтобы получить остаточный член $o(x^{1/3})$ в формуле (8). Эта задача пока не решена. Поэтому Хис-Браун предложил другой подход, использующий асимптотическое поведение интеграла

$$\int_1^x \Delta_3(y)^2\,dy, \qquad x\to\infty.$$

Тонг [11] доказал ($l \geqslant 2$):

$$\int_1^x \Delta_l(y)^2\,dy = \big((4l-2)\pi^2\big)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_l^2(n)n^{-(l+1)/l}x^{(2l-1)/l} + R_l(x), \tag{10}$$

где

$$R_l(x) \ll \begin{cases} x\log^5 x & (l=2),\\ x^{c_l+\varepsilon},\ c_l = 2-\dfrac{3-4\sigma_l}{2l(1-\sigma_l)-1} & (l\geqslant 3),\end{cases}$$

и σ_l – инфимум таких $\sigma > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^T \big|\zeta(\sigma+it)\big|^{2l}dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Последовательно были доказаны следующие оценки для σ_3 (см. [5]):

$$\sigma_3 \leqslant \frac{2}{3}, \quad \sigma_3 \leqslant \frac{5}{8}, \quad \sigma_3 \leqslant \frac{7}{12}.$$

Для получения асимптотики в (10) при $l = 3$ достаточно двух последних оценок; беря $\sigma_3 \leqslant \frac{7}{12}$, имеем

$$R_3(x) \ll x^{14/9+\varepsilon}.$$

Переходим к обсуждению задачи, сформулированной в начале этого параграфа. Теорема 1 настоящей работы при $\rho = 0$ сходна с формулой Вороного–Аткинсона (8) и имеет те же недостатки. Поэтому метод доказательства теоремы 3 в применении к $x^{-1/3}\Delta_0(x; \mathrm{sym}^2 f)$ не проходит. Второй подход Хис-Брауна также не может быть применен. Действительно, доказательство асимптотики в теореме 2 при $\rho = 0$ может лишь основываться (пока не придумано иного пути) на аналоге результата Тонга, который еще не получен. При этом, к настоящему моменту известна лишь слабая оценка для аналога величины σ_3: если $\sigma(\mathrm{sym}^2 f)$ – инфимум таких $\sigma > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^T \left|L(\sigma_i t, \mathrm{sym}^2 f)\right|^2 dt \ll T^{1+\varepsilon},$$

то

$$\sigma(\mathrm{sym}^2 f) \leqslant \frac{3}{4} \quad ([12]).$$

Литература

1. G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series,* Proc. London Math. Soc. (3) **31** (1975), 79–98.
2. О. М. Фоменко, *Тождества, включающие коэффициенты автоморфных L-функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314**, (2004), 247–256.
3. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions,* Lect. Notes Math. **899** (1981), 148–165.
4. D. R. Heath-Brown, *The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem,* Acta Arithm. **60** (1992), 389–415.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edition, Oxford, 1986.
6. A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, *On Riesz means of the coefficients of the Rankin–Selberg series,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **127** (1999), 117–131.
7. A. Ivić, *The Riemann zeta-function,* Wiley, New York etc., 1985.

8. P. D. T. A. Elliott, *On the mean value of $f(p)$,* Proc. London Math. Soc. (3) **21** (1970), 28–96.
9. M. Jutila, *A method in the theory of exponential sums,* Bombay, 1987.
10. F. V. Atkinson, *A divisor problem,* Quart. J. Math. Oxford Ser. **12** (1941), 193–200.
11. K.-C. Tong, *On divisor problems. III,* Acta Math. Sinica **6** (1956), 515–541.
12. A. Sankaranarayanan, *Fundamental properties of symmetric square L-functions. I,* Illinois J. Math. **46** (2002), 23–43.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 8 сентября 2006 г.