Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

О. М. Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ $L(1, \chi_{8p})$

**Посвящается 70-летию со дня рождения
Марка Борисовича Барбана**

Введение

Пусть $s = \sigma + it$ обозначает комплексное число с $\sigma = \operatorname{Re} s$; рассмотрим ряд

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s},$$

где χ – характер Дирихле по модулю m, m – целое положительное число. Если характер χ неглавный, то ряд сходится равномерно в любой полуплоскости вида $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$. Д. Литтлвуд [1] доказал следующий результат: если χ – вещественный неглавный характер по модулю m и справедлива расширенная гипотеза Римана (РГР), то при $m \to \infty$

$$\frac{1 + o(1)}{2 \cdot 6\pi^{-2} e^{\gamma} \log\log m} < L(1, \chi) < \{1 + o(1)\} 2e^{\gamma} \log\log m,$$

где γ – константа Эйлера.

С. Човла [2, 3] получил следующий Ω-результат: для вещественных характеров χ любое из неравенств ($\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, но постоянно)

$$L(1, \chi) > (1 - \varepsilon) e^{\gamma} \log\log m, \qquad L(1, \chi) < \frac{1 + \varepsilon}{6\pi^{-2} e^{\gamma} \log\log m} \tag{1}$$

выполняется для бесконечного множества модулей m. П. Т. Бейтмен, С. Човла и П. Эрдеш [4] показали, что если m пробегает лишь простые значения p, то верны те же оценки Човлы, но с

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 05-01-00930)

ухудшением констант в 18 раз. Наконец, М. Б. Барбан [5] полностью перенес Ω-результат (1) на случай L-функций Дирихле с вещественными характерами χ по простому модулю p.

В настоящей работе мы доказываем (с привлечением РГР) количественные аналоги указанных выше Ω-результатов Бейтмена, Човлы и Эрдеша и Барбана (см. теоремы 5 и 6 ниже). Для упрощения, вместо $\chi(n) = (n/p)$ (символ Лежандра, $p > 2$) мы берем квадратичный характер $\chi_{8p}(n) = (8p/n)$ (символ Кронекера, $p > 2$); ниже обозначение $\chi_m(n) = (m/n)$ сохраняется на протяжении всей работы. Основой нашего подхода являются результаты о моментах величины $L(1, \chi_{8p})$. Мы вычисляем моменты чисто мнимого порядка в §1 и моменты целого порядка в §2 (именно моменты целого порядка нужны при доказательстве наших Ω-результатов). При этом используется аналитический метод Барбана (см. [5–7]), основанный на большом решете. Равномерные варианты теорем о моментах требуют привлечения РГР. Наряду с получением Ω-результатов мы исследуем предельное распределение величины $\log L(1, \chi_{8p})$. Наконец, §3 содержит гипотезы и комментарии.

Для целых положительных m и всех достаточно больших вещественных чисел x мы индуктивно определяем функции

$$\log_m x = \log(\log_{m-1} x), \quad m \geqslant 2,$$

с

$$\log_1 x = \log x \quad (x > 0).$$

Ниже $M_0 > 0$ означает достаточно большое число. Буквы $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ обозначают положительные постоянные; $c', c'', c_1, c_2, c_3, \ldots$ – положительные постоянные, некоторые при необходимости являются достаточно малыми (это отмечается в тексте).

§1

В настоящем параграфе изучается асимптотическое поведение суммы

$$\sum_{3 \leqslant p \leqslant M} L^{iw}(1, \chi_{8p}),$$

если $w \in \mathbb{R}$ и $M \geqslant M_0$. Эта асимптотика содержит информацию о поведении величины $L(1, \chi_{8p})$ при растущем p.

Приведем сначала необходимые для дальнейшего леммы.

Лемма 1. *Пусть $N(\sigma,T,\chi)$ означает число нулей $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в прямоугольнике $\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $-T\leqslant\gamma\leqslant T$. Предположим, что $M\geqslant 1$ и $T\geqslant 2$; тогда для $4/5\leqslant\sigma\leqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{m\leqslant M}\ \sum_{\chi}{}^{*} N(\sigma,T,\chi)\ll (M^2T)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}}\log^{14}(MT),$$

где $\sum\limits_{\chi}^{*}$ означает суммирование по всем примитивным характерам χ по модулю m.

Доказательство этой леммы содержится в книге Монтгомери [8].

Лемма 2. *Пусть $0<\eta<1/2$. Если функция $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ по модулю $m\leqslant M$ не имеет нулей в прямоугольнике*

$$1-\eta\leqslant\sigma<1,\qquad |t|\leqslant\log^3 M, \tag{2}$$

то в прямоугольнике

$$1-\eta/2\leqslant\sigma<1,\qquad |t|\leqslant\log^2 M$$

справедлива оценка

$$\log L(s,\chi)=O\Big(\log^{c_1(1-\sigma)}M\cdot\log_2 M\Big).$$

Доказательство леммы содержится в работе [6].

Прежде чем формулировать следующие леммы, определим общую функцию делителей $d_z(n)$, где z – произвольное комплексное число (см. [9]). Функция $d_z(n)$ вводится соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty}d_z(n)n^{-s}:=\zeta^z(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-z}\quad(\operatorname{Re}s>1),$$

причем ветвь функции $\zeta^z(s)$ определяется условием

$$\zeta^z(s)=\exp\{z\log\zeta(s)\}=\exp\Big(z\sum_p\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}p^{-js}\Big)\quad(\operatorname{Re}s>1).$$

Из определения следует, что $d_z(n)$ является мультипликативной функцией, обобщающей классическую функцию делителей $d_k(n)$ ($k\geqslant 2$ – целое число); напомним, что $d_2(n)=:d(n)$.

Лемма 3. *Пусть $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ по модулю $m \leqslant M$ не имеет нулей в прямоугольнике* (2), *тогда имеем*

$$L^{iw}(1,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{iw}(n)\chi(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) +$$

$$+O\Big(\exp\Big(-c' \frac{\log M}{\log_2 M} + c''|w| \log_2 M \Big)\Big).$$

Доказательство следует известным образцам (см., например, [7, 10, 11]) и опирается на лемму 2.

Лемма 4. *Для $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ по модулю $m \leqslant M$*

$$L^{iw}(1,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{iw}(n)\chi(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) +$$

$$+O\Big(\exp\big(c_2(|w|+1) \log_2 M \big)\Big).$$

Доказательство этой леммы очень просто (ср. с доказательством аналогичного факта в [10]).

Напомним известное обозначение:

$$\pi(x;k,a) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a (\operatorname{mod} k)}} 1.$$

Лемма 5. 1) *Пусть $1 \leqslant Q \leqslant x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой положительной константы A имеем*

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\substack{0<a\leqslant k \\ (a,k)=1}} \left| \pi(x;k,a) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} \right|^2 \ll \frac{x^2}{\log^A x};$$

2) *в предположении РГР, для $Q > x^{\beta}$, где $\beta > 1/2$, имеем*

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\substack{0<a\leqslant k \\ (a,k)=1}} \left| \pi(x;k,a) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} \right|^2 \ll Qx.$$

Утверждение 1) есть вариант известной теоремы Барбана–Монтгомери; утверждение 2) – вариант результата Хооли; см. [12].

Теорема 1. 1) *Пусть* $w\in\mathbb{R}$. *Тогда для всех* $M\geqslant M_0$ *и любой положительной константы* C *имеем*

$$\widehat{G}_1(w):=\frac{1}{\pi(M)-1}\sum_{3\leqslant p\leqslant M}L^{iw}(1,\chi_{8p})=\widehat{G}(w)+O\Big(\big(\log M\big)^{|w|^2-C}\Big),$$

если $|w|<C^{1/2}$, *причем* O-*константа зависит только от* C;

$$\widehat{G}(w)=\prod_{p\geqslant 3}\frac{(1+\frac{1}{p})^{-iw}+(1-\frac{1}{p})^{-iw}}{2};$$

2) *в предположении* РГР *имеем*

$$\widehat{G}_1(w)=\widehat{G}(w)+O\Big(\exp\big(-c_3\log M/\log_2 M\big)\Big),$$

если $M\geqslant M_0$, $|w|\leqslant c_4(\log M/\log_2 M)^{1/2}$ *и константа* c_4 *достаточно мала.*

Доказательство. Применим к сумме

$$\sum:=\sum_{3\leqslant p\leqslant M}L^{iw}(1,\chi_{8p})$$

леммы 1, 3 и 4. Отметим, что лемма 3 дает нетривиальный результат лишь при $|w|\leqslant c_5\log M/\log_2^2 M$, где c_5 – достаточно малая константа. Налагая это ограничение, имеем

$$\sum=\sum_{3\leqslant p\leqslant M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{8p}(n)d_{iw}(n)}{n}\exp\big(-n/M^{1/3}\big)+$$

$$+O\Big(\pi(M)\exp\big(-c_6\log M/\log_2 M\big)\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{iw}(n)}{n}\exp\big(-n/M^{1/3}\big)\sum_{3\leqslant p\leqslant M}\chi_{8p}(n)+O(\Delta),$$

где

$$\Delta:=\pi(M)\exp\big(-c_6\log M/\log_2 M\big).$$

Используя при $N=M^{1/3}$ оценку (см. [7])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{|w|}(n)}{n}\exp(-n/N)\ll\exp\Big\{\log N/\log_2 N+(|w|+1)\log_3 N\Big\},$$

получаем

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{iw}(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) \sum_{a (\operatorname{mod} n)} \chi_{8a}(n) \pi(M; n, a) + O(\Delta).$$

Если n является нечетным полным квадратом, то

$$\sum_{a (\operatorname{mod} n)} \chi_{8a}(n) \pi(M; n, a) = \pi(M).$$

Таким образом,

$$\sum = \pi(M) \sum_{n, n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)} \frac{d_{iw}(n^2)}{n^2} \exp(-n^2/M^{1/3}) +$$

$$+ \sum_{n \neq n_1^2} \frac{d_{iw}(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) \sum_{a (\operatorname{mod} n)} \chi_{8a}(n) \frac{\operatorname{li} M}{\varphi(n)} +$$

$$+ O\biggl(\sum_{n \neq n_1^2} \frac{d_{|w|}(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) \sum_{\substack{0 < a \leqslant n \\ (a,n)=1}} \Bigl| \pi(M; n, a) - \frac{\operatorname{li} M}{\varphi(n)} \Bigr| \biggr) + O(\Delta) =$$

$$=: \pi(M) \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + O(\sum\nolimits_3) + O(\Delta).$$

Очевидно, $\sum_2 = 0$. Преобразуем $\sum_1$:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n, n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)} \frac{d_{iw}(n^2)}{n^2} + O\biggl(\sum_n \frac{d_{|w|}(n)}{n^2} \Bigl(1 - \exp(-n^2/M^{1/3})\Bigr) \biggr) =:$$

$$=: \sum\nolimits_4 + O(\sum\nolimits_5).$$

Легко видеть, что $\sum_4 = \widehat{G}(w)$. Далее,

$$\sum\nolimits_5 \ll M^{-1/3} \sum_{n \leqslant M^{1/6}} d_{|w|}(n^2) + \sum_{n > M^{1/6}} \frac{d_{|w|}(n^2)}{n^2} =: \sum\nolimits_5^{(1)} + \sum\nolimits_5^{(2)}.$$

Оценивая $\sum_5^{(1)}$, используем следующие известные факты [13, 14]:

1) для любых целых положительных r, a, b

$$d_r(ab) \leqslant d_r(a) d_r(b);$$

2) для любого целого $r\geqslant 2$ и всех $x\geqslant 2$

$$\sum_{m\leqslant x} d_r^2(m)\leqslant 9^{r^2}x(\log x)^{r^2-1}. \tag{3}$$

В результате, получаем

$$\sum\nolimits_5^{(1)}\leqslant M^{-1/6}(9\log M)^{|w|^2}\ll M^{-1/6+c_7},$$

где c_7 достаточно мала, если наложить ограничение

$$|w|\leqslant c_8(\log M/\log_2 M)^{1/2} \tag{4}$$

с достаточно малой константой c_8.

Оценивая $\sum_5^{(2)}$, используем следующее неравенство [7]: если $x\geqslant 1$ и r – целое положительное число, то

$$\sum_{m>x}\frac{d_r(m^2)}{m^2}<\exp\Big\{-2\log x/\log(r+2)+c_9 r\log_2(r+2)\Big\}. \tag{5}$$

Имеем

$$\sum\nolimits_5^{(2)}<\exp(-c_{10}\log M/\log_2 M),$$

если

$$|w|\leqslant c_{11}\log M/\log_2^2 M. \tag{6}$$

Оцениваем $\sum_3$:

$$\sum\nolimits_3\ll\sum_{n\leqslant M^{2/3}}\frac{d_{|w|}(n)}{n}\sum_{\substack{0<a\leqslant n\\(a,n)=1}}\Big|\pi(M;n,a)-\frac{\operatorname{li}M}{\varphi(n)}\Big|+$$

$$+\sum_{n>M^{2/3}}\frac{d_{|w|}(n)}{n}\exp(-n/M^{1/3})\sum_{\substack{0<a\leqslant n\\(a,n)=1}}\Big(\frac{M}{\varphi(n)}+1\Big)=:\sum\nolimits_6+\sum\nolimits_7.$$

По неравенству Коши,

$$\sum\nolimits_6\leqslant\Big(\sum_{n\leqslant M^{2/3}}\frac{d_{|w|}^2(n)}{n}\Big)^{1/2}$$

$$\times\Big(\sum_{n\leqslant M^{2/3}}\frac{1}{n}\Big(\sum_{\substack{a\leqslant n\\(a,n)=1}}\Big|\pi(M;n,a)-\frac{\operatorname{li}M}{\varphi(n)}\Big|\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{7}$$

Пользуясь неравенством (3), имеем

$$\sum_{n\leqslant M^{2/3}} \frac{d^2_{|w|}(n)}{n} \ll 9^{|w|^2}(\log M)^{|w|^2} \ll (\log M)^{2|w|^2}.$$

Второй множитель в (7) оцениваем с помощью неравенства Коши и леммы 5.1):

$$\sum_{n\leqslant M^{2/3}} \frac{1}{n}\Bigg(\sum_{\substack{a\leqslant n\\(a,n)=1}} \Big|\pi(M;n,a)-\frac{\operatorname{li} M}{\varphi(n)}\Big|\Bigg)^2$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant M^{2/3}}\sum_{\substack{a\leqslant n\\(a,n)=1}} \Big|\pi(M;n,a)-\frac{\operatorname{li} M}{\varphi(n)}\Big|^2 \ll M^2(\log M)^{-A_1},$$

где $A_1>0$ – любая константа. Поэтому

$$\sum\nolimits_6 \ll \sqrt{(\log M)^{2|w|^2}}\cdot\sqrt{M^2(\log M)^{-A_1}} = M(\log M)^{|w|^2-A_1/2}.$$

Если же воспользоваться РГР, то, по лемме 5. 2),

$$\sum\nolimits_6 \ll (\log M)^{|w|^2}\cdot(M^{2/3}\cdot M)^{1/2} = (\log M)^{|w|^2}\cdot M^{5/6} \ll M^{5/6+c_{12}},$$

где c_{12} достаточно мала при выполнении ограничения (4) с достаточно малой константой c_8.

Переходим к сумме $\sum_7$. Имеем

$$\sum\nolimits_7 \ll \sum_{n>M^{2/3}} \frac{d_{|w|}(n)}{n^2}.$$

Для последней суммы справедлива оценка (5), поэтому

$$\sum\nolimits_7 \ll \exp(-c_{13}\log M/\log_2 M),$$

если выполняется ограничение (6). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. 1) *Для любого вещественного числа x при $M\to\infty$*

$$\frac{\#\{p, 3\leqslant p\leqslant M, \log L(1,\chi_{8p})\leqslant x\}}{\pi(M)-1} \to G(x),$$

где $G(x)$ – функция распределения, определенная характеристической функцией $\widehat{G}(w)$;

2) *в предположении* РГР *равномерно для всех* $M \geqslant M_0$ *и всех вещественных чисел* x *имеет место оценка*

$$\left|\frac{\#\{p, 3 \leqslant p \leqslant M, \log L(1,\chi_{8p}) \leqslant x\}}{\pi(M)-1} - G(x)\right| \ll \Big(\frac{\log_2 M}{\log M}\Big)^{1/2};$$

3) *функция распределения* $G(x)$ *имеет непрерывную и ограниченную на всей вещественной прямой плотность* $p_G(x)$; *более того,* $G(x)$ *может быть аналитически продолжена в некоторую полуплоскость* $\operatorname{Im} z > -\delta$, $\delta > 0$.

Следствие 1. 1) *Для любого числа* $x > 0$ *при* $M \to \infty$

$$\frac{\#\{p, 3 \leqslant p \leqslant M, L(1,\chi_{8p}) \leqslant x\}}{\pi(M)-1} \to F(x),$$

где $F(x) = G(\log x)$;

2) *в предположении* РГР *равномерно для всех* $M \geqslant M_0$ *и всех вещественных чисел* $x > 0$ *имеет место соотношение*

$$\left|\frac{\#\{p, 3 \leqslant p \leqslant M, L(1,\chi_{8p}) \leqslant x\}}{\pi(M)-1} - F(x)\right| \ll \Big(\frac{\log_2 M}{\log M}\Big)^{1/2};$$

3) *функция равпределения* $F(x)$ *непрерывна на всей вещественной прямой; более того, она имеет непрерывную и ограниченную на всей вещественной прямой плотность*

$$p_F(x) = \begin{cases} p_G(\log x)\dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0,\\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2 проводится на основе теоремы 1 по известной схеме [7, 11], поэтому ограничимся лишь некоторыми пояснениями. Поскольку бесконечное произведение, определяющее $\widehat{G}(w)$, равномерно сходится в любой ограниченной области комплексной w-плоскости (ср. с [15]), $\widehat{G}(w)$ есть целая функция.

По теореме 1, для любого вещественного значения w $\widehat{G}(w)$ есть предел характеристических функций $\widehat{G}_1(w)$, поэтому $\widehat{G}(w)$ является характеристической функцией предельной функции распределения $G(x)$, к которой при любом вещественнойм числе x и $M \to \infty$ сходятся функции распределения (частоты)

$$G_1(x) := \frac{\#\{p, 3 \leqslant p \leqslant M, \log L(1,\chi_{8p}) \leqslant x\}}{\pi(M)-1}.$$

Более сильное утверждение 2) теоремы 2 следует из утверждения 2) теоремы 1 с помощью теоремы Берри–Эссеена [16–18]. Предельная характеристическая функция $\widehat{G}(w)$ абсолютно интегрируема, поэтому предельная функция распределения $G(x)$ имеет непрерывную и ограниченную на всей вещественной прямой плотность.

Что касается следствия 1, то необходимо пояснить лишь пункт 3). По теореме Райкова [19],

$$\begin{aligned} 1 - G(x) &\ll e^{-\rho x}, \qquad & x \to \infty, \\ G(x) &\ll e^{-\rho|x|}, \qquad & x \to -\infty \end{aligned} \tag{8}$$

для любого фиксированного значения $\rho > 0$. Аналогичное экспоненциальное убывание справедливо и для плотности $p_G(x)$. Этого, однако, не достаточно для того, чтобы показать непрерывность плотности $p_F(x)$ в точке $x = 0$. На самом деле, в случае $p_G(x)$ имеет место значительно более быстрое убывание по сравнению с (8); сошлемся на статьи [20, 21]. Нам достаточно результата:

$$p_G(x) \ll \exp(-\exp(c_{14}|x|)).$$

Замечание 1. П.Д.Т.А. Эллиотт [22] применил к задаче, рассмотренной в теореме 2, другой метод – сведение проблемы распределения значений $L(1,\chi)$, где $\chi = (\cdot/p)$, к проблеме, касающейся сумм независимых случайных величин на конечном вероятностном пространстве, Он получил следующий более точный результат по сравнению с пунктом 1) теоремы 2:

существует функция распределения $G'(x)$ такая, что оценка

$$\left| \frac{\#\{p, 3 \leqslant p \leqslant M, \log L(1,(\cdot/p)) \leqslant x\}}{\pi(M) - 1} - G'(x) \right| \ll (\log_3 M)^{-2}$$

имеет место равномерно для всех $M \geqslant M_0$ и всех вещественных чисел x. Характеристическая функция $\widehat{G}'(w)$ функции распределения $G'(w)$ имеет вид

$$\widehat{G}'(w) = \prod_p \frac{(1+1/p)^{-iw} + (1-1/p)^{-iw}}{2}.$$

§2

В этом параграфе изучается асимптотика суммы

$$\sum_{3\leqslant p\leqslant M} L^k(1,\chi_{8p}),$$

если $k\in\mathbb{Z}$ и $M\to\infty$. На основе этой асимптотики доказаны некоторые Ω-результаты, связанные с экстремальными значениями величины $L(1,\chi_{8p})$.

Теорема 3. 1) *Пусть целое $k\geqslant 1$. Тогда для всех $M\geqslant M_0$ и любой положительной константы C имеем*

$$\frac{1}{\pi(M)-1}\sum_{3\leqslant p\leqslant M} L^k(1,\chi_{8p}) = M_k + O\Big((\log M)^{k^2-C}\Big), \qquad (9)$$

если $k<C^{1/2}$, причем O-константа зависит только от C;

$$M_k=\prod_{p\geqslant 3}\frac{(1+1/p)^{-k}+(1-1/p)^{-k}}{2};$$

2) *в предположении* РГР *остаточный член в* (9) *заменяется на $O(\exp(-c_{15}\log M/\log_2 M))$, если $M\geqslant M_0$, $k\leqslant c_{16}(\log M/\log_2 M)^{1/2}$ и константа c_{16} достаточно мала.*

Доказательство теоремы 3 практически не отличается от доказательства теоремы 2, поэтому сделаем лишь несколько замечаний, Аналог леммы 3 утверждает: для $L(s,\chi_{8p})$, $3\leqslant p\leqslant M$, не имеющей нулей в прямоугольнике (2), справедливо соотношение

$$L^k(1,\chi_{8p}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)\chi_{8p}(n)}{n}\exp(-n/M^{1/3}) + O\Big(\exp(-c_{17}\log M/\log_2 M)\Big),$$

если $k\leqslant c_{18}\log M/\log_2^2 M$ и константа c_{18} достаточно мала.

Аналог леммы 4: *для любой функции $L(s,\chi_{8p})$, $3\leqslant p\leqslant M$, справедливо соотношение*

$$L^k(1,\chi_{8p}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)\chi_{8p}(n)}{n}\exp(-n/M^{1/3}) + O\Big(\exp(c_{19}\log M/\log_2 M)\Big), \qquad (10)$$

если $k \leqslant c_{20} \log M / \log_2^2 M$.

Поясним доказательство (10). Пусть

$$\begin{aligned} L^k(1, \chi_{8p}) = &\sum_{n \leqslant M^{1/3} \log^3 M}^{\infty} \frac{d_k(n)\chi_{8p}(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) + \\ &+ \sum_{n > M^{1/3} \log^3 M}^{\infty} \frac{d_k(n)\chi_{8p}(n)}{n} \exp(-n/M^{1/3}) + T(M) \\ &=: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + T(M). \end{aligned}$$

Имеем (ср. [10])

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_1 \ll \exp\Big(c_{21} k \log_2 M\Big), \\ &\sum\nolimits_2 \ll \exp\Big(c_{22} k\Big). \end{aligned}$$

Известно, что

$$L(1, \chi_{8p}) \ll \log p.$$

Поэтому при $3 \leqslant p \leqslant M$ и $k \leqslant c_{23} \log M / \log_2^2 M$ имеем

$$L^k(1, \chi_{8p}) < \Big(c_{24} \log M\Big)^k \leqslant \exp\Big(c_{25} \log M / \log_2 M\Big).$$

Следовательно, при $k \leqslant c_{23} \log M / \log_2^2 M$

$$T(M) \leqslant \exp\Big(c_{26} \log M / \log_2 M\Big),$$

и (10) доказано.

Теорема 4. 1) *Пусть целое* $k \geqslant 1$. *Тогда для всех* $M \geqslant M_0$ *и любой положительной константы* C *имеем*

$$\frac{1}{\pi(M) - 1} \sum_{3 \leqslant p \leqslant M} L^{-k}(1, \chi_{8p}) = M_{-k} + O\Big((\log M)^{k^2 - C}\Big), \tag{11}$$

если $k < C^{1/2}$, *причем* O*-константа зависит только от* C;

$$M_{-k} = M_k \Big(\frac{8}{\pi^2}\Big)^k;$$

2) *в предположении* РГР *остаточный член в* (11) *заменяется на* $O(\exp(-c_{27}\log M/\log_2 M))$, *если* $M \geqslant M_0$, $k \leqslant c_{28}(\log M/\log_2 M)^{1/2}$ *и константа* c_{28} *достаточно мала.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3, только теперь в пункте 1) надо учитывать наличие нулей Ландау–Зигеля (исключительных нулей) у некоторых L-функций Дирихле. По теореме Зигеля,

$$L^{-1}(1,\chi_{8p}) \ll_{\varepsilon} p^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число, если $L(s,\chi_{8p})$ имеет исключительный нуль. Если же $L(s,\chi_{8p})$ не имеет исключительного нуля, то, по теореме Гекке,

$$L^{-1}(1,\chi_{8p}) \ll \log p.$$

Далее, известно [23], что среди $L(s,\chi_{8p})$, $3 \leqslant p \leqslant M$, лишь $O(\log_3 M)$ L-функций могут иметь исключительные нули.

Следующая лемма 6 важна для получения Ω-результатов.

Лемма 6. 1) *Для всех* $k \geqslant 3$

$$\log M_k = k\log_2 k + (\gamma - \log 2)k + O(k/\sqrt{\log k}); \tag{12}$$

2) *остаточный член в* (12) *можно довести до* $O(k/\log k)$.

Доказательство. Пункт 1) доказывается с помощью очень простых соображений элементарной теории чисел. Разобьем произведение, определяющее M_k, на два:

$$M_k = \prod_{3\leqslant p\leqslant k\sqrt{\log k}} \frac{(1+1/p)^{-k}+(1-1/p)^{-k}}{2}$$
$$\times \prod_{p>k\sqrt{\log k}} \frac{(1+1/p)^{-k}+(1-1/p)^{-k}}{2} =: \prod\nolimits_1 \cdot \prod\nolimits_2.$$

Легко видеть, что

$$\frac{(1+1/p)^{-k}+(1-1/p)^{-k}}{2} < 1 + \frac{k^2}{p^2}\,\frac{1}{(1-1/p)^k}.$$

Поэтому

$$\prod\nolimits_2 < \prod_{p>k\sqrt{\log k}} \Bigl(1+\frac{c_{29}k^2}{p^2}\Bigr) < e^{O(k/\sqrt{\log k})}.$$

Переходим к $\prod_1$:

$$\prod\nolimits_1 = \frac{1}{2^{\pi(k\sqrt{\log k})-1}} \prod_{3\leqslant p\leqslant k\sqrt{\log k}} \left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-k} + \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}\right) =$$

$$= \prod_{3\leqslant p\leqslant k\sqrt{\log k}} e^{-k\log(1-1/p)} \cdot \left\{\frac{1}{2^{\pi(k\sqrt{\log k})-1}} \prod_{3\leqslant p\leqslant k\sqrt{\log k}} \left(\left(1+e^{-k\log(\frac{1+1/p}{1-1/p})}\right)\right\}$$

$$=: \prod\nolimits_3 \cdot \prod\nolimits_4.$$

Очеавидно,

$$\frac{1}{2^{k/\sqrt{\log k}}} \ll \prod\nolimits_4 < 1.$$

Далее,

$$\prod\nolimits_3 = e^{-k \sum\limits_{3\leqslant p\leqslant k\sqrt{\log k}} \log(1-1/p)}.$$

Из хорошо известной формулы

$$-\sum_{p\leqslant m} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) = \log_2 m + \gamma + O\Big(\frac{1}{\log m}\Big)$$

и полученных выше оценок сразу следует (12).

Пункт 2) леммы доказывается очевидным переносом на случай $L(1,\chi_{8p})$ комбинаторной техники работы [24], примененной там для трактовки моментов целого порядка величин $L(1,f)$ и $L(1,\mathrm{sym}^2 f)$, f – голоморфная собственная форма Гекке.

Переходим теперь к Ω-результатам. В предположении РГР будем оценивать величины

$$N(M,\alpha) := \#\{p, 3\leqslant p\leqslant M,\ L(1,\chi_{8p})\geqslant \alpha\}, \tag{13}$$

$$N'(M,\alpha) := \#\{p, 3\leqslant p\leqslant M,\ L^{-1}(1,\chi_{8p})\geqslant \alpha\}. \tag{14}$$

Начнем с первой из них. Считаем, что $M\geqslant M_0$. В соответствии с теоремой 3.2), рассматриваем следующий промежуток (интервал равномерности) для порядков k, k – натуральное число: $2\leqslant k\leqslant c_{30}(\log M/\log_2 M)^{1/2} =: l$, где c_{30} – достаточно малая константа. При выводе неравенств для (13) мы используем теорему 3.2) и пункт 2) леммы 6 (пункт 1) был бы достаточен).

Введем величины:

$$\alpha(k) := \left[\frac{M_k}{e}\right]^{1/k} = \log k \cdot e^{\gamma - \log 2} \cdot e^{O(1/\log k)};$$

$$\alpha_-(k) := \log k \cdot e^{\gamma - \log 2} \cdot (1 - C_1/\log k),$$

$$\alpha_+(k) := \log k \cdot e^{\gamma - \log 2} \cdot (1 + C_1/\log k),$$

где здесь и ниже константа $C_1 > 0$ достаточно велика. Легко видеть, что, если $k_1 = ke^{-2C_1}$, то $\alpha_+(k_1) = \alpha_-(k)$. По неравенству Коши,

$$\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant M\\ L(1,\chi_{8p})\geqslant\alpha(l)}} L(1,\chi_{8p})^l \leqslant N(M,\alpha(l))^{1/2}\Big[\sum_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^{2l}\Big]^{1/2}. \qquad (15)$$

С другой стороны,

$$\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant M\\ L(1,\chi_{8p})\geqslant\alpha(l)}} L(1,\chi_{8p})^l = \sum_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^l - \sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant M\\ L(1,\chi_{8p})<\alpha(l)}} L(1,\chi_{8p})^l$$

$$\geqslant \sum_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^l - \alpha(l)^l\cdot(\pi(M)-1). \qquad (16)$$

Из (15), (16) следует, что

$$N(M,\alpha(l)) \geqslant \frac{\Big[\sum\limits_{3\leqslant p\leqslant M,\, L(1,\chi_{8p})\geqslant\alpha(l)} L(1,\chi_{8p})\Big]^2}{\sum\limits_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^{2l}}$$

$$\geqslant \frac{\dfrac{1}{\pi(M)-1}\Big[\sum\limits_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^l - \alpha(l)^l\Big]^2}{\dfrac{1}{\pi(M)-1}\sum\limits_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^{2l}}\cdot(\pi(M)-1)$$

$$=: P_{\alpha(l)}(M)\cdot(\pi(M)-1).$$

По теореме 3. 2),

$$P_{\alpha(l)}(M) \geqslant K \cdot \frac{M_l^2}{M_{2l}},$$

где $K > 0$ – некоторая константа. Используя лемму 6, легко доказать, что

$$\frac{M_l^2}{M_{2l}} \geqslant \exp\Big(-\xi\frac{l}{\log l}\Big),$$

где $\xi > 0$ – некоторая константа. Поэтому

$$N(M,\alpha(l)) \geqslant \pi(M)\cdot\exp\Big(-\xi_1\frac{l}{\log l}\Big).$$

Поскольку $\alpha_-(l) < \alpha(l)$, имеем

$$N(M,\alpha_-(l)) > N(M,\alpha(l)).$$

С другой стороны,

$$\sum_{3\leqslant p\leqslant M} L(1,\chi_{8p})^l \geqslant \sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant M\\ L(1,\chi_{8p})\geqslant\alpha_+(l)}} L(1,\chi_{8p})^l$$

$$\geqslant (\alpha_+(l))^l\cdot N(M,\alpha_+(l)),$$

откуда сразу следует неравенство

$$\pi(M)\exp(-\xi_2 l/\log l) \geqslant N(M,\alpha_+(l)).$$

Взяв $l_1 = le^{-2C_1}$, имеем

$$N(M,\alpha_+(l_1)) = N(M,\alpha_-(l)).$$

Поэтому

$$\pi(M)\exp(-\xi_2 l/\log l) \geqslant N(M,\alpha_-(l)).$$

Тем самым доказана

Теорема 5. *Пусть $M \geqslant M_0$. В предположении* РГР, *имеем*

$$M\exp\Big(-\xi_3(\log M)^{1/2}/(\log_2 M)^{3/2}\Big) \geqslant N(M,\alpha_-(l))$$

$$\geqslant N(M,\alpha(l)) \geqslant M\exp\Big(-\xi_4(\log M)^{1/2}/(\log_2 M)^{3/2}\Big). \tag{17}$$

В частности, для

$$\beta(M) := \frac{e^{\gamma}}{4}\log_2 M \cdot \left(1 - \frac{2\log_3 M}{\log_2 M}\right)$$

имеем

$$N(M,\beta(M)) \geqslant M\exp\Big(-\xi_5(\log M)^{1/2}/(\log_2 M)^{3/2}\Big).$$

Рассмотрим теперь величину (14), где $\alpha = \alpha'(l)$ или $\alpha'_-(l)$,

$$\alpha'(l) := \left[\frac{M_{-l}}{e}\right]^{1/l} = \log l \cdot \frac{e^{\gamma-\log 2}}{\pi^2/8}\cdot e^{O(1/\log l)},$$

$$\alpha'_-(l) := \log l \cdot \frac{e^{\gamma-\log 2}}{\pi^2/8}\cdot(1 - C_2/\log l)$$

и константа $C_2 > 0$ достаточно велика.

Используя теорему 4 и лемму 6. 2), получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $M \geqslant M_0$. В предположении* РГР *имеют место неравенства для $N'(M,\alpha'_-(l))$ и $N'(M,\alpha'(l))$, аналогичные* (17). *В частности, для*

$$\beta'(M) := \frac{e^{\gamma}}{\pi^2/2}\log_2 M \cdot \left(1 - \frac{2\log_3 M}{\log_2 M}\right)$$

имеем

$$N'(M,\beta'(M)) \geqslant M\exp\Big(-\xi_6(\log M)^{1/2}/(\log_2 M)^{3/2}\Big).$$

§3

Интересно сравнить теоремы 5, 6 со следующей гипотезой Монтгомери–Вона [20, гипотеза 1]. Пусть здесь и ниже $\{d\}$ – множество всех фундаментальных дискриминантов, $M \geqslant M_0$. Предполагается:

$$M\exp(-c_0\log M/\log_2 M) > \#\Big\{d, |d| \leqslant M, L(1,\chi_d) \geqslant e^{\gamma}\log_2|d|\Big\}$$
$$> M\exp(-C_0\log M/\log_2 M),$$

где $0 < c_0 < C_0 < \infty$; аналогично, предполагается:

$$M \exp(-c_0' \log M/\log_2 M) > \#\Big\{d, |d| \leqslant M, L^{-1}(1,\chi_d) \geqslant \frac{e^\gamma}{\pi^2/6} \log_2 |d|\Big\}$$

$$> M \exp(-C_0' \log M/\log_2 M),$$

где $0 < c_0' < C_0' < \infty$.

Еще более тружной задачей является получение сходных оценок снизу в случае величин $L^{\pm 1}\Big(1, (\cdot/p)\Big)$.

Опираясь на РГР, Д. Литтлвуд [1] доказал, что

$$\varlimsup_{|d|\to\infty} \frac{L(1,\chi_d)}{\log_2 |d|} \geqslant e^\gamma, \qquad \varlimsup_{|d|\to\infty} \frac{L^{-1}(1,\chi_d)}{\log_2 |d|} \geqslant \frac{e^\gamma}{\pi^2/6}. \tag{18}$$

Доказательства, не зависящие от РГР, позднее предложили С. Човла [2, 3], А. Ф. Лаврик [25], Р. Вон [26] и М. Б. Барбан [5], результат которого является даже более тонким, ибо относится к $L^{\pm}(1, (\cdot/p))$.

В связи с (18), интересны другие гипотезы Монтгомери–Вона [20, гипотезы 2 и 3].

Предполагается:

$$M^\Theta > \#\Big\{d, |d| \leqslant M, L(1,\chi_d) \geqslant e^\gamma \big(\log_2 |d|\big)^{1+1/\log_2 |d|}\Big\} > M^\theta$$

где $0 < \theta < \Theta < 1$;

для любого постоянного $\varepsilon > 0$ множество

$$\Big\{d, |d| \leqslant M, L(1,\chi_d) \geqslant e^\gamma \big(\log_2 |d|\big)^{1+(1+\varepsilon)/\log_2 |d|}\Big\}$$

конечно;

имеют место аналогичные гипотезы, касающиеся $L^{-1}(1,\chi_d)$.

Из сформулированных только что гипотез следуют соотношения

$$\varlimsup_{|d|\to\infty} \frac{L(1,\chi_d)}{\log_2 |d|} = e^\gamma, \qquad \varlimsup_{|d|\to\infty} \frac{L^{-1}(1,\chi_d)}{\log_2 |d|} = \frac{e^\gamma}{\pi^2/6}.$$

В случае $L(1,\chi_{8p})$ методом Барбана можно доказать неравенства

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{L(1,\chi_{8p})}{\log_2 (8p)} \geqslant \frac{e^\gamma}{2}, \qquad \varlimsup_{p\to\infty} \frac{L^{-1}(1,\chi_{8p})}{\log_2 (8p)} \geqslant \frac{e^\gamma}{\pi^2/4}$$

и предположить, что на самом деле имеют место равенства.

Вопрос об усилении теорем 5 и 6 сводится, в частности, к уточнению асимптотических формул теорем 3. 2) и 4. 2). При нахождении асимптотики типа

$$\frac{1}{\pi(M)-1}\sum_{3\leqslant p\leqslant M} L^{\pm k}(1,\chi_{8p}) = M_{\pm k} + o(1) \tag{19}$$

важно получить максимально длинный интервал равномерности по k. В теоремах 3. 2) и 4. 2) интервал равномерности имеет вид

$$0\leqslant k\leqslant l = c_{31}(\log M/\log_2 M)^{1/2}.$$

С подобной проблемой столкнулись и авторы работ [7, 27], в которых (разными методами) выводилась асимптотика суммы

$$\sum_{0<D\leqslant M} L^{iw}(1,\chi), \qquad \chi = \Big(\frac{-D}{\cdot}\Big), \qquad w\in\mathbb{R},$$

где $D=4D_1$ (в [7]) или $-D\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)$, $D\neq D_1^2$ (в [27]); отметим, что при рассмотрении таких последовательностей модулей гипотеза Римана не нужна. Были получены интервалы равномерности

$$0\leqslant |w|\leqslant c_{32}\frac{\log M\cdot\log_3 M}{\log_2 M} \qquad (\text{в [7]}),$$

$$0\leqslant |w|\leqslant c_{33}(\log M/\log_2 M)^{1/2} \quad (\text{в [27]});$$

c_{32}, c_{33} – достаточно малые константы.

К сожалению, каждая из этих работ содержит ошибки. В [7] при доказательстве леммы 5 автор, оценивая сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{|w|}(k^2)}{k^2}\Big(1-e^{-k^2/M}\Big),$$

допускает очевидный просмотр, забывая необходимое ограничение

$$|w|\leqslant c_{34}(\log M/\log_2 M)^{1/2}. \tag{20}$$

В результате, интервал равномерности в [7] сводится к (20).

В [27] на стр. 166 используется ошибочная формула для $d_r(n)$ (правильную формулу см., например, в книге Ивича [9]). Поэтому неверно оцениваются суммы $\sum_1$ и $\sum_2$ (стр. 166 работы [27]).

Связь асимптотик типа (19) с Ω-результатами для $L^{\pm 1}(1,\chi)$ позволяет из предположений типа гипотез Монтгомери–Вона вывести следующее утверждение: для интервала равномерности $0 \leqslant k \leqslant l$ величина l не может превосходить $c_{35}(\log M)^{1+\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 > 0$ – любое постоянное число.

Литература

1. J. E. Littlewood, *On the class-number of the corpus $P\sqrt{-k}$,* Proc. London Math. Soc. (2) **27** (1928), 358–372.
2. S. Chowla, *On the class-number of the corpus $P\sqrt{-k}$,* Proc. Nat. Acad. Sci. India **13** (1947), 197–200.
3. S. Chowla, *Improvement of a theorem of Linnik and Walfish,* Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1949), 423–429.
4. P. T. Bateman, S. Chowla, and P. Erdös, *Remarks on the size of $L(1,\chi)$,* Publ. Math. Debrecen **1**, (1949–50), 165–182.
5. М. Б. Барбан, *Метод "большого решета" и его применения в теории чисел,* Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 51–102.
6. М. Б. Барбан, *"Большое решето" Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратичного поля,* Изв. АН СССР. Сер. мат. **26**, No. 4 (1962), 573–580.
7. А. С. Файнлейб, *О распределении числа классов положительных квадратичных форм,* Науч. тр. Ташкент. ун-т, вып. 418, Ташкент, 1972, с. 272–279.
8. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел,* Мир, М., 1974.
9. A. Ivić, *The Riemann zeta-function,* Wiley, New York etc., 1985.
10. Е. П. Голубева, *Распределение значений L-функций Гекке в точке 1,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 15–32.
11. О. М. Фоменко, *О распределении значений $L(1,\mathrm{sym}^2 f)$,* Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 182–204.
12. C. Hooley, *On the Barban–Davenport–Halberstam theorem: I,* J. Reine Angew. Math. **274/275** (1975), 206–223.
13. К. К. Марджанишвили, *Оценка одной арифметической суммы,* Докл. АН СССР **22**, No. 7 (1939), 391–393.
14. P. D. T. A. Elliott, *On the mean value of $f(p)$,* Proc. London Math. Soc (3) **21** (1970), 28–96.
15. P. D. T. A. Elliott, *The distribution of the quadratic class number,* Лит. мат. сб. **10**, No. 1 (1970), 189–197.
16. A. C. Berry, *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables,* Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 122–136.
17. C. G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions – A mathematical study of the Laplace–Gaussian law,* Acta Math. **77** (1945), 1–125.
18. А. С. Файнлейб, *Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел,* Изв. АН СССР. Сер. мат. **32**, No. 4 (1968), 859–879.
19. Ю. В. Линник, *Разложение вероятностных законов,* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1960.

20. H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Extreme values of Dirichlet L-functions at 1,* Number Theory in Progress, Vol. 2 (Zakopane, Poland, 1997), Gruyter, Berlin etc., 1999, pp. 1039–1052.
21. Е. П. Голубева, *Распределение значений L-функций Дирихле в 1,* (в печати).
22. P. D. T. A. Elliott, *On the distribution of the values of quadratic L-series in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$,* Invent. Math. **21** (1973), 319–338.
23. А. И. Виноградов, *О нулях Зигеля,* Докл. АН СССР **151**, No. 3 (1963), 479–481.
24. E. Royer, *Interprétation combinatoire des moments négatifs des valeurs de fonctions L au bord de la bande critique,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36**, No. 4 (2003), 601–620.
25. А. Ф. Лаврик, *Метод оценок двойных сумм с вещественным квадратичным характером и его приложения,* Изв. АН СССР. Сер. мат. **35**, No. 6 (1971), 1189–1207.
26. R. C. Vaughan, *Small values of Dirichlet L-functions at 1,* Anatytic Number Theory, Vol. 2 (Allerton Park, IL, 1995), Prog. Math., vol. 139, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996, pp. 755–766.
27. Е. Станкус, *Элементарный метод оценки комплексных моментов $L(1, \chi_D)$,* Лит. мат. сб. **22**, No. 2 (1982), 160–170.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 26 июня 2006 г.