Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

А. Ю. Солынин

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина

1. Введение

В данной работе обсуждаются задачи, связанные с аналитическими функциями $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, отображающими единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ в себя. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает множество всех таких функций и пусть $\mathcal{A}_0 = \{\varphi \in \mathcal{A} : \varphi(0) = 0\}$ и $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$. Классы функций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ являются стандартными объектами комплексного анализа. Так, согласно классической лемме Шварца, если $\varphi \in \mathcal{A}_0$ и $0 < |z| < 1$, то выполняются неравенства

$$|\varphi(z)| \leqslant |z|, \qquad |\varphi'(0)| \leqslant 1,$$

знак равенства в каждом из которых имеет место только для вращений $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Важным обобщением леммы Шварца является лемма Пика (другое название — лемма Пика-Шварца): Если $\varphi \in \mathcal{A}$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, то

$$\left|\frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{1 - \varphi(z_1)\overline{\varphi(z_2)}}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2}\right| \tag{1.1}$$

со знаком равенства только для дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, т. е. для функций вида:

$$\varphi_{\alpha,a}(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a} z},$$

где $|a| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена при поддержке NSF, грант DMS-0412908.

Как хорошо известно, геометрически неравенство (1.1) означает, что каждое аналитическое отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является сжимающим в гиперболической метрике. Для единичного круга $\mathbb{D}$ гиперболическая метрика, пусть $\rho(z)$, задается дифференциальным элементом

$$d\rho(z) = \frac{|dz|}{1-|z|^2}. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что гиперболическая метрика имеет постоянную отрицательную кривизну -4 и что гиперболическое расстояние между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ находится по формуле:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |(z_2 - z_1)/(1 - z_1 \bar{z}_2)|}{1 - |(z_2 - z_1)/(1 - z_1 \bar{z}_2)|}.$$

Напомним, что геодезическими гиперболической метрики являются дуги окружностей, ортогональных единичной окружности $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. Далее через (z_1, z_2) будем обозначать открытый интервал гиперболической геодезической, соединяющий точки z_1 и z_2 в $\mathbb{D}$. Область $D \subset \mathbb{D}$ называется *гиперболически выпуклой*, если $(z_1, z_2) \subset D$ для любой пары точек $z_1, z_2 \in D$. При этом D называется *гиперболически строго выпуклой*, если $(z_1, z_2) \subset D$ для любой пары $z_1, z_2 \in \partial D$.

Приведенные выше факты содержатся в большинстве текстов по комплексному анализу, среди которых выделим классическую монографию Г. М. Голузина [1]. Тем интереснее отметить, что в периодической литературе постоянно появляются статьи с новыми задачами о таких функциях. Так, в недавних работах [2] и [3] Д. Мехиа и Х. Поммеренке инициировали изучение *аналитической функции неподвижной точки* (*analytic fixed point function*) для функции φ, а также получили интересные приложения к теории вероятности.

В работе [2] аналитическая функция неподвижной точки для $\varphi \in \mathcal{A}^0$ вводится следующим образом. Пусть $a = \varphi(0) \neq 0$ и пусть

$$F = \{z \in \mathbb{D} : |z| < |\varphi(z)|\}.$$

Согласно теореме 2.1 в [2], множество F является областью в $\mathbb{D}$, звездообразной относительно $z = 0$. Следовательно, существует и единственно конформное отображение $f : \mathbb{D} \to F$, нормированное условиями

$$f(0) = 0, \qquad f'(a)/a > 0. \tag{1.3}$$

Определенную таким образом функцию $z = f(w)$ назовем, следуя Д. Мехиа и Х. Поммеренке, *аналитической функцией неподвижной точки* для функции $\varphi(z)$. Причиной выбора такого названия послужил следующий факт, установленный в [2]: функция $f(w)$ является единственным аналитическим решением функционального уравнения

$$w\varphi(f(w)) = f(w), \quad w \in \mathbb{D}, \tag{1.4}$$

которое удовлетворяет условиям (1.3). Уравнение (1.4) означает, что при фиксированном $w \in \mathbb{D}$ значение $f(w)$ является неподвижной точкой функции $\varphi_w(z) = w\varphi(z)$. Как отмечено в [2], эта неподвижная точка является единственной в $\mathbb{D}$ и притягивающей, что влечет сходимость итераций: $\varphi_w^{(n)}(z) \to f(w)$ для любого $z \in \mathbb{D}$ при $n \to \infty$. Здесь $\varphi_w^{(n)}$ обозначает n-ую итерацию функции φ_w.

Интерес к аналитической функции неподвижной точки возник из-за возможных приложений к теории вероятности. Так, если функция φ имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{где} \quad a_0 = a > 0, \quad a_k \geqslant 0 \text{и} \quad \varphi(1) = 1,$$

то φ является порождающей функцией для случайной величины X со значениями в $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и распределением вероятностей: $P(X = k) = a_k$ для $k \in \mathbb{N}_0$.

Как известно, см. [2, 3], многие интересные вероятностные процессы могут быть интерпретированы в терминах аналитической функции неподвижной точки $f(w)$, а многие полезные вероятности могут быть выражены в терминах тейлоровских коэффициентов функции $f(w)$, ее производных или их комбинаций. Поэтому всевозможные неравенства для комбинаций таких коэффициентов позволяют находить явные и эффективные оценки для вероятностей. С другой стороны, известные оценки коэффициентов определяются принадлежностью функции тому или иному классу, среди которых выделим классы звездных и выпуклых функций, см. [1]. В случае ограниченных аналитических функций важным и сравнительно хорошо изученным является подкласс гиперболически выпуклых функций, рассматривавшийся в работах [4, 5, 6].

В [2] Д. Мехиа и Х. Поммеренке сформулировали несколько открытых проблем, центральной из которых являлась задача о гиперболической выпуклости области F, см. [2, задача 1].

Решение этой задачи получено автором в [7], где показано, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{A}^0$ соответствующая область F гиперболически выпукла. Более того, F гиперболически строго выпукла, если φ не является дробно-линейным автоморфизмом круга $\mathbb{D}$. Таким образом, все известные результаты о гиперболически выпуклых функциях могут быть использованы при изучении аналитической функции неподвижной точки и в ее приложениях к теории вероятности. Например, используя изопериметрическое неравенство Б. Браун-Флинн [8], получаем следующую оценку периметра: length $(\partial F) \leqslant \pi^2$. Отсюда следует, что $f' \in H$, т. е. f' принадлежит хорошо изученному классу Харди.

Выше мы дали краткий обзор по известным результатам об аналитической функции неподвижной точки. В §2 мы приведем простое доказательство существования функции $f(w)$, обратной к $g(z)$ в $\mathbb{D}$, а также докажем некоторые свойства области F и рассмотрим некоторые примеры. В §3 рассматривается несколько экстремальных задач, связанных с римановыми поверхностями функций $f(w)$. В заключительном параграфе мы обсудим гипотезу о локальном поведении функции $f(w)$ в точках единичной окружности.

2. Существование обратной функции и геометрические свойства границы области F

Мы начнем с того, что приведем более простое доказательство существования функции $f(w)$, которое не использует звездообразности множества F. Следуя работе [2], введем функцию $g(z) = z/\varphi(z)$. Из (1.4) следует, что $g(z)$ является обратной для функции $f(w)$ в соответствующих областях однолистности.

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}^0$ и пусть $g(z) = z/\varphi(z)$. Тогда для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует и единственно $z \in \mathbb{D}$ такое, что $g(z) = w$.*

Доказательство. Отметим, что в общем случае $g(z)$ является мероморфной функцией с единственным нулем (кратности 1) в точке $z = 0$. Выберем $0 < r < 1$, достаточно близкое к 1 и такое, что $\varphi(z) \neq 0$ для всех $z \in C_r := \{z : |z| = r\}$. Пусть $\gamma_r = g(C_r)$. Тогда $|g(z)| = r/|\varphi(z)| \geqslant r$ для всех $z \in C_r$. Отсюда следует, что круг

$\mathbb{D}_r := \{w : |w| < r\}$ принадлежит некоторой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma_r$.

Для фиксированного w, $|w| < r$, пусть $N_r(w)$ обозначает число нулей функции $g(z) - w$ в круге $\mathbb{D}_r$ и пусть P_r обозначает число полюсов функции $g(z) - w$, которое в данном случае не зависит от w, в круге $\mathbb{D}_r$. По принципу аргумента,

$$N_r(w) - P_r = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_r} d \arg(g(z) - w). \tag{2.1}$$

Так как $|g(z)| \geqslant r > |w|$ для всех $z \in C_r$, то правая часть в (2.1) постоянна при фиксированном r и $|w| < r$. Отсюда заключаем, что $N_r(w)$ является константой при указанных условиях. Так как $N_r(0) = 1$, то $N_r(w) = 1$ для всех $w \in \mathbb{D}_r$. Так как $0 < r < 1$ может быть выбрано произвольно близким к 1, то утверждение леммы доказано. $\bullet$

Лемма 2.1 позволяет выявить некоторые полезные свойства римановой поверхности $\mathcal{R}_g := g(\mathbb{D})$. Во-первых, $\mathcal{R}_g$ осуществляет полное однократное накрытие единичного круга. Далее через $\mathcal{R}_0$ будем обозначать часть $\mathcal{R}_g$, лежащую над $\mathbb{D}$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{R}_g$ не имеет (внутренних) точек ветвления над единичной окружностью $\mathbb{T}$. Отсюда получаем следующий результат, доказанный несколько иным способом в [2].

Следствие 2.1. *Каждая связная компонента граничного множества $\mathbb{D} \cap \partial F$ является открытой аналитической дугой с концевыми точками на $\mathbb{T}$.*

Пусть $w_0 = e^{i\theta_0} \notin \mathcal{R}_g$. Тогда w_0 может рассматриваться как граничная точка поверхности $\mathcal{R}_g$, достижимая из $\mathcal{R}_0$. При $0 < \varepsilon \leqslant 2$ пусть $\gamma(\theta_0, \varepsilon)$ обозначает максимальную открытую дугу, лежащую на поверхности $\mathcal{R}_g$ над окружностью $\{w : |w - e^{i\theta_0}| = \varepsilon\}$ и такую, что $\gamma(\theta_0, \varepsilon) \cap \mathcal{R}_0 \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{R}_g$ имеет только один лист над кругом $\mathbb{D}$, то при $0 < \varepsilon < 2$ имеем следующее неравенство:

$$\operatorname{an.meas}(\gamma(\theta_0, \varepsilon)) \leqslant 3\pi + 2 \arcsin(\varepsilon/2), \tag{2.2}$$

где через $\operatorname{an.meas}(\cdot)$ обозначается угловая мера соответствующей дуги.

Дифференцируя функцию $w = g(z) = z/\varphi(z)$, находим

$$dw = \frac{\varphi(z) - z\varphi'(z)}{\varphi^2(z)} \, dz.$$

Отсюда получаем следующее уравнение в квадратичных дифференциалах:

$$-\frac{dw^2}{w^2} = -\frac{(\varphi(z) - z\varphi'(z))^2}{z^2\varphi^2(z)}\,dz^2 := Q(z)\,dz^2. \tag{2.3}$$

В качестве источников, содержащих необходимые сведения по теории квадратичных дифференциалов, мы рекомендуем монографии Дж. Дженкинса [9] и Г. В. Кузьминой [10]. Отметим, что использование квадратичных дифференциалов в данном контексте интересно, но не является необходимым и отражает пристрастие автора.

Так как круг $\mathbb{D}$ является круговой областью квадратичного дифференциала $-w^{-2}\,dw^2$, из (2.3) следует, что F является круговой областью $Q(z)\,dz^2$. Следовательно, каждая связная компонента множества $\mathbb{D} \cap \partial F$ является траекторией этого квадратичного дифференциала.

Если дополнительно предположить, что функция φ является аналитической в граничной точке $e^{i\beta} \in \partial F$, то в достаточно малой окрестности этой точки граница ∂F состоит из двух дуг на траекториях квадратичного дифференциала $Q(z)\,dz^2$, выходящих из точки $e^{i\beta}$. Так как все нули квадратичного дифференциала (2.3) имеют четный порядок, то возможные значения внутреннего угла границы ∂F в точке $e^{i\beta}$ задаются дискретной последовательностью π/k, $k = 1, 2, \ldots$; см. [9, теорема 3.2]. Соответственно, в окрестности точки $e^{i\beta}$ функция $g(z)$ представляется в виде

$$g(z) = A(z - e^{i\beta})^{2k}(1 + h(z)),$$

где $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, $h(0) = 0$, а функция $h(z)$ является аналитической в точке $e^{i\beta}$.

Теперь из неравенства (2.2) следует, что для рассматриваемых углов возможны только три значения: π, $\pi/2$ и $\pi/3$. В случае, когда φ является конечным произведением Бляшке, эти возможные значения углов были указаны в примере 4.1 в [2]. Как показывают приведенные ниже примеры функций (2.7) и (2.11), все три возможные значения углов действительно реализуются.

Для конечного произведения Бляшке

$$B(z) = e^{i\alpha} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}, \tag{2.4}$$

где $n \geqslant 1$, $0 < |a_k| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, квадратичный дифференциал (2.3) принимает вид

$$-\frac{dw^2}{w^2} = -\left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{z-1/\bar{a}_k}\right)\right)^2 dz^2 := Q_B(z)\,dz^2. \tag{2.5}$$

Точка $z = 0$ и каждая из точек $z = a_k$ являются полюсами второго порядка, лежащими в круговой области квадратичного дифференциала (2.5). При этом Q_B-длина траекторий, лежащих в каждой из круговых областей, равна $2\pi n_k$, где через n_k обозначено число слагаемых вида $1/(z-a_k)$ в сумме в правой части формулы (2.5).

В каждой связной компоненте множества $\mathbb{D} \setminus \partial F$ должна находиться хотя бы одна из точек a_k, поэтому для произведения Бляшке (2.4) множество $\mathbb{D} \cap \partial F$ содержит не более чем n аналитических дуг.

При $\alpha = 0$, $n = 1$ и $a_1 = -a$, где $0 < a < 1$, функция (2.4) задает дробно-линейный автоморфизм, пусть φ_a, единичного круга:

$$\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+az}, \quad 0 < a < 1. \tag{2.6}$$

Этот пример подробно рассмотрен в [5], см. также пример 3.1 в [2]. Для функции (2.6) область $F := F_a$ является гиперболической полуплоскостью:

$$F_a = \{z \in \mathbb{D} : |z + a^{-1}| > a^{-1}\sqrt{1-a^2}\},$$

а конформное отображение $k_a : \mathbb{D} \to F_a$, нормированное условиями $k_a(0) = 0$, $k_a'(0) > 0$, имеет вид

$$k_a(w) = (2a)^{-1}\left(w - 1 + \sqrt{(w-1)^2 + 4a^2 w}\right) = aw + \cdots. \tag{2.7}$$

В рассматриваемом случае функция

$$g_a(z) = \frac{z}{\varphi_a(z)} = \frac{z(1+az)}{z+a} \tag{2.8}$$

отображает круг $\mathbb{D}$ конформно и однолистно на область $D(s(a))$, где $D(s) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{i\theta} : |\theta| \leqslant s\}$, $0 < s < \pi$ и $s(a) = 2\arcsin a$.

Функция k_a является экстремальной во многих задачах в классе $K_h(a)$, $0<a<1$, состоящем из всех гиперболически выпуклых и однолистных в круге $\mathbb{D}$ функций f, нормированных условиями:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=a.$$

Например, согласно теореме 7 в [5], для $f\in K_h(a)$, где $0<a<1$, и любого $z\in C_r$ выполняются неравенства

$$-k_a(-r)\leqslant |f(z)|\leqslant k_a(r). \tag{2.9}$$

Хотя случаи, в которых в неравенствах (2.9) достигается знак равенства, в работе [5] не обсуждались, нетрудно показать, что равенство в каком-нибудь из этих неравенств имеет место только для вращений функции k_a. Таким образом, теорема 1 о гиперболической выпуклости области F, доказанная в [7], показывает, что (2.9) выполняются для любой аналитической функции неподвижной точки $f(w)$ такой, что $|f'(0)|=a$. В теореме 3.1 работы [2] этот результат был установлен без использования гиперболической выпуклости функции $f(w)$.

Еще один полезный пример дает двучленное произведение Бляшке

$$B_2(z)=\frac{z^2+1/3}{1+(1/3)z^2}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае функция

$$g_2(z)=z/B_2(z)=\frac{z(z^2+3)}{1+3z^2} \tag{2.10}$$

отображает круг $\mathbb{D}$ на риманову поверхность $\mathcal{R}_{g_2}$, полученную подклеиванием двух экземпляров внешности единичного круга $\mathbb{D}^*:=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ к кругу $\mathbb{D}$ вдоль верхней и нижней полуокружностям окружности $\mathbb{T}$, соответственно. Таким образом, $\mathcal{R}_{g_2}$ имеет точки ветвления в точках $w=\pm1$, а аналитическая функция неподвижной точки, $f_2=g_2^{-1}$, имеет вид

$$f_2(w)=\frac{\sqrt{[3]1+w}-\sqrt{[3]1-w}}{\sqrt{[3]1+w}+\sqrt{[3]1-w}}=1+2^{2/3}(w-1)^{1/3}+o((w-1)^{1/3}), \tag{2.11}$$

где $\sqrt{[3]-1}=-1$. При этом f_2 отображает $\mathbb{D}$ однолистно на круговую луночку $F_2\subset\mathbb{D}$, симметричную относительно вещественной оси и образующую внутренний угол $\pi/3$ в вершинах $z=1$ и $z=-1$.

3. Подчинение и экстремальные задачи

Пусть $f(w) = aw + \cdots$ – аналитическая функция неподвижной точки, соответствующая функции $\varphi \in \mathcal{A}^0$, где $\varphi(0) = a$, $0 < |a| < 1$. Как доказано в теореме 3.1 работы [2], выполняется подчинение

$$\varphi(f(w)) = f(w)/w \prec \varphi_a(k_a(w)) = k_a(w)/w.$$

Напомним, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция $h(z)$ подчиняется в $\mathbb{D}$ функции $H(z)$, если $h(0) = H(0)$ и существует аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ такая, что $h(z) = H(\omega(z))$ при $z \in \mathbb{D}$. Для отношения подчинения используется следующее обозначение: $h \prec H$.

Как известно, отношение подчинения между функциями влечет много важных неравенств для различных функционалов, см. [11, §2.8].

В этом параграфе мы покажем как построить подчиняющие функции для $g(z) = z/\varphi(z)$ по граничным точкам области $F := F_g$, лежащим над $\mathbb{T}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}^0$ и пусть $\#(\mathbb{T} \setminus \mathcal{R}_g) \geqslant 2$, т. е. множество $\mathbb{T} \setminus \mathcal{R}_g$ содержит не менее двух точек. Тогда пересечение $\mathcal{R}_g \cap \mathbb{T}$ состоит из не более чем счетного числа открытых дуг $L_1, L_2, \ldots$ Вдоль каждой из дуг L_k мы подклеим внешность круга $\mathbb{D}^*$ к единичному кругу $\mathbb{D}$. Пусть $\widehat{\mathcal{R}}$ обозначает полученную таким образом риманову поверхность. Отметим, что при условии $\#(\mathbb{T} \setminus \mathcal{R}_g) \geqslant 2$ поверхность $\widehat{\mathcal{R}}$ является гиперболической односвязной поверхностью, имеющей ровно один лист над $\mathbb{D}$.

Пусть $G : \mathbb{D} \to \widehat{\mathcal{R}}$ – универсальное накрытие поверхности $\widehat{\mathcal{R}}$ кругом $\mathbb{D}$ такое, что $G(0) = 0$, $G'(0) > 0$. Тогда обратное отображение $G^{-1} : \widehat{\mathcal{R}} \to \mathbb{D}$ однолистно на $\widehat{\mathcal{R}}$. Отсюда следует, что функция $\omega(z) := G^{-1}(g(z))$ продолжима по любому пути в $\mathbb{D}$, значит, по теореме о монодромии она может рассматриваться как однозначная в $\mathbb{D}$ функция. Так как $|\omega(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{D}$ и $\omega(0) = 0$, то мы имеем $g(z) = G(\omega(z))$, т. е. функция g подчинена функции G в $\mathbb{D}$.

Построенная выше риманова поверхность $\widehat{\mathcal{R}}$ может иметь бесконечное число листов над $\mathbb{D}^*$. Таким же образом можно построить конечнолистные подчиняющие поверхности. Для этого предположим, что дополнение $\mathbb{T} \setminus \mathcal{R}_g$ содержит множество точек $A = \{e^{i\tilde{\theta}_k}\}_{k=1}^N$. Здесь $0 \leqslant \tilde{\theta}_k < 2\pi$, а N — конечное число $\geqslant 2$ или $N = \infty$.

Пусть $A_n = \{e^{i\tilde{\theta}_k}\}_{k=1}^n$, где $2 \leqslant n \leqslant N$. Упорядочим множество A_n по возрастанию аргументов его точек. В результате имеем: $A_n = \{e^{i\theta_{k,n}}\}_{k=1}^n$, где

$$0 \leqslant \theta_{1,n} < \theta_{2,n} < \cdots < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n} := \theta_{1,n} + 2\pi.$$

Пусть $l_{k,n}$ обозначает открытую дугу $\{e^{i\theta} : \theta_{k,n} < \theta < \theta_{k+1,n}\}$. Для каждого $n \geqslant 2$ через $\mathcal{R}_n$ обозначаем риманову поверхность, содержащую один лист, пусть $\mathcal{R}_0$, над $\mathbb{D}$ и n листов, пусть $\mathcal{R}^{1,n}, \ldots, \mathcal{R}^{n,n}$, над $\mathbb{D}^*$. При этом считаем, что лист $\mathcal{R}^{k,n}$ подклеен к $\mathcal{R}_0$ вдоль дуги $l_{k,n}$.

При $n \geqslant 2$ $\mathcal{R}_n$ является односвязной гиперболической римановой поверхностью. Поэтому, как и, выше существует накрывающее отображение $G_n : \mathbb{D} \to \mathcal{R}_n$ такое, что $G_n(0) = 0$ и $G_n'(0) > 0$. Если $2 \leqslant m < n \leqslant N$, то функция $\omega_{m,n}(z) := G_m^{-1}(G_n(z))$ аналитически продолжается по любому пути в $\mathbb{D}$, следовательно, по теореме о монодромии может рассматриваться как однозначная в $\mathbb{D}$. Тогда $G_n(z) = G_m(\omega_{m,n}(z))$, значит, $G_n \prec G_m$ в $\mathbb{D}$. Таким образом, отношение подчинения "$\prec$" определяет "частичный порядок" на множестве всех накрывающих поверхностей, построенных как указано выше для фиксированной функции φ. Таким образом, для каждого фиксированного выше множества A и n такого, что $2 \leqslant n < N$, имеем:

$$g \prec G \prec G_N \prec \cdots \prec G_{n+1} \prec G_n \prec \cdots \prec G_2.$$

В частности, из принципа подчинения (см. [11, теорема 2.21]) получаем неравенства:

$$|g'(0)| \leqslant |G'(0)| \leqslant |G_N'(0)| \leqslant \cdots \leqslant |G_{n+1}'(0)| \leqslant |G_n'(0)| \leqslant \cdots \leqslant |G_2'(0)|.$$

Функция G_2 может быть представлена в виде суперпозиции $G_2 = \varphi_1 \circ g_2 \circ \varphi_2$, где g_2 определена в (2.10), а φ_1 и φ_2 – подходящие дробно-линейные автоморфизмы единичного круга. Функция G_3 также может быть найдена в явном виде. Так как G_n отображает $\mathbb{D}$ на круговой неоднолистный многоугольник, то при $n \geqslant 4$ нахождение явного вида функции G_n не представляется возможным. Поэтому при фиксированном $n \geqslant 2$ представляют интерес оценки функционалов, связанных с отображениями G_n. В некоторых случаях экстремальной будет конфигурация, соответствующая симметричному множеству $A_n^* := \{e^{2\pi ik/n}\}_{k=0}^{n-1}$. Далее через $\mathcal{R}_n^*$ будем обозначать риманову поверхность, построенную как указано выше для множества A_n^*, а через G_n^* будем обозначать накрывающее отображение поверхности $\mathcal{R}_n^*$ кругом $\mathbb{D}$.

Ниже мы приводим три теоремы об экстремальных свойствах накрывающих отображений.

Теорема 3.1. *Пусть $2 \leqslant n < \infty$ и пусть функция $G_n(z)$ сооответствует множеству $A = \{e^{i\theta_k}\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$|G_n'(0)| \geqslant |(G_n^*)'(0)| = \frac{n+1}{n-1}. \tag{3.1}$$

Знак равенства достигается в (3.1) только в том случае, когда A совпадает с A_n^* с точностью до вращения вокруг начала.

Легко видеть, что теорема 3.1 является частным случаем теоремы 2, доказанной автором в [12]. Отметим, что доказательство этой теоремы в [12] использует обобщение *диссимметризации* Дубинина, см. [13, §6], на случай римановых поверхностей типа $\mathcal{R}_n$.

Теорема 3.2. *Пусть $A = \{e^{i\theta_k}\}_{k=1}^n$, $2 \leqslant n < \infty$ и пусть $2\alpha\pi = \max(\theta_k - \theta_{k-1})$ обозначает максимальный угловой зазор между точками множества A. Если $\alpha \leqslant 1/m$, где $2 \leqslant m \leqslant n$, то*

$$|G_n'(0)| \leqslant |(G_m^*)'(0)| = \frac{m+1}{m-1}. \tag{3.2}$$

Знак равенства в (3.2) имеет место только в том случае, когда A является вращением множества A_m^* вокруг начала.

Доказательство. Отрезки $[0, e^{i\theta_k}]$, $k = 1, \dots, n$, разбивают поверхность $\mathcal{R}_n$ на n круговых треугольников T_k. Здесь T_k – неограниченная односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой состоит из отрезков $[0, e^{i\theta_k}]$, $[0, e^{i\theta_{k+1}}]$ и круговой дуги $\{e^{i\theta} : \theta_{k+1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k + 2\pi\}$. Далее T_k будет рассматриваться как топологический треугольник с вершинами $e_{0,k} = 0$, $e_{1,k} = e^{i\theta_k}$ и $e_{2,k} = e^{i\theta_{k+1}}$. Через $m(T_k) := m(T_k; e_{0,k}|e_{1,2}, e_{2,k})$ будем обозначать приведенный модуль треугольника T_k относительно вершины $e_{0,k} = 0$. Определение и свойства приведенного модуля треугольника смотри в работе [14]. Пусть $2\alpha_k\pi$ обозначает угол T_k при вершине $e_{0,k} = 0$. Тогда

$$0 < \alpha_k \leqslant 1/n, \qquad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1. \tag{3.3}$$

Явное выражение для приведенного модуля $m(T_k)$ находится по формуле

$$m(T_k) = \frac{1}{2\alpha_k \pi} \log \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k},$$

которая является частным случаем формулы (2.5) в [12].

Применяя теорему 1.5 [14] о разбиении односвязной области на систему треугольников, получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \log |G_n'(0)| = m(\mathcal{R}_n, 0) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 m(T_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}, \tag{3.4}$$

где через $m(\mathcal{R}_n, 0)$ обозначен приведенный модуль поверхности $\mathcal{R}_k$ относительно точки $w = 0$, см. [9, с. 41].

Пусть $\psi(\alpha) = \alpha \log[(1+\alpha)/(1-\alpha)$. Так как $\psi''(\alpha) = 4(1-\alpha^2)^{-2} > 0$, то ψ является строго выпуклой функцией при $0 < \alpha < 1$. В терминах теории мажоризации (см. [15]) соотношения (3.3) означают, что вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ мажоризируется вектором $(1/m, \dots, 1/m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, где число ненулевых координат равно m. Поэтому, применяя мажоризационное неравенство Харди, Литтлвуда и Полиа, см., например, неравенство (1) в [15, глава 1.A], заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \leqslant \log \frac{m+1}{m-1}$$

со знаком равенства только в том случае когда вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ совпадает с вектором $(1/m, \dots, 1/m, 0, \dots, 0)$ с точностью до перестановки координат. Объединяя последнее неравенство с неравенством (3.4), получаем требуемое утверждение. $\bullet$

В теоремах 3.1 и 3.2 оценка для $|G_n'(0)|$ зависела от числа выпускаемых точек окружности $\mathbb{T}$. Применяя круговую симметризацию, легко получить оценки, зависящие от меры выпускаемого подмножества $\mathbb{T}$.

Теорема 3.3. *Пусть риманова поверхность $\widehat{\mathcal{R}}$ и функция $G : \mathbb{D} \to \widehat{\mathcal{R}}$ построены для функции φ, как это указано выше. Пусть $0 < 2s =$* length, *$(\mathbb{T} \setminus \mathcal{R}) < 2\pi$, $a = \sin(s/2)$, и пусть функция $g_a(z)$ определена по формуле (рм(2.8). Тогда для каждой выпуклой неубывающей* *функции* $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и каждого* $0<r<1$ *выполняются неравенства*

$$\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\log|g(re^{i\theta})|)\,d\theta\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\log|G(re^{i\theta})|)\,d\theta \leqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\log|g_a(re^{i\theta})|)\,d\theta. \tag{3.5}$$

В качестве предельного случая имеем неравенства:

$$|g'(0)|\leqslant|G'(0)|\leqslant|g_a'(0)|. \tag{3.6}$$

Равенство в первом соотношении в каждом из неравенств (3.5) *и* (3.6) *достигается только при условии* $g=G$. *Равенство во втором неравенстве в* (3.6), *а для строго выпуклой функции* Φ *и во втором неравенстве в* (3.5) *достигается только в том случае, когда* $G(z)=e^{i\beta}g_a(e^{i\alpha}z)$ *при некоторых* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Первые неравенства в (3.5) и (3.6) являются следствиями подчинения, см. теоремы 2.21 и 2.23 в [11]. Второе неравенство в (3.6) выражает классический принцип симметризации (см. [16, теорема 4.9]), а второе неравенство в (3.5) представляет собой специализацию известных результатов А. Баернстайна II о $*$-функции и интегральных средних, см. [17].

4. Локальное поведение в граничной точке

В этом параграфе мы сформулируем проблему о строении области F в окрестности граничной точки $z_0\in\partial F\cap\mathbb{T}$. Пусть $\varphi\in\mathcal{A}^0$ и пусть f – аналитическая функция неподвижной точки для функции φ. При изучении свойств области $F=f(\mathbb{D})$ в окрестности точки $w_0\in\mathbb{T}$ такой, что $z_0=f(w_0)$, мы можем считать, что $w_0=z_0=1$. Действительно, заменяя $\varphi(z)$ на $\bar w_0\bar z_0\varphi(\bar w_0 z)$ и $f(w)$ на $\bar w_0 f(z_0 w)$, приходим к указанному выше случаю.

Пусть $w_0=1\in\mathcal{R}_g$ и пусть $\gamma(\varepsilon):=\gamma(0,\varepsilon)$ – дуга на поверхности $\mathcal{R}_g$, определенная в §2. Тогда, согласно (2.2), имеем: $\operatorname{an.meas.}(\gamma(\varepsilon))\leqslant 3\pi+2\arcsin(\varepsilon/2)$. В частности, предельный угловой размер дуги $\gamma(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству:

$$\gamma_0:=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\operatorname{an.meas.}(\gamma(\varepsilon)))\leqslant 3\pi. \tag{4.1}$$

Через $\hat{\gamma}(\varepsilon)=\gamma(\varepsilon)\cap\mathbb{D}$ обозначим часть дуги $\gamma(\varepsilon)$, лежащую над кругом $\mathbb{D}$. Очевидно, что

$$\hat{\gamma}_0 := \lim_{\varepsilon\to 0+}(\text{an. meas}.(\hat{\gamma}(\varepsilon))) = \pi. \tag{4.2}$$

Пусть $\delta(\varepsilon)=g^{-1}(\gamma(\varepsilon))$. Тогда $\delta(\varepsilon)$ является открытой дугой в $\mathbb{D}$, имеющей концевые точки, пусть $e^{i\theta_+(\varepsilon)}$ и $e^{i\theta_-(\varepsilon)}$, где $\theta_+(\varepsilon)>0$, $\theta_-(\varepsilon)<0$, на окружности $\mathbb{T}$ и отделяющей в $\mathbb{D}$ точку $z=1$ от центра круга $z=0$.

Пусть $\Delta(\arg(\delta(\varepsilon))$ обозначает изменение аргумента при движении точки вдоль $\delta(\varepsilon)$ от точки $e^{i\theta_+(\varepsilon)}$ к точке $e^{i\theta_-(\varepsilon)}$. Тогда

$$\delta_0 := \lim_{\varepsilon\to 0+}\Delta\,(\arg(\delta(\varepsilon)) = \pi. \tag{4.3}$$

Пусть $\hat{\delta}=g^{-1}(\hat{\gamma}(\varepsilon))=f(\hat{\gamma}(\varepsilon))$ и пусть

$$\hat{\delta}_0 := \liminf_{\varepsilon\to 0+}\Delta(\arg(\hat{\delta}(\varepsilon)), \tag{4.4}$$

где через $\Delta(\arg(\hat{\delta}(\varepsilon))$ обозначено изменение аргумента при движении точки вдоль $\hat{\delta}(\varepsilon)$.

Так как рассматриваемые отображения обладают некоторой “граничной конформностью,” то можно предположить, что предельные угловые размеры дуг, определенных формулами (4.1)–(4.4), должны удовлетворять следующим условиям пропорциональности:

$$\hat{\gamma}_0/\gamma_0 \leqslant 1/3 \leqslant \hat{\delta}_0/\delta_0 = \hat{\delta}_0/\pi. \tag{4.5}$$

Во всех известных нам примерах соотношения (4.5) выполняются. В несколько усиленной форме наше предположение можно сформулировать следующим образом.

Проблема об угле Штольца раствора $\pi/3-\varepsilon$. Доказать, что для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ и для каждой точки $e^{i\theta}\in\partial F$ существует круговой сектор S раствора $\pi/3-\varepsilon>0$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ такой, что $S\subset F$.

Отметим, что сформулированная выше проблема является уточненным количественным выражением задачи 4 в [2], в которой спрашивается, является ли граница ∂F области F квазиокружностью.

Пример функции (2.11) из §2 показывает, что угол раствора $\pi/3$ является максимально возможным при условиях сформулированной выше проблемы.

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-ое изд., М., 1966.
2. D. Mejía, Ch. Pommerenke, *The analytic point function in the disc*, Comput. Methods Funct. Theory **5**, no. 2 (2005), 275–299.
3. D. Mejía, Ch. Pommerenke, *The analytic point function. II*, Preprint.
4. R. W. Barnard, K. Pearce, G. B. Williams, *Three extremal problems for hyperbolically convex functions*, Comput. Methods Funct. Theory **4** (2004), no. 1, 97–109.
5. W. Ma, D. Minda, *Hyperbolically convex functions*, Ann. Polon. Math. **60** (1994), 81–100.
6. D. Mejía, Ch. Pommerenke, *On hyperbolically convex functions*, J. Geom. Analysis **10** (2000), 365–378.
7. A. Yu. Solynin, *Hyperbolic convexity and the analytic fixed point function*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**, —лат но. 4 (2007), 1181–1186.
8. B. Brown Flinn, *Hyperbolic convexity and level sets of analytic functions*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 831-841.
9. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
10. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
11. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, Vol. 1, Academic Press, 1976.
12. A. Yu. Solynin, *Some extremal problems on the hyperbolic polygons*, Complex Variables Theory Appl. **36** (1998), 207–231.
13. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49** (1994), 3-76.
14. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы*, Алгебра и анализ **11**, no. 1, (1999), 3–86.
15. A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, New York, 1979.
16. W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Second ed. Cambridge Tracts in Math., 110. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
17. A. Baernstein II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization*, Acta Math. **133** (1974), 139–169.

Department of Mathematics and Statistics,
Texas Tech University
Lubbock, Texas 79409,
U.S.A.

E-mail: alex.solynin@ttu.edu

Поступило 21 июля 2006 г.