Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

**О. В. Сильванович, Н. А. Широков**

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ПОЛУОСИ

**1**. В данной работе мы формулируем теорему о возможной скорости аппроксимации на некотором множестве $E$ гладких функций целыми функциями порядка $1/2$ из определенного класса, а также приводим алгоритм их построения.

Пусть $E$ – подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}^+ = [0;\infty)]$, состоящее из конечного числа дизъюнктных отрезков $I_1 = [0, b_1], \dots, I_k = [a_k, b_k]$ и луча $I_{k+1} = [a_{k+1}, \infty)]$, где $0 = a_1 < b_1 < \dots < b_k < a_{k+1}$, $k \geqslant 1$.

Приведем также ряд определений.

Пусть $r \geq 0$ – целое число, $\omega(x)$ – модуль непрерывности на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^y \frac{\omega(x)}{x}dx + y\int\limits_y^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}dx \leqslant C_0\omega(y), \quad y > 0;$$

$H^r_\omega(E)$ – пространство комплекснозначных функций $f$ на множестве $E$, удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leqslant C_f\,\omega(|x-y|), \quad x, y \in E,$$

с нормой

$$\|f\|_{r,\omega} = |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{r} |f^{(\nu)}(0)| + \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{\omega(|x-y|)};$$

$C^{(r,\omega}_\sigma$, $\sigma > 0$, – класс целых функций $F$ порядка $1/2$ и типа $\sigma$ с нормой

$$\|F_\sigma\|_{C^{(r,\omega)}_\sigma} \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+} \frac{|F(z)|\cdot e^{-\sigma|\operatorname{Im}\sqrt{z}|}}{(1 + |z|^r\omega(|z|) + \frac{1}{\sigma^{2r}}\omega(\frac{1}{\sigma^2}))} < \infty.$$

**2**. Для определения шкалы приближений с помощью целых функций из класса $C^{(r,\omega)}_\sigma$ будем использовать следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Существует единственная гармоническая в* $\mathbb{C}\setminus E$ *функция* $\varphi$, *удовлетворяющая условиям*

$$\varphi_E(z) > 0, \quad \varphi_E(z) \to 0 \quad \textit{при} \quad z \to z_0, z_0 \in E,$$

$$\varphi_E(z) \leqslant c(1+|z|^{1/2}), \quad \varphi_E(x)\cdot|x|^{-1/2} \to 1 \quad \textit{при} \quad x \to -\infty.$$

Далее полагаем

$$L_h = \{z \in \mathbb{C}\setminus E : \varphi_E(z) = h\}, \quad h > 0,$$

$$\rho_h(z) = \operatorname{dist}(z, L_h)$$

и приводим формулировку теоремы.

**Теорема.** *Пусть* $f \in H_\omega^{(r)}(E)$. *Тогда для любого* $\sigma > 0$ *найдется целая функция* $F_\sigma \in C_\sigma^{(r,\omega)}$ *такая, что*

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} \leqslant c_1\|f\|_{r,\omega}$$

*и*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_2\|f\|_{r,\omega}\rho^r_{1/\sigma}(x)\omega(\rho_{1/\sigma}(x)), x \in E,$$

*где постоянные* $c_1$, $c_2 > 0$ *зависят только от* $r$, $\omega$ *и* $E$.

Аналогичная теорема была доказана ранее [1] для $E = \mathbb{R}^+$, $r = 0$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

**Замечание.** Класс целых функций $C_\sigma^{(r,\omega)}$ и величины $\rho_h(z)$ при рассмотрении приближения функций из класса $H_\omega^{(r)}(E)$ на неограниченном множестве $E$ играют роль, аналогичную множеству многочленов и расстояниям $\rho^*_{1/n}(z,E)$ до линий уровня функции Грина множества $E$ в том случае, когда $E$ – компакт и речь идет о конструктивном описании соответствующих классов $H_\omega^{(r)}(E)$ в терминах полиномиальных приближений. Собственно, в этом и состоит утверждение сформулированной выше теоремы.

**3**. Перейдем к описанию конструкции приближающих функций. Для этого сначала построим некоторое семейство континуумов, содержащих множество $E$ (этот прием аналогичен применявшемуся ранее в [2, 3] при изучении приближений на несвязных множествах).

Разделим отрезок $I_1$ на три равных отрезка $I_{1j}$. Каждый отрезок $I_\nu$, $2 \leqslant \nu \leqslant k$, разделим на пять равных отрезков и перенумеруем их так, что при $j_1 < j_2$ отрезок $I_{\nu j_1}$ лежит левее отрезка

$I_{\nu j_2}$. Отрезок $[a_{k+1}+1; a_{k+1}+2]$ обозначим через $I_{k+1,4}$. Далее выберем произвольно точки $s_1 \in I_{12}$, $s_{2(\nu-1)} \in I_{\nu 2}$, $s_{2(\nu-1)+1} \in I_{\nu 4}$, $2 \leqslant \nu \leqslant k$, $s_{2k} \in I_{k+1,4}$.

Пусть $t_\mu = s_\mu - i$, тогда положим

$$K = K(s_1, \dots s_{2k}) = E \cup \cup_{\mu=1}^{2k} [s_\mu, t_\mu] \cup_{\mu=1}^{k} [t_{2\mu-1}, t_{2\mu}].$$

Если континуум $K \supset E$, то пространство $H^r_\omega(K)$ определяется аналогично пространству $H^r_\omega(E)$.

Рассмотрим отображение $w(z) = w(z, s_1, \dots, s_{2k})$ множества $\mathbb{C} \setminus K(s_1, \dots, s_{2k})$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ такое, что

$$\frac{w(x)}{i|x|^{1/2}} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

и пусть $\Psi(\tau, s_1, \dots, s_{2k})$ – обратное отображение для $w(x)$, $\tau \in \mathbb{C}^+$.

Для $h > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K(s_1, \dots, s_{2k})$ полагаем

$$\zeta_{h,t} = \zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots s_{2k}) = \Psi(w(\zeta, s_1, \dots, s_{2k}) + h + it, s_1, \dots, s_{2k}).$$

Обозначим через $Q$ угол $\{z = x + iy : x \geqslant -1, y \leqslant 2(x+1)\}$.

Для реализации конструкции построения приближающей целой функции мы воспользуемся продолжением функций специального типа, впервые примененным и плодотворно использованным в работах Е. М. Дынькина (см., например, [4]). В отличие от его ситуации, мы будем рассматривать неограниченные множества $E$.

**Утверждение 2.** *Пусть $f \in H^r_\omega(E)$ и точки $s_1, \dots, s_{2k}$ выбраны из соответствующих промежутков. Тогда существует продолжение $f_0(z, s_1, \dots s_{2k})$ функции $f$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ (так называемое псевдоаналитическое продолжение по Е. М. Дынькину) такое, что выполнены соотношения*

$$f_0 \in C(\mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{C} \setminus K(s_1, \dots s_{2k})),$$

$$f_0 \equiv 0 \quad \textit{вне} \quad Q, \quad f_0\big|_E = f,$$

$$||f_0||_{K(s_1, \dots s_{2k})}||_{H^r_\omega(K)} \leqslant c_3 ||f||_{H^r_\omega(E)},$$

$$\left|\frac{\partial f_0(z, s_1, \dots s_{2k})}{\partial \bar z}\right| \leqslant c_4 \delta^{r-1}(z) \omega(\delta(z)), z \in \mathbb{C} \setminus K(s_1, \dots s_{2k}),$$

*где* $\delta(z) = \delta(z, s_1, \dots, s_{2k}) = \operatorname{dist}(z, K(s_1, \dots s_{2k}))$, *а постоянные* $c_3$, $c_4$ *не зависят от* $s_1, \dots s_{2k}$ *и* $z$.

Обозначим $f_0\big|_{K(s_1,\dots s_{2k})}$ через $f(z, s_1, \dots s_{2k})$. Предполагая, что $p \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in K(s_1, \dots s_{2k})$, $\zeta \in Q \setminus K(s_1, \dots s_{2k})$, положим

$$R_{p,h,t}(z, \zeta, s_1, \dots s_{2k}) = \frac{1}{\zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots s_{2k}) - z} + \frac{\zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots, s_{2k}) - \zeta}{(\zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots s_{2k}) - z)^2}$$
$$+ \dots + \frac{\zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots s_{2k}) - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{h,t}(\zeta, s_1, \dots s_{2k}) - z)^p},$$

и пусть при $l > 1$, $\sigma > 0$

$$U_{l,\sigma}(t) = C_{l,\sigma}\left(\frac{\sin \frac{\sigma}{l} t}{t}\right)^l,$$

где $C_{l,\sigma}$ выбирается из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}} U_{l,\sigma}(t)dt = 1.$$

Для получения требуемой оценки приближения нам будет необходимо использовать следующее тождество:

$$f(z, s_1, \dots s_{2k}) = -\frac{1}{\pi}(z+h)^m \iint\limits_Q \frac{\frac{\partial}{\partial \bar\zeta} f_0(\zeta, s_1, \dots, s_{2k})}{(\zeta - z)(\zeta + h)^m} dA(\zeta),$$

где $z \in K(s_1, \dots, s_{2k})$, $h > 0$, $m > 2 + r$, $dA(\zeta)$ – мера Лебега на $\mathbb{C}$.

Теперь мы получаем функцию, хорошо приближающую $f(z, s_1, \dots s_{2k})$ при $z \in K(s_1, \dots, s_{2k})$, а именно:

$$F_{p,\sigma,l,m}(z, s_1, \dots, s_{2k}) = -\frac{1}{\pi}\big(z + \frac{1}{\sigma^2}\big)^m$$
$$\cdot \int\limits_{\mathbb{R}} U_{l,\sigma}(t)\bigg(\iint\limits_Q \frac{\partial f_0(\zeta, s_1, \dots, s_{2k})}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{R_{p,1/\sigma,t}(z, \zeta, s_1, \dots s_{2k})}{(\zeta + \frac{1}{\sigma^2})^m} dA(\zeta)\bigg) dt.$$

Для того, чтобы перейти от приближения на $K(s_1, \dots s_{2k})$ к приближению на $E$, выберем натуральное $N$ и функцию $\lambda_N(s_1, \dots s_{2k})$ так, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{I_{12} \times I_{22} \times I_{24} \times \dots \times I_{k+1,4}} \lambda_N(s_1, \dots, s_{2k}) s_1^N \cdot \ldots \cdot s_{2k}^N ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_{2k} = 1,$$

и при любых целых $q_1, \dots, q_{2k} \geqslant 0$, $q_j \leqslant N$, таких, что $\sum\limits_{j=1}^{2k} q_j < 2kN$, было выполнено условие

$$\int\limits_{I_{12}\times I_{22}\times\dots I_{k+1,4}} \lambda_N(s_1,\dots,s_{2k}) s_1^{q_1}\cdot\ldots\cdot s_{2k}^{q_{2k}}\,ds_1\cdot\ldots\cdot ds_{2k} = 0.$$

Для завершения построения приближающей на $E$ функции $F_\sigma(z)$ выбираем и фиксируем достаточно большие $p$, $l$, $m$ и $N$, зависящие только от $r$, $\omega$ и $E$, и полагаем

$$F_\sigma(z) = \int\limits_{I_{12}\times I_{22}\times\cdots\times I_{k+1,4}} F_{p,\sigma,l,m}(z,s_1,\dots,s_{2k})\lambda_N(s_1,\dots s_{2k})(s_1-z)^N \cdot\ldots\cdot(s_{2k}-z)^N\,ds_1\cdot\ldots\cdot ds_{2k}.$$

Доказательства сформулированной выше теоремы и утверждений 1 и 2 будут приведены в одной из следующих наших работ.

## Литература


1. Т. С. Давыдова, Н. А. Широков, *Приближение функций из класса Гельдера на полуоси*, Зап. научн. семин. ПОМИ **262** (1999), 127–137.
2. Н. А. Широков, *Приближение многочленами на компактах с бесконечносвязным дополнением*, Алгебра и анализ **10** (1998), No. 1, 248–264.
3. К. Г. Межевич, Н. А. Широков, *Полиномиальные приближения на дизъюнктных отрезках*, Проблемы математического анализа, No. 18 (1998), 118–132.
4. Е. М. Дынькин, *О равномерном приближении функций в жордановых областях*, Сиб. мат. ж. **18** (1977), No. 4, 775–786.


С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 28 августа 2006 г.