Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Н. В. Проскурин

О РЯДАХ ДИРИХЛЕ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КУБИЧЕСКОЙ ТЕТА–ФУНКЦИЕЙ

Введение

Кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона Θ_{K-P} определена на гиперболическом пространстве $\mathbb{H} = \big\{(z,v) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid v > 0\big\}$ и принимает значения в комплексном поле $\mathbb{C}$. Имеется разложение Фурье –

$$\Theta_{K-P}(z,v) = v^{2/3} + (6\pi v)^{2/3} \sum_{\nu} \tilde{\tau}(\nu) Ai\big((6\pi|\nu|v)^{2/3}\big) e(\nu z), \qquad (1)$$

в котором Ai – функция Эйри, $e(q) = \exp\big(2\pi i(q+\bar{q})\big)$ для каждого $q \in \mathbb{C}$. Коэффициенты $\tilde{\tau}(\nu)$ выражаются явно через кубические суммы Гаусса, см. ниже формулы Паттерсона (13). Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Суммирование в (1) распространяется на все ν из $(\sqrt{-3}\,)^{-3}\mathcal{O}$, исключая 0, т.е. на все ν вида $(\sqrt{-3}\,)^{-3}\delta$ с $\delta \in \mathcal{O}$, $\delta \neq 0$. (Сходимость ряда (1) следует из (8), (13), (34).)

Функция Θ_{K-P} открыта Куботой [1], см. также [2] и [3]. Она является автоморфной функцией весьма специального типа – кубической метаплектической формой. Это означает, в частности, что для Θ_{K-P} имеются некоторые формулы преобразования. Одна из них –

$$\Theta_{K-P}(0,v) = \Theta_{K-P}(0,1/v), \qquad (2)$$

имеет место для всех $v > 0$, $v \in \mathbb{R}$. Функция $v \mapsto \Theta_{K-P}(0,v)$ продолжается, с сохранением свойства (2), с вещественной положительной полуоси до голоморфной функции на полуплоскости $\{v \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ v > 0\}$.

Пусть

$$L(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\ s > 1, \qquad (3)$$

Эта работа частично финансировалась грантом РФФИ 05-01-00930-а.

где суммирование распространяется на те же ν, что и в (1),

$$\tau(\nu) = \tilde{\tau}(\nu)\|\nu\|^{1/6},$$

и $\|\cdot\|\colon \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \to \mathbb{Q}$ – норменное отображение, $\|z\| = z\bar{z}$ для всех $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. В настоящей работе мы исследуем функцию $L(\tau;\cdot)$. Ряд (3) абсолютно сходится и определяет функцию аналитическую в области $\mathrm{Re}\, s > 1$. Эта функция связана с Θ_{K-P} посредством преобразования Меллина. Как мы увидим, она продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, связывающему её значения в точках s и $1-s$. Именно, мы покажем, что функция

$$s \mapsto (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6)\,L(\tau;s) \tag{4}$$

инвариантна относительно замены s на $1-s$. Мы выведем также так называемые укороченные функцинальные уравнения для $L(\tau;\cdot)$ и рассмотрим некоторые вопросы, связанные с вычислением значений функции Θ_{K-P} и функции $L(\tau;\cdot)$.

Нас интересует, в особенности, распределение нулей функции $L(\tau;\cdot)$ и мы намерены провести вычисления. Результаты вычислений будут сообщены позднее, в другой публикации, тогда как в настоящей публикации мы ограничиваемся необходимыми теоретическими рассмотрениями. Коэффициенты $\tau(\nu)$ не обладают свойствами мультипликативности, необходимыми для разложения $L(\tau;\cdot)$ в эйлеровское произведение. Ввиду этого обстоятельства, кажется, было бы слишком оптимистичным полагать, что все нетривиальные нули[1] лежат на критической прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Тем не менее, известные вычисления с дзета-функциями Эпштейна и с некоторыми другими функциями, также удовлетворяющими уравнениям риманова типа и не имеющими эйлеровских произведений, показывают, что многие нули лежат именно на критической прямой. (См., например, [4, 5].) Для того чтобы мотивировать интерес к рассмотрению функции $L(\tau;\cdot)$, отметим здесь два её специфических свойства. Во-первых, хотя функция коэффициентов $\nu \mapsto \tau(\nu)$ не мультипликативна, её куб

[1] Т.е. нули в полосе $\{s \in \mathbb{C}\,|\,0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1\}$. Имеется ещё серия так называемых тривиальных нулей, расположенных на вещественной прямой в полюсах гамма-множителей в (4). Поскольку эйлеровского произведения нет, возможно $L(\tau;\cdot)$ имеет и другие нули.

$\nu \mapsto \tau(\nu)^3$ – мультипликативная функция. Второе свойство, которое нам хотелось бы отметить, связано с разложением

$$L(\tau; s) = 2\,\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)\,Z(\tau; s), \tag{5}$$

в котором $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ – дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$, а функция $Z(\tau; \cdot)$ определяется рядом Дирихле –

$$Z(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{6}$$

с теми же коэффициентами $\tau(\nu)$, что и в (3), и с суммированием по $\nu \in (\sqrt{-3}\,)^{-3}\mathcal{O} \setminus \{0\}$, ограниченным некоторыми дополнительными условиями. Именно, заметим, что каждое $\nu \in (\sqrt{-3}\,)^{-3}\mathcal{O} \setminus \{0\}$ может быть представлено, и при том единственным образом, в виде произведения $\nu = \lambda(\sqrt{-3}\,)^m \delta$, в котором λ – одна из шести единиц кольца $\mathcal{O}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq -3$, и $\delta \in \mathcal{O}$, $\delta \equiv 1 \pmod 3$. Так вот, суммирование в (6) распространено на все такие ν с $\lambda^3 = 1$, с бесквадратным δ и с m, равным -3 или -1. Функция $s \mapsto \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)$ имеет бесконечно много нулей на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/3$ и, если справедлива гипотеза Римана для $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$, не имеет других нулей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geq 1/6$. Ввиду (5), каждый нуль этой функции является либо полюсом $Z(\tau; \cdot)$ либо нулём $L(\tau; \cdot)$. Отметим ещё, что если функция $L(\tau; \cdot)$ действительно имеет нуль, лежащий на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/3$, то, ввиду функционального уравнения (4), она имеет ещё один нуль, лежащий на прямой $\mathrm{Re}\, s = 2/3$. В связи с разложением (5) интересно посмотреть также, что происходит с тривиальными нулями дзета-функции Дедекинда, – это, как известно, простые нули в отрицательных целых точках. Им соответствуют простые нули функции $s \mapsto \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)$ в точках

$$s = -1/6 - m/3 \quad \text{с} \quad m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Мы увидим, что точки (7), соответствующие $m \equiv 0 \pmod 3$ и $m \equiv 2 \pmod 3$, являются простыми нулями функции $L(\tau; \cdot)$, а точки соответствующие $m \equiv 1 \pmod 3$ являются полюсами $Z(\tau; \cdot)$, но не нулями $L(\tau; \cdot)$.

1 Арифметика поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$

Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \subset \mathbb{C}$. Это коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля и с алгоритмом Евклида. Как следствие, все идеалы в $\mathcal{O}$ главные и каждый отличный от нуля элемент раскладывается в произведение простых элементов единственным (с точностью до умножения на единицы) образом. В кольце $\mathcal{O}$ имеется шесть единиц, именно, ± 1, $\pm\omega$, $\pm\omega^2$ с $\omega = \exp(2\pi i/3) = (-1+\sqrt{-3})/2$. Мы имеем $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Легко проверить, что единицы различны по $\bmod 3$ и представляют все классы $\bmod 3$, взаимно простые с 3. Отсюда следует, что каждый отличный от нуля элемент k кольца $\mathcal{O}$ разложим единственным образом в произведение $k = \lambda(\sqrt{-3})^m c$, в котором λ – одна из единиц, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, и $c \in \mathcal{O}$, $c \equiv 1 \pmod 3$.

Для $z \in \mathbb{C}$, пусть

$$e(z) = \exp\bigl(2\pi i(z + \bar{z})\bigr).$$

Если $\mathcal{J}$ – идеал кольца $\mathcal{O}$, то дробный идеал $\mathcal{J}^*$, двойственный к $\mathcal{J}$, можно охарактеризовать как множество всех таких $c \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, что $e(cd) = 1$ для всех $d \in \mathcal{J}$. В частности, для идеала $\mathcal{J} = (3)$, порождённого 3, имеем $\mathcal{J}^* = (\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O}$. На кольце $\mathcal{O}$ можно известным образом определить символ кубического вычета $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$. Затем, для каждого $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathcal{O}$ можно определить кубическую сумму Гаусса $\bmod c$, это

$$G(c) = \sum_k \left(\frac{k}{c}\right) e(k/c)$$

с суммированием, распространенным на k из приведённой системы вычетов $\bmod c$. В частности, $G(1) = 1$. Основные свойства сумм Гаусса:

$$|G(c)|^2 = \begin{cases} \|c\|, & \text{если } c \text{ бесквадратно}, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{8}$$

$$G(c_1 c_2) = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{c_2}{c_1}\right) G(c_1) G(c_2), \text{ если } c_1 \text{ и } c_2 \text{ взаимно просты}; \tag{9}$$

$$\overline{G(c)} = G(\bar{c}); \tag{10}$$

$$G(c)^3 = -c^2\bar{c} \quad \text{если } c \text{ простое}. \tag{11}$$

Каждое простое число в $\mathcal{O}$ ассоциировано[2] либо с $\sqrt{-3}$, либо с простым числом, сравнимым с $1 \pmod 3$. Мы условимся, начиная с этого места, под простыми числами в $\mathcal{O}$ понимать именно простые $\equiv 1 \pmod 3$ и $\sqrt{-3}$. Рассмотрим теперь простые числа c из $\mathcal{O}$, отличные от $\sqrt{-3}$, и соответствующие им суммы Гаусса $G(c)$. Если $c \in \mathbb{Z}$, то $-c$ – положительное простое (в $\mathbb{Z}$) число $\equiv 2 \pmod 3$. Если $c \notin \mathbb{Z}$, то вместе с c и сопряжённое число $\bar{c}$ является простым и $p = c\bar{c}$ — положительное простое число в $\mathbb{Z}$, сравнимое с $1 \pmod 3$. Обратно, пусть p — положительное простое число в $\mathbb{Z}$. Если $p \equiv 2 \pmod 3$, то $c = -p$ — простое число в $\mathcal{O}$ и $G(c) = -c$. Если $p \equiv 1 \pmod 3$, то p единственным образом раскладывается в $\mathcal{O}$ в произведение $p = c\bar{c}$ с $c \equiv \bar{c} \equiv 1 \pmod 3$. При этом оба числа c и $\bar{c}$ простые и для соответствующих им сумм Гаусса имеет место хорошо известная формула

$$\begin{aligned} G(c) + \overline{G(c)} &= \sum_{j=0,1,\dots,p-1} e^{2\pi i j^3/p} \\ &= \sum_{j=0,1,\dots,p-1} \cos(2\pi j^3/p). \end{aligned} \tag{12}$$

Для того чтобы вычислить сумму Гаусса $G(c)$ для простого c, достаточно, см. (11), найти комплексные числа z с $z^3 = -c^2\bar{c}$ и затем выбрать из них то, для которого $2\,\mathrm{Re}\, z$ равна сумме, стоящей в правой части (12), которую следует предварительно вычислить хотя бы и с невысокой точностью. Затем, для вычисления сумм Гаусса $G(c)$ с составными c можно воспользоваться формулой (9). Ради краткости, мы опускаем описание свойств символа вычета и методов, хорошо известных, вычисления его значений. Все, что изложено в этом параграфе, а также определение и основные свойства символа кубического вычета, можно найти во многих источниках. Удобно сослаться на книгу [6].

[2] $a \in \mathcal{O}$ ассоциировано с $b \in \mathcal{O}$, если $a = \lambda b$ с некоторой единицей λ.

2. Коэффициенты $\tilde{\tau}(\nu)$

Для $\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ положим

$$\tilde{\tau}(\nu) = \frac{\overline{G(c)}}{\|c\|^{2/3}} \begin{cases} 3^{-1/3}\left(\dfrac{3}{c}\right), & \text{если } \nu \pm\, (\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\[2ex] 3^{-1/3}\left(\dfrac{3\omega}{c}\right)\xi^{-1}, & \text{если } \nu \pm\, \omega(\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\[2ex] 3^{-1/3}\left(\dfrac{3\omega^2}{c}\right)\xi, & \text{если } \nu \pm\, \omega^2(\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\[2ex] 1, & \text{если } \nu = \pm\,(\sqrt{-3}\,)^{3n-3}cd^3, \\[2ex] 0 & \text{для всех других } \nu, \end{cases} \tag{13}$$

где $c, d \in \mathcal{O}$, $c \equiv d \equiv 1 \pmod 3$, c бесквадратно, $n \in \mathbb{Z}$, $\omega = \exp(2\pi i/3)$ и $\xi \exp(2\pi i/9)$. Тот факт, что формулы (13) задают коэффициенты в разложении (1) функции Θ_{K-P}, был доказан Паттерсоном в [2]. Можно заметить, что $\tilde{\tau}(\nu)$ в (13) не зависит от d и n и что $\tilde{\tau}(1) = 1$. Из (10) и известных свойств символа вычета легко следует, что

$$\tilde{\tau}(\bar{\nu}) = \overline{\tilde{\tau}(\nu)} \tag{14}$$

для всех $\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Кроме того, имеем

$$\tilde{\tau}(ab) = \left(\frac{a}{b}\right)\tilde{\tau}(a)\tilde{\tau}(b), \tag{15}$$

если $a \in (\sqrt{-3}\,)^{-3}\mathcal{O}$, $b \in \mathcal{O}$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$, и a и b не имеют общих простых делителей. Это соотношение легко выводится из определения (13), известного свойства (9) сумм Гаусса и закона взаимности. Точно такие же соотношения имеем и для функции

$$\tau(\nu) = \tilde{\tau}(\nu)\|\nu\|^{1/6}, \quad \nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,). \tag{16}$$

Мы видим, что функция τ не мультипликативна, но функция τ^3 мультипликативна. Точнее, пусть λ – одна из единиц кольца $\mathcal{O}$, $m \in \mathbb{Z}$ и $c \equiv 1 \pmod 3$, $c \in \mathcal{O}$. Тогда

$$\tau^3\big(\lambda(\sqrt{-3}\,)^m c\big)\tau^3\big(\lambda(\sqrt{-3}\,)^m\big)\,\tau^3(c) \tag{17}$$

и далее, если $c = ab$ с взаимнопростыми $a, b \in \mathcal{O}$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$, то $\tau^3(c) = \tau^3(a)\,\tau^3(b)$. Пусть, как и выше, $c \in \mathcal{O}$, $c \equiv 1 \pmod 3$. Если

c простое, то $\tau^3(c) = -1/c$, а если c не бесквадратно, то $\tau(c) = 0$. Вычисление значений фуккции τ не составляет труда, коль скоро мы умеем вычислять суммы Гаусса и значения символа кубического вычета.

3. Дзета-функция Дедекинда $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$

По определению,

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) = \prod_p \Bigl(1 - \frac{1}{\|p\|^s}\Bigr)^{-1}, \tag{18}$$

где произведение распространено на простые числа p кольца $\mathcal{O}$ и сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} s > 1$. Дзета-функция Дедекинда продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость, удовлетворяет функциональному уравнению

$$(2\pi/\sqrt{3}\,)^{-s}\Gamma(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) = (2\pi/\sqrt{3}\,)^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(1-s) \tag{19}$$

и голоморфна всюду, исключая точку 1, где она имеет простой полюс. В некоторых случаях бывает удобно исключить в (18) множитель, сответствующий $p = \sqrt{-3}$, и работать с функцией

$$\zeta_*(s) = \Bigl(1 - \frac{1}{3^s}\Bigr)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s), \tag{20}$$

которая в области $\operatorname{Re} s > 1$ может быть представлена рядом

$$\zeta_*(s) = \sum_k \frac{1}{\|k\|^s} \tag{21}$$

с суммированием по всем $k \equiv 1 \pmod 3$ в $\mathcal{O}$. Имеем: $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(-n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$. Все другие нули $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ не вещественны, лежат в полосе $\{\, s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1 \,\}$ и, гипотетически, только на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Дзета-функция Дедекинда может быть разложена в произведение

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) = \zeta(s) L(s,\chi), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

дзета-функции Римана ζ и классического ряда Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{23}$$

с характером Дирихле $\chi(n) = 1, -1, 0$ для $n \equiv 1, -1, 0 \pmod 3$ соответственно. Непосредственно из определений (18), (20) находим:

$$\frac{\zeta_*(s)}{\zeta_*(2s)} = \prod_p \Bigl(1 + \frac{1}{\|p\|^s}\Bigr) = \sum_k \frac{1}{\|k\|^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{24}$$

где произведение распространено на простые числа $p \equiv 1 \pmod 3$, а сумма распространена на бесквадратные $k \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathcal{O}$. О дзета-функциях Дедекинда см., например, [7].

4. Специальные функции

Гамма-функция Эйлера определяется в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 0$, $s \in \mathbb{C}$, интегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \exp(-x) x^{s-1}\, dx,$$

и продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость посредством, например, функционального уравнения –

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Имеем: $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(n+1) = n!$ для всех целых $n \geq 0$. Гамма-функция не имеет нулей и не имеет особенностей помимо простых полюсов в точках $0, -1, -2, -3, \ldots$. Нам придётся также иметь дело с неполными гамма-функциями:

$$\gamma(s,z) = \Gamma(s) - \Gamma(s,z), \quad \Gamma(s,z) = \int_z^\infty \exp(-x) x^{s-1}\, dx. \tag{26}$$

В этих формулах $s \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$. Для неполной гамма-функции γ имеет место разложение

$$\frac{\gamma(s,z)}{z^s \Gamma(s)} = e^{-z} \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(s+n+1)}, \tag{27}$$

в котором правая часть – целая функция своих аргументов. Пусть $\mathbb{C}'$ – комплексная плоскость без вещественных неположительных чисел, т.е. $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{\, z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0 \,\}$. Разложение (27) доставляет голоморфное продолжение γ на $\mathbb{C}\times\mathbb{C}'$. Вместе с тем и дополнительная неполная гамма-функция в (26) получает голоморфное продолжение на $\mathbb{C}\times\mathbb{C}'$. Функция Эйри $Ai\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – целая функция, определённая для $z\in\mathbb{R}$ (осциллирующим) интегралом Эйри

$$Ai(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos(t^3/3+zt)\,dt.$$

Функция Эйри удовлетворяет дифференциальному уравнению $Ai''(z)=zAi(z)$. Для всех $z\in\mathbb{C}$ имеем

$$Ai(z)=Ai(0)\sum_{k\geqslant 0}\frac{P_k}{(3k)!}\,z^{3k}+Ai'(0)\sum_{k\geqslant 0}\frac{Q_k}{(3k+1)!}\,z^{3k+1}, \tag{28}$$

где $P_0=Q_0=1$ и $P_{k+1}=(3k+1)P_k$, $Q_{k+1}=(3k+2)Q_k$ для всех целых $k\geq 0$. Известно также, что

$$Ai(0)=3^{-2/3}\Gamma(2/3)^{-1},\quad Ai'(0)=-3^{-1/3}\Gamma(1/3)^{-1}. \tag{29}$$

Положим

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{3^{2n}}\frac{\Gamma(3n+1/2)}{\Gamma(2n+1)},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{30}$$

С любым целым $h\geq 0$ имеем

$$Ai(z^{2/3})=\exp(-2z/3)\Big\{\sum_{0\leqslant n\leqslant h}\frac{C_n}{z^{n+1/6}}+R_h(z)\Big\}, \tag{31}$$

где

$$|R_h(z)|\leqslant\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{3h+1/2}\frac{C_h}{|z|^{h+1/6}} \tag{32}$$

и также

$$|R_h(z)|\leqslant\Big\{1+\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{3h+7/2}\Big\}\frac{C_{h+1}}{|z|^{h+7/6}} \tag{33}$$

для любого $z\in\mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} z>0$. Функция Эйри принимает вещественные положительные значения и монотонно убывает на вещественной положительной полуоси. Для вещественного $z\geq 1$ имеет место оценка

$$Ai(z^{2/3})\leq\frac{1}{2\pi^{1/2}z^{1/6}}\exp(-2z/3). \tag{34}$$

Преобразование Меллина функции Эйри выражается известным образом через гамма-функцию. Именно,

$$\int_0^\infty Ai(z)\, z^{s-1}\, dz = \frac{3^{2s/3-7/6}}{2\pi}\,\Gamma\Big(\frac{s}{3}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{s+1}{3}\Big), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\ s > 0. \tag{35}$$

Всё, что изложено в этом параграфе, можно найти в [8]. В частности, разложение (31) и неравенства (32)–(34) см. в §4, гл. 4, [8].

5. Основные свойства функций $L(\tau;\cdot)$ и $Z(\tau;\cdot)$

Некоторые свойства функции $L(\tau;\cdot)$ были уже упомянуты во введении. Мы намерены теперь дать точные формулировки и доказательства. Положим

$$\Omega(s) = 2^{-1-2s}3^{1/2}\pi^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6), \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{36}$$

Согласно (35), для s с $\mathrm{Re}\ s > 1/6$ имеем

$$\Omega(s) = (6\pi)^{1-2s}\int_0^\infty Ai(x^{2/3})\, x^{2s-4/3}\, dx. \tag{37}$$

Теорема. *Определяющий $L(\tau;\cdot)$ ряд Дирихле (3) сходится абсолютно и представляет голоморфную функцию в области $\mathrm{Re}\ s > 1$. Далее, $L(\tau;\cdot)$ продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Единственной особенностью $L(\tau;\cdot)$ является простой полюс в точке $5/6$. Точки $s = -1/6 - n$ и $s = -5/6 - n$ с целыми $n \geq 0$ являются простыми нулями $L(\tau;\cdot)$. Функция $\Lambda(s) = \Omega(s)L(\tau;s)$, $s \in \mathbb{C}$, удовлетворяет функциональному уравнению $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$ и не имеет особенностей помимо простых полюсов с вычетами $1/2$ и $-1/2$ в точках $5/6$ и $1/6$. Для любого $s \in \mathbb{C}$ имеем $L(\tau;\bar{s}) = \overline{L(\tau;s)}$ и, в частности, нули функции $L(\tau;\cdot)$ расположены симметрично относительно вещественной оси.*

Доказательство. Начнём с рассмотрения вопроса о сходимости ряда в (3). Заметим, что каждое ν из $(\sqrt{-3}\,)^{-3}\,\mathcal{O}\setminus\{0\}$ представимо единственным образом в виде произведения одной из шести единиц на $(\sqrt{-3}\,)^n cd^3$ с $n \geq -3$, $n \in \mathbb{Z}$, с бескубным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathcal{O}$ и с $d \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathcal{O}$. При этом $\tau(\nu)$ может быть отлично от 0 только, если c бесквадратно и при этом $|\tilde{\tau}(\nu)| \le \|c\|^{-1/6}$, см. (13) и (18)). Следовательно, ряд (3) мажорируется рядом

$$6\sum_{n,c,d}\frac{1}{3^{(\sigma-1/6)n}\,\|c\|^{\sigma}\,\|d\|^{3\sigma-1/2}}$$

с $\sigma = \operatorname{Re} s$, который сходится при $\sigma > 1$. Это обеспечивает абсолютную сходимость ряда Дирихле (3) в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ и голоморфность функции $L(\tau;\cdot)$ в этой полуплоскости. Теперь рассмотрим интеграл

$$\Lambda(s) = \int\limits_0^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\}v^{2s-2}\,dv, \tag{38}$$

сходящийся абсолютно при $\operatorname{Re} s > 5/6$. Предполагая $\operatorname{Re} s > 1$, подставим в (38) разложение Фурье (1) и проинтегрируем почленно:

$$\Lambda(s) = (6\pi)^{2/3}\sum_{\nu}\tilde{\tau}(\nu)\int\limits_0^\infty Ai\bigl((6\pi|\nu|v)^{2/3}\bigr)\,v^{2s-4/3}\,dv$$

$$= (6\pi)^{1-2s}\sum_{\nu}\frac{\tilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{s-1/6}}\int\limits_0^\infty Ai(x^{2/3})x^{2s-4/3}\,dx = \Omega(s)L(\tau;s). \tag{39}$$

С другой стороны, разбив область интегрирования в (38) на интервал от 0 до 1 и интервал от 1 до бесконечности, получим $\Lambda(s) = X(s) + Y(s)$, где

$$X(s) = \int\limits_0^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\}v^{2s-2}\,dv, \tag{40}$$

$$Y(s) = \int\limits_0^1 \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\}v^{2s-2}\,dv \int\limits_1^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,u) - u^{-2/3}\bigr\}u^{-2s}\,du$$

$$= \int\limits_1^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,u) - u^{2/3}\bigr\}u^{-2s}\,du + \int\limits_1^\infty \bigl\{u^{2/3} - u^{-2/3}\bigr\}u^{-2s}\,du$$

$$= X(1-s) + \frac{1}{2s-5/3} - \frac{1}{2s-1/3}$$

(для вычисления $Y(s)$ мы сделали замену переменной $v = u^{-1}$ и воспользовались (2)). Следовательно, при $\mathrm{Re}\, s > 5/6$ имеем

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2s-5/3} - \frac{1}{2s-1/3} + X(s) + X(1-s). \tag{42}$$

Интеграл в правой части (40) представляет целую функцию, см. (1) и (3). Далее, коль скоро X – целая функция, разложение (42) доставляет продолжение функции Λ из (38) с полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 5/6$ до мероморфной функции на $\mathbb{C}$. Наконец функция $L(\tau;\cdot)$ продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$ посредством равенства

$$\Lambda(s) = \Omega(s)L(\tau;s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{43}$$

которое выше, см. (39), было получено в предположении $\mathrm{Re}\, s > 1$. Из рассмотрения правой части (42) очевидно, что функция Λ инвариантна относительно замены $s \mapsto 1-s$ и голоморфна всюду, кроме точек $5/6$ и $1/6$, где она имеет простые полюса с вычетами $1/2$ и $-1/2$, что и требовалось. Заметим теперь, что функция Ω не имеет нулей и имеет только простые полюса и только в точках $\pm 1/6 - n$ с целыми $n \geq 0$. Отсюда следуют наши утверждения относительно нулей и полюсов $L(\tau;\cdot)$.

Остаётся доказать последнее утверждение теоремы. Заметим, что вместе с каждым $\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\,\mathcal{O}$ имеем также и $\bar\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\,\mathcal{O}$. Сгруппировав в (1) слагаемые, соответствующие ν и $\bar\nu$, и приняв во внимание (14), мы находим, что $\Theta_{K-P}(0,v) \in \mathbb{R}$ для всех $v > 0$, $v \in \mathbb{R}$. После этого, из (40) и (42) получаем $X(\bar s) = \overline{X(s)}$ и $\Lambda(\bar s) = \overline{\Lambda(s)}$ для всех $s \in \mathbb{C}$. То же соотношение имеет место для функции Ω из (36), значит, и для функции $L(\tau;\cdot)$, см.(43).

Теорема. *Определяющий $Z(\tau;\cdot)$ ряд Дирихле (6) сходится абсолютно и представляет голоморфную функцию в области $\mathrm{Re}\, s > 1$. Далее, $Z(\tau;\cdot)$ продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и имеет место разложение*

$$L(\tau;s) = 2\,\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s-1/2)\,Z(\tau;s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{44}$$

в котором $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ – дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Функция $Z(\tau;\cdot)$ имеет простые полюса в точке $5/6$ и в точках $-1/2-n$ с целыми $n \geq 0$. Если ρ – нетривиальный нуль дзета-функции Дедекинда (т.е. $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(\rho) = 0$ и $0 < \mathrm{Re}\,\rho < 1$), то точка $1/6+\rho/3$

либо является нулём $L(\tau;\cdot)$, либо является полюсом $Z(\tau;\cdot)$. Никаких других особенностей $Z(\tau;\cdot)$ не имеет. В точке $1/2$ функция $Z(\tau;\cdot)$ обращается в нуль. Исключая точку $1/2$, в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geq 1/2$ нули функции $Z(\tau;\cdot)$ те же и тех же порядков,что и нули функции $L(\tau;\cdot)$.

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (6) в области $\mathrm{Re}\, s > 1$ следует, очевидно, из абсолютной сходимости ряда (3). Из общих свойств рядов Дирихле следует голоморфность $Z(\tau;\cdot)$ в этой области. Обратимся теперь к доказательству (44). Напомним (3), что $L(\tau;s)$ определяется (для s с $\mathrm{Re}\, s > 1$) рядом

$$\sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \tag{45}$$

где суммирование распространено на все ν из $(\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O} \setminus \{0\}$. Заметим, что каждое $\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O}\setminus\{0\}$ может быть представлено и при том единственным образом в виде произведения

$$\nu = \lambda(\sqrt{-3})^{3n-m} c d^3,$$

где λ – одна из шести единиц кольца $\mathcal{O}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $m = 1, 2, 3$ и $c, d \in \mathcal{O}$, $c \equiv d \equiv 1 \pmod 3$, причем c – бескубно. При этом, см. (13) и (16), коэффициенты $\tau(\nu)$ могут быть отличны от 0 только, если c бесквадратно и $m = 3$ или $m = 1$. Далее, $Z(\tau;s)$ определяется рядом (45) с суммированием ограниченным дополнительными условиями $d = 1$, $n = 0$, $m = 1, 3$ и $\lambda^3 = 1$. Обратимся еще раз к (13) и заметим, что $\tilde{\tau}(\nu)$ не зависит от d, n и что $\tilde{\tau}(-\nu) = \tilde{\tau}(\nu)$. Мы находим, что

$$\begin{aligned} L(\tau;s) &= 2\, Z(\tau;s) \sum_{n,d} \frac{1}{\|(\sqrt{-3})^{3n} d^3\|^{s-1/6}} \\ &= 2\, Z(\tau;s) \sum_{n} \frac{1}{3^{(3s-1/2)n}} \sum_{d} \frac{1}{\|d\|^{3s-1/2}}. \end{aligned}$$

Здесь, см. (20) и (21), сумма по $d \equiv 1 \pmod 3$, $d \in \mathcal{O}$, и $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, представляет $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)$. Тем самым доказано, что равенство (44) имеет место для всех s с $\mathrm{Re}\, s > 1$. Отсюда немедленно следует, что $Z(\tau;\cdot)$ продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, и что (44) имеет место для всех $s \in \mathbb{C}$.

Все утверждения относительно нулей и полюсов $Z(\tau;\cdot)$ считываются посредством (44) с известных свойств $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ и с уже установленных свойств $L(\tau;\cdot)$. Ради краткости, мы опускаем детали.

6. $L(\tau;s)$ и $Z(\tau;s)$ в области $\mathrm{Re}\, s > 1$

Если функция, определённая рядом Дирихле, раскладывается в области абсолютной сходимости ряда в абсолютно сходящееся эйлеровское произведение, то она, конечно, не имеет нулей в этой области. Функции $L(\tau;\cdot)$ и $Z(\tau;\cdot)$ определены рядами Дирихле, сходящимися абсолютно в области $\mathrm{Re}\, s > 1$, и нам хотелось бы знать, имеют ли они в этой области нули. Поскольку эйлеровского произведения нет, вопрос не тривиален. Следующая теорема доставляет только частичный ответ.

Теорема. *Пусть $s \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}\, s \geq \sigma$ с некоторым вещественным $\sigma > 1$. Имеем*

$$Z(\tau;s) = 3^{3s-1/2}\bigl(1+4^{-s}\bigr)\bigl(1+r(s)\bigr), \tag{46}$$

где $r(s) \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству

$$|r(s)| \leq \frac{(1+3^{1-2\sigma})\,\zeta_*(\sigma)\,\zeta_*(2\sigma)^{-1} - 1 - 4^{-\sigma}}{1-4^{-\sigma}} \tag{47}$$

с ζ_* из (20). В частности, $|r(s)| < 0.999$ и

$$Z(\tau;s) \neq 0, \quad L(\tau;s) \neq 0, \quad \text{\textit{если}} \quad \mathrm{Re}\, s \geq 1.3533.$$

Доказательство. Заметим, что абсолютная величина ν-го слагаемого в (6) монотонно стремится к нулю при $\mathrm{Re}\, s \to \infty$, если только $\|\nu\| > 1$. И заметим, что в (6) есть несколько слагаемых с $\|\nu\| \leq 1$. Это слагаемые, соответствующие

$$\nu = (\sqrt{-3})^{-3} \quad \text{с} \quad \|\nu\| = 1/27 \quad \text{и} \quad \tau(\nu) = 1/\sqrt{3},$$
$$\nu = (\sqrt{-3})^{-3}(-2) \quad \text{с} \quad \|\nu\| = 4/27 \quad \text{и} \quad \tau(\nu) = 2/\sqrt{3}$$

и несколько других с $\|\nu\| \geq 7/27$. Абсолютная величина слагаемого в (6), соответствующего ν с $\|\nu\| < 1$, монотонно возрастает и стремится к бесконечности при $\mathrm{Re}\, s \to \infty$, при том возрастает тем быстрее, чем меньше норма ν. Выделив в (6) два слагаемых с минимальной нормой ν и обозначив через $R(s)$ сумму всех остальных слагаемых, представим наш ряд следующим образом

$$Z(\tau;s)=3^{3s-1/2}\bigl(1+4^{-s}\bigr)+R(s). \tag{48}$$

Пусть $\rho=\operatorname{Re}s$. Имеем, очевидно,

$$|R(s)|\le\sum_{\nu}\frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{\rho}}-3^{3\rho-1/2}(1+4^{-\rho}). \tag{49}$$

с суммированием по тем же ν, что и в (6). Исключив слагаемые с $\tau(\nu)=0$, см. (13) и (16), мы можем переписать (49) как

$$|R(s)|\le C(\rho)+D(\rho)-3^{3\rho-1/2}(1+4^{-\rho}), \tag{50}$$

где $C(\rho)$ – сумма слагаемых в (49) соответствующих $\nu=(\sqrt{-3})^{-3}c$ с бесквадратными $c\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, а $D(\rho)$ – сумма слагаемых в (49), соответствующих $\nu=\lambda(\sqrt{-3})^{-1}c$ теми же c и с $\lambda^3=1$. Далее, по формулам (13), (16) находим

$$C(\rho)\le\sum_{c}\frac{|\tau((\sqrt{-3})^{-3}c)|}{\|(\sqrt{-3})^{-3}c\|^{\rho}}=\sum_{c}\frac{|\tilde\tau((\sqrt{-3})^{-3}c)|}{\|(\sqrt{-3})^{-3}c\|^{\rho-1/6}}$$

$$=3^{3\rho-1/2}\sum_{c}\frac{|G(c)|}{\|c\|^{\rho+1/2}}=3^{3\rho-1/2}\sum_{c}\frac{1}{\|c\|^{\rho}}=3^{3\rho-1/2}\frac{\zeta_*(\rho)}{\zeta_*(2\rho)}, \tag{51}$$

$$D(\rho)\le\sum_{\lambda,c}\frac{|\tau(\lambda(\sqrt{-3})^{-1}c)|}{\|(\sqrt{-3})^{-1}c\|^{\rho}}=\sum_{\lambda,c}\frac{|\tilde\tau(\lambda(\sqrt{-3})^{-1}c)|}{\|(\sqrt{-3})^{-1}c\|^{\rho-1/6}}$$

$$=\sum_{c}\frac{3^{2/3}|G(c)|}{\|(\sqrt{-3})^{-1}c\|^{\rho-1/6}\|c\|^{2/3}}=3^{\rho+1/2}\sum_{c}\frac{|G(c)|}{\|c\|^{\rho+1/2}}$$

$$=3^{\rho+1/2}\sum_{c}\frac{1}{\|c\|^{\rho}}=3^{\rho+1/2}\frac{\zeta_*(\rho)}{\zeta_*(2\rho)}. \tag{52}$$

Из (50)–(52) получаем неравенство

$$|R(s)|\le(3^{3\rho-1/2}+3^{\rho+1/2})\,\frac{\zeta_*(\rho)}{\zeta_*(2\rho)}-3^{3\rho-1/2}\bigl(1+4^{-\rho}\bigr). \tag{53}$$

Из (48) следует (46) с оценкой

$$|r(s)|\le\frac{|R(s)|}{3^{3\rho-1/2}\bigl(1-4^{-\rho}\bigr)}$$

и далее, ввиду (53), с оценкой $|r(s)| \le \Delta(\rho)$, где

$$\Delta(\rho) = \frac{(1+3^{1-2\rho})\,\zeta_*(\rho)\,\zeta_*(2\rho)^{-1} - 1 - 4^{-\rho}}{1-4^{-\rho}}. \tag{54}$$

Теперь для доказательства (47) достаточно показать, что $\Delta(\rho) \le \Delta(\sigma)$, т.е. что функция Δ монотонно убывает. Знаменатель в (54), очевидно, монотонно возрастает. Далее, мы имеем

$$\frac{\zeta_*(\rho)}{\zeta_*(2\rho)} \sum_{\substack{c\equiv 1(3)\\ \text{бесквадратно}}} \frac{1}{||c||^{\rho}}$$

$$= 1 + \frac{1}{4^{\rho}} + \left\{ \begin{matrix} \text{сумма монотонно убывающих} \\ \text{положительных слагаемых} \end{matrix} \right\}, \tag{55}$$

откуда видно, что числитель в (54) монотонно убывает. Следовательно, Δ – убывающая функция, что и требовалось.

С помощью системы символьных вычислений Maple не сложно вычислить правую часть (47). Так мы находим, что в точке $\sigma = 1.3533$ правая часть (47) равна $0.998\ldots$. Отсюда и из разложений (46), (44) немедленно следует последнее утверждение теоремы.

7. Функциональные уравнения

Рассмотрим вопрос о вычислении значений функции $L(\tau;\cdot)$. Мы имеем представление $L(\tau;s)$ рядом Дирихле (3), удобное для вычислений только для s с достаточно большой вещественной частью. В критической полосе, т.е. для s с $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$, это представление не применимо. Другое представление получено нами в доказательстве функционального уравнения для $L(\tau;\cdot)$. Это формула (42), согласно которой

$$\Omega(s)L(\tau;s) = \frac{1}{2s-5/3} - \frac{1}{2s-1/3} + X(s) + X(1-s) \tag{56}$$

для всех $s \in \mathbb{C}$. Значения функции Ω, определенной в (36), могут быть вычислены по формуле Стирлинга. Для функции X мы имеем представление осциллирующим интегралом

$$X(s) = \int_1^{\infty} \left\{ \Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3} \right\} v^{2s-2}\,dv, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{57}$$

Если иметь процедуру вычисления Θ_{K-P} (а мы имеем), то интеграл можно аппроксимировать посредством какой-либо кубатурной формулы. Пока мнимая часть $\mathrm{Im}\, s$ числа s не велика, такой подход вполне приемлем. Однако, с ростом $|\mathrm{Im}\, s|$ приходится увеличивать число узлов и точность вычислений; при этом объём вычислений очень скоро превосходит разумные границы. Можно подставить в (57) разложение Фурье (1) и проинтегрировать почленно, но это не многим лучше. Существенно лучшее представление для функции $L(\tau;\cdot)$, пригодное для вычисления ее значений без каких-либо ограничений, может быть получено на основе следующей теоремы. Пусть $s, z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ и пусть

$$\Omega(s,z) = (6\pi)^{1-2s} \int_z^\infty Ai\bigl(x^{2/3}\bigr)\, x^{2s-4/3}\, dx, \tag{58}$$

где путь интегрирования проходит в полуплоскости $\mathrm{Re}\, x > 0$ от точки z к вещественной оси и, далее, вдоль вещественной оси к ∞. Функция под знаком интеграла в (58) голоморфна, так что интеграл не зависит от остающегося произвола в выборе контура.

Теорема. *Пусть $s, \eta \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}\, \eta > 0$. Имеем:*

$$\begin{aligned}\Omega(s) L(\tau; s) = \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3} + \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}\, \Omega(s, 6\pi|\nu|\eta)& \\ + \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{1-s}}\, \Omega(1-s, 6\pi|\nu|\eta^{-1})&\end{aligned} \tag{59}$$

с Ω из (36), (58) и с суммированием по всем $\nu \in (\sqrt{-3}\,)^{-3}\mathcal{O} \setminus \{0\}$. Ряды в правой части (59) сходятся абсолютно и локально равномерно.

Доказательство. При любом фиксированном s, если $z \to \infty$, оставаясь в секторе $|\arg(z)| < \pi/2 - \varepsilon$ с некоторым фиксированным вещественным $\varepsilon > 0$, то $|\Omega(s,z)|$ убывает быстрее, чем $|z|^{-n}$ с любым целым n. Это легко следует из (31). Поэтому, ряды в правой части (59) сходятся абсолютно и локально равномерно и представляют голоморфные функции. Вместе с тем, мы находим что для доказательства теоремы достаточно доказать (59) в предположении $\mathrm{Re}\, s > 1$, где, как мы знаем (см. (38) и (43))

$$\Omega(s)L(\tau;s) = \int\limits_0^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\} v^{2s-2}\,dv. \tag{60}$$

Рассмотрим интеграл в (60). Вместо интегрирования по вещественной положительной полуоси, мы можем проинтегрировать по отрезку вещественной оси от 0 до некоторого ε, затем по некоторой кривой от ε до точки η, затем по некоторой кривой от η до какой-то точки ε' на вещественной оси и далее вдоль вещественной оси от точки ε' до ∞. Обе кривые – от ε до η и от η до ε' – должны оставаться в полуплоскости $\mathrm{Re}\, v > 0$, в которой функция под знаком интеграла в (60) голоморфна. Точка η разбивает контур интегрирования на две части – от 0 до η и от η до ∞. В соответствии с этим разбиением, имеем

$$\Omega(s)L(\tau;s) = X_\eta(s) + Y_\eta(s), \tag{61}$$

где

$$X_\eta(s) = \int\limits_\eta^\infty \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\} v^{2s-2}\,dv, \tag{62}$$

$$Y_\eta(s) = \int\limits_0^\eta \bigl\{\Theta_{K-P}(0,v) - v^{2/3}\bigr\} v^{2s-2}\,dv. \tag{63}$$

Для того чтобы вычислить $X_\eta(s)$, подставим в (62) разложение Фурье (1) и проинтегрируем почленно:

$$X_\eta(s) = (6\pi)^{2/3} \sum_\nu \tilde{\tau}(\nu) \int\limits_\eta^\infty Ai\bigl((6\pi|\nu|v)^{2/3}\bigr)\, v^{2s-4/3}\,dv.$$

Сделав здесь замену переменной $x = 6\pi|\nu|v$, мы находим, что

$$X_\eta(s) = \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{||\nu||^s}\, \Omega(s, 6\pi|\nu|\eta) \tag{64}$$

с Ω из (58). В интеграле (63) сделаем замену $u = v^{-1}$. При этой замене путь интегрирования трансформируется в путь, лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} u > 0$ и проходящий от точки η^{-1} к вещественной оси и далее вдоль вещественной оси к ∞. Воспользовавшись (2), мы находим:

$$Y_\eta(s) = \int_{\eta^{-1}}^{\infty} \left\{\Theta_{K-P}(0, u^{-1}) - u^{-2/3}\right\} u^{-2s}\, du$$

$$= \int_{\eta^{-1}}^{\infty} \left\{\Theta_{K-P}(0, u) - u^{-2/3}\right\} u^{-2s}\, du$$

$$= \int_{\eta^{-1}}^{\infty} \left\{\Theta_{K-P}(0, u) - u^{2/3}\right\} u^{-2s}\, du + \int_{\eta^{-1}}^{\infty} \left\{u^{2/3} - u^{-2/3}\right\} u^{-2s}\, du$$

$$= X_{\eta^{-1}}(1-s) + \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3}. \tag{65}$$

Из (61), (64) и (65) следует утверждение теоремы.

Посредством не очень сложных преобразований интеграла в (58) можно показать, что уравнение (59) относится к классу функциональных уравнений из [9], [10]. Метод, примененный нами для вывода уравнения (59), заимствован из [11]. Равенство (56) – частный случай (59), соответствующий $\eta = 1$. Преимущество (59) перед (56) состоит в возможности регулировать поведение рядов в правой части (59) выбором свободного параметра η.

8. О вычислении интегралов Ω

Чтобы использовать теорему из §7 для вычисления значений функции $L(\tau;\cdot)$ мы должны уметь вычислять значения функции Ω из (58). Можно воспользоваться разложением (31) и получить

$$\Omega(s,z) = (6\pi)^{1-2s} \int_z^{\infty} \exp(-2x/3) \Big\{ \sum_{0\leqslant n\leqslant h} \frac{C_n}{x^{n+1/6}} + R_h(x)\Big\}\, x^{2s-4/3}\, dx$$

$$= (6\pi)^{1-2s} \sum_{0\leqslant n\leqslant h} C_n \int_z^{\infty} \exp(-2x/3)\ x^{2s-3/2-n} dx + \tilde{R}_h(s,z), \tag{66}$$

где h – произвольное целое число ≥ 0 и

$$\tilde{R}_h(s,z) = (6\pi)^{1-2s} \int\limits_z^\infty \exp(-2x/3)\, R_h(x)\, x^{2s-4/3}\, dx. \tag{67}$$

Интегралы в (66) представляют неполную гамма-функцию (26). Точнее,

$$\int\limits_z^\infty \exp(-2x/3)\, x^{2s-3/2-n}\, dx = (3/2)^{2s-1/2-n}\Gamma(2s-1/2-n, 2z/3).$$

Так мы получаем

$$\Omega(s,z) = (4\pi)^{1-2s} \sum_{0\leqslant n\leqslant h} \tilde{C}_n \Gamma(2s-1/2-n, 2z/3) + \tilde{R}_h(s,z), \tag{68}$$

где $\tilde{C}_n = (2/3)^{n-1/2}C_n$ с C_n из (30). Интегралы (67) оцениваются с помощью (32), (33). Значения неполной гамма-функции вычисляются известными методами. Процедура вычисления содержится в Maple. Разложение (68) может быть использовано для вычислений, но с некоторыми ограничениями на s и z. В частности, оно неудобно, если абсолютная величина z мала. В этом последнем случае, вместо (31) удобнее воспользоваться разложением (28). Мы имеем (ср. (37) с (58))

$$\Omega(s,z) = \Omega(s) - (6\pi)^{1-2s} \int\limits_0^z Ai\big(x^{2/3}\big)\, x^{2s-4/3}\, dx, \tag{69}$$

где интегрирование осуществляется по отрезку вещественной оси от 0 до некоторого $\varepsilon > 0$ и далее от ε до z вдоль некоторой кривой, лежащей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, x > 0$. Чтобы обеспечить абсолютную сходимость интеграла в (69), мы предположим, что $\mathrm{Re}\, s > 1/6$. Мы можем подставить (28) в интеграл в (69), проинтегрировать почленно и так получить для него представление степенным рядом:

$$\int\limits_0^z Ai\big(x^{2/3}\big)\, x^{2s-4/3}\, dx = Ai(0) \sum_{k\geqslant 0} \tilde{P}_k\, \frac{z^{2s+2k-1/3}}{2s+2k-1/3}$$
$$+Ai'(0) \sum_{k\geqslant 0} \tilde{Q}_k\, \frac{z^{2s+2k+1/3}}{2s+2k+1/3},$$

где $\tilde{P}_k = P_k/(3k)!$ и $\tilde{Q}_k = Q_k/(3k+1)!$ с P_k и Q_k из (28). Это представление имеет место для всех $s, z \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > 1/6$ и удобно для вычислений, если только абсолютная величина z не слишком велика.

Литература

1. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory*, Lect. in Math. Kyoto Univ. **2** (1969).
2. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series* I, II, J. reine und angew. Math., **296** (1977), 125–161, 217–220.
3. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Lect. Notes in Math. 1677, Springer-Verlag, 1998.
4. D. A. Hejhal, *Zeros of Epstein zeta functions and supercomputers.* In: Proc. of the International Congress of Math., vol. 1, 2 (Berkley, Calif., 1986), 1362–1384, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).
5. A. Strömbergsson, *Studies in the analytic and spectral theory of automorphic forms.* Uppsala dissertations in math. 17, Uppsala Univ. (2001).
6. K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory.* Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, 1982.
7. A. Weil, *Basic number theory.* Springer-Verlag, 1967.
8. F. W. J. Olver, *Introduction to asymptotics and special functions.* Academic Press, New York and London, 1974.
9. А. Ф. Лаврик, *О функциональных уравнениях функций Дирихле*, Изв. АН СССР **31**, No. 2 (1967), 431–442.
10. А. Ф. Лаврик, *Приближённые функциональные уравнения функций Дирихле*, Изв. АН СССР **32**, No. 1 (1968), 134–185.
11. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **76** (1978), 124–158.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 22 мая 2006 г.