Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Г. В. Кузьмина

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧАМ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

**Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина**

Введение

Задачам об экстремальном разбиении посвящено большое число исследований (см., например, обзорные ствтьи [1, 2]. При достаточно большом числе свободных параметров эти задачи представляют значительную трудность. В последние годы значительное внимание уделялось задачам об экстремальном разбиении, в которых свободные параметры – полюсы ассоциированных квадратичных дифференциалов – удовлетворяют тем или иным условиям симметрии. К первым исследованиям в этом круге вопросов относятся работы В. Н. Дубинина [3, 4] (о некоторых из этих результатов говорится ниже). При этом В. Н. Дубинин использовал предложенный им симметризационный подход – разделяющее преобразование конденсаторов и областей. Альтернативный экстремальноıметрический подход, позволяющий избежать применения несколько сложной симметризационной техники, был предложен Е. Г. Емельяновым [5]. Этот подход основывается на установленной в [5] связи между различными задачами об экстремальном разбиении, его применение связано с анализом структуры траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала. Подход Е. Г. Емельянова получил ряд интересных приложений (см. работы, опубликованные в настоящей серии "Записок научных семинаров ПОМИ").

В настоящей работе излагается простой экстремально-метрический подход к задачам об экстремальном разбиении. Этот подход основывается на конструировании допустимой метрики проблемы модуля, равносильной рассматриваемой задаче об экстремальном разбиении, при помощи общих свойств траекторий ассоциированых квадратичных дифференциалов в более простых задачах об экстремальном разбиении.

В §1 рассматриваются задачи об экстремальном разбиении на двусвязные области, в §2 – задачи о разбиении на двусвязные и односвязные области. В §3 кратко излагаются некоторые приложения предложенного подхода к задачам о произведении степеней конформных радиусов.

Ниже через $\mathcal{M}(D)$ обозначается модуль двусвязной области D относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты: $\mathcal{M}(D) = \frac{1}{2\pi}\log M(D)$, где $M(D)$ – конформный модуль области D. Через $\mathcal{M}(D,a)$ обозначается приведенный модуль односвязной области D относительно точки $a \in D : \mathcal{M}(D,a) = \pm\frac{1}{2\pi}\log R(D,a)$, где $R(D,a)$ – конформный радиус области D относительно точки a, знак "+" имеет место в случае $a \neq \infty$, "−" – в случае $a = \infty$.

§1. Задачи об экстремальном разбиении на двусвязные области

1.1. Пусть $\Gamma_j, j = 1, \ldots, n,$ – система неналегающих дуг на окружности $|z| = 1$ с центрами в точках a_j, перенумерованных в порядке возрастания $\arg z$: $0 = \arg a_1 < \cdots < \arg a_n < 2\pi$. Пусть $2\pi\mu$ – угловая мера каждой из дуг Γ_j, $\mu < 1/n$. Пусть $\mathcal{D}_1$ – семейство систем неналегающих двусвязных областей D_j, $j = 1, \ldots, n$, на $\overline{\mathbb{C}}$, где область D_j ассоциирована с гомотопическим классом замкнутых жордановых кривых, отделяющих дугу Γ_j от дуг Γ_k при $k \neq j$. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}(D_j) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}_1$.

Положим

$$\arg(a_{j+1}/a_j) = 2\pi\lambda_j,$$

где

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Максимум $\mathcal{M}_1^*$ суммы* (1) *в семействе $\mathcal{D}_1$ при любом $n \geq 2$ реализуется только в случае симметричного расположения дуг Γ_j, $j = 1, \ldots, n$, на окружности $|z| = 1$:*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n.$$

При $n \geq 3$ каждая из экстремальных областей $D_j^*, j = 1, \ldots, n$, имеет внутренней границей дугу Γ_j, а внешней границей – стороны угла, образованного двумя лучами, выходящими из начала координат под углом $2\pi/n$ друг к другу, и содержащего центр a_j дуги Γ_j на своей биссектрисе. Области D_j^*, $j = 1, \ldots, n$, представляют собой систему кольцевых областей квадратичного дифференциала

$$Q_1(z)dz^2 = -\frac{z^{n-2}dz^2}{(z^n - e^{i\pi n\mu})(z^n - e^{-i\pi n\mu})}. \tag{3}$$

При $n = 2$ каждая экстремальная пара областей представляет собой подобласти кольцевой области дифференциала (3), *имеющие своим общим граничным континуумом регулярную траекторию дифференциала* (3). *Для искомого максимума имеем равенство*

$$\mathcal{M}_1^* = \frac{n}{4} K\big[\cos(\pi\mu n/2)\big] / K'\big[\cos(\pi\mu n/2)\big],$$

где $K(k)$ – эллиптический интеграл первого рода с модулем k, $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$.

Доказательство. Пусть S_k – угол, образованный лучами, выходящими из начала координат и проходящими через центры a_k и a_{k+1} дуг Γ_k и Γ_{k+1}, соответственно. Тогда $2\pi/\lambda_k$ – внутренний угол области S_k в начале координат. При отображении

$$w = f_k(z) = (z/a_k)^{1/(2\lambda_k)}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а частям дуг Γ_k и Γ_{k+1}, принадлежащим углу S_k, – дуги γ_k и γ_{k+1} окружности $|w| = 1$, имеющие своими концами соответственно точки 1 и -1. Пусть $\widetilde{\gamma}_k$ и $\widetilde{\gamma}_{k+1}$ – дуги окружности $|w| = 1$, получаемые присоединением к дугам γ_k и γ_{k+1} дуг, симметричных с ними относительно вещественной оси, и точек 1, -1, соответственно,

$$\operatorname{mes} \widetilde{\gamma}_k = \operatorname{mes} \widetilde{\gamma}_{k+1} = \pi\mu/\lambda_k.$$

Пусть D_k^w – двусвязная область, граничными континуумами которой служат дуги $\widetilde{\gamma}_k$ и $\widetilde{\gamma}_{k+1}$:

$$D_k^w = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\widetilde{\gamma}_k \cup \widetilde{\gamma}_{k+1}).$$

D_k^w – кольцевая область квадратичного дифференциала

$$q_k^{(1)}(w)dw^2 = -\frac{dw^2}{(w^2 - e^{2i\beta_k})(w^2 - e^{-2i\beta_k})},$$

где

$$\beta_k = \frac{\pi\mu}{2\lambda_k}. \tag{4}$$

Пусть $\rho_k^{(1)}(w)|dw|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(D_k^w)$:

$$\rho_k^{(1)}(w)|dw| = c_k^{(1)}\,|q_k^{(1)}(w)|^{1/2}|dw|,$$

где постоянная $c_k^{(1)}$ удовлетворяет условию: длина регулярной траектории дифференциала $q_k^{(1)}(w)dw^2$ в $\rho_k^{(1)}$-метрике равна 1. Пусть $\zeta = g_k(w)$ – отображение области D_k^w на круговое кольцо $\mathcal{K} = \{\zeta : 1 < |\zeta| < M(D_k^w)\}$. По лемме Грётша, имеет место равенство

$$\mathcal{M}(D_k^w) = \mathcal{M}(\Delta_k) + \mathcal{M}(\Delta_{k+1}),$$

где Δ_k и Δ_{k+1} – любые двусвязные области, лежащие в D_k^w и обладающие следующим свойством: при отображении $\zeta = g_k(w)$ областям Δ_k и $\Delta_{k=1}$ соответствуют концентрические круговые кольца, полностью заполняющие кольцо $\mathcal{K}$ (здесь и ниже используются обозначения введения).

Пусть метрика $\rho^{(1)}(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho^{(1)}(z)|dz| = \rho_k^{(1)}(f_k(z))|f_k'(z)||dz|, \quad z \in S_k, k = 1, \dots, n.$$

Простое геометрическое рассуждение, которое приводится ниже, показывает, что метрика $\rho^{(1)}(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум суммы (1) в семействе $\mathcal{D}_1$. Заметим, что из единственности экстремальной метрики проблемы модуля и условий задачи следует, что экстремальная система областей семейства $\mathcal{D}_1$ симметрична относительно окружности $|z| = 1$, однако этот факт нами не используется.

Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая на $\overline{\mathbb{C}}$, отделяющая дугу Γ_k от дуг Γ_l при $l \neq k$. Пусть

$$\Gamma^+ = \Gamma \cap S_k, \quad \Gamma^- = \Gamma \cap S_{k-1}.$$

Предположим сначала, что Γ^+ состоит из единственной дуги. Тогда применим теорему Коши к функции $c^{(1)}\sqrt{q_k^{(1)}(f_k(z))}\, f_k'(z)$ и к односвязной области, ограниченной кривой Γ^+, отрезками на границе угла S_k и дугой $\Gamma_k \cap S_k$, проходимой в обоих направлениях. Учитывая, что при отображении $w = f_k(z)$ указанным отрезкам на сторонах угла S_k соответствуют дуги ортогональных траекторий дифференциала $q_k^{(1)}(w)dw^2$, а дуге $\Gamma_k \cap S_k$ соответствует дуга γ_k траектории этого дифференциала, причем длина дуги γ_k (проходимой в обоих направлениях) в метрике $\rho_k^{(1)}(w)\,|dw|$ равна $1/2$, приходим к неравенству

$$\rho^{(1)}\text{-length} \quad \Gamma^+ \geq 1/2. \tag{$*$}$$

Пусть теперь множество Γ^+ указанным выше свойством не обладает. Тогда рассмотрим замкнутый контур, состоящий из дуг множества Γ^+, отрезков на границе угла S_k, соединяющих концы этих дуг, и дуги $\Gamma_k \cap S_k$. Аналогично предыдущему замечаем, что указанный контур содержит дугу, гомотопную на S_k одной из дуг $\Gamma_k \cap S_k$ или $\Gamma_{k+1} \cap S_k$, проходимой в обеих направлениях. Следовательно, неравенство $(*)$ справедливо и в этом случае. Совершенно аналогично доказывается неравенство

$$\rho^{(1)}\text{-length} \quad \Gamma^- \geq 1/2.$$

Таким образом, метрика $\rho^{(1)}(z)|dz|$ является допустимой метрикой рассматриваемой проблемы модуля. Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathcal{M}_1{}^* \leq 1/2 \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}(D_k^w).$$

Точки $-e^{i\beta_k}$, $-e^{-i\beta_k}$ и $e^{i\beta_k}$, $e^{-i\beta_k}$ являются соответственно концами граничных дуг области D_k^w. При отображении

$$w \to \frac{A_k w + B_k}{e^{-i\beta_k} - w}, \quad A_k = \frac{-i(e^{-i\beta_k} + \cos\beta_k)}{\sin\beta_k}, \quad B_k = \frac{-i(e^{-i\beta_k}\cos\beta_k + 1)}{\sin\beta_k},$$

граничные дуги области D_k^w переходят в отрезок $[-1,1]$ и луч $[a_k, \infty]$, где

$$a_k = \frac{1+\cos^2\beta_k}{\sin^2\beta_k}, \qquad \frac{2}{a_k+1} = \sin^2\beta_k.$$

По теореме 5.1 в [6],

$$\log M(D_k^w) = \pi K^{'}(\sin\beta_k)/K(\sin\beta_k) = \pi K(\cos\beta_k)/K^{'}(\cos\beta_k),$$

где β_k определяется равенством (4). Итак, требуется найти максимум суммы

$$\sum_{k=1}^{n} K(\omega_k)/K^{'}(\omega_k), \quad \omega_k = \cos\beta_k,$$

при условии (2).

Образуем функцию

$$\mathcal{F}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} K(\omega_k)/K^{'}(\omega_k) + C\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - 1\Big),$$

где C – постоянная, и рассмотрим систему

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_k} = 0. \tag{5}$$

Используя известные в теории эллиптических интегралов равенства

$$\frac{dK(\omega)}{d\omega} = \frac{E(\omega) - {\omega'}^2 K(\omega)}{\omega{\omega'}^2}, \tag{6}$$

$$K(\omega)E^{'}(\omega) + K^{'}(\omega)E(\omega) - K(\omega)K^{'}(\omega) = \pi/2,$$

находим

$$\frac{d}{d\omega}\frac{K(\omega)}{K'(\omega)} = \frac{\pi}{2\omega{\omega'}^2K^2(\omega)}. \tag{7}$$

Теперь систему (5) можем записать в виде

$$\frac{\beta_k^2}{\sin\beta_k\cos\beta_k K^2(\sin\beta_k)} + C = 0, \quad \beta_k \in (0,\pi/2).$$

Покажем, что функция

$$y(\beta) = \frac{\beta^2}{\sin 2\beta K^2(\sin\beta)},$$

$$y(0) = 0, \quad y(\beta) \to +\infty \quad \text{при} \quad \beta \to \pi/2,$$

строго возрастает на интервале $(0, \pi/2)$.

Используя (6), находим

$$\frac{y'(\beta)}{y(\beta)} = \frac{4y_1(\beta)}{\sin 2\beta},$$

где

$$y_1(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2\beta} - \frac{E(\sin\beta)}{K(\sin\beta)}.$$

При $0 < \beta < 0.94$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2\beta} > 1, \quad \frac{E(\sin\beta)}{K(\sin\beta)} < 1,$$

а при $\beta > 1.15$

$$\frac{E(\sin\beta)}{K(\sin\beta)} < \frac{1}{2}.$$

Наконец, при $0.94 \leq \beta \leq 1.15$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2\beta} > 0.82, \quad \frac{E(\sin\beta)}{K(\sin\beta)} < 0.64.$$

Итак, функция $y(\beta)$ строго возрастает на интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому система (5) имеет единственное решение

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n. \tag{8}$$

При этом сумма (4) достигает максимума. Из условия (8) следует также, что квадратичный дифференциал (3) определяет экстремальную конфигурацию, и находится выражение для искомого максимума.

1.2. При $n \geq 2$, $0 < r < 1$ пусть L_j, $j = 1, \ldots, n$, – система радиальных отрезков, симметричных относительно окружности $|z| = 1$ и перенумерованных в порядке возрастания $\arg z$:

$$L_j = \bigl\{z : r < |z| < 1/r, \arg z = \alpha_j\bigr\},$$

где

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_{j+1} - \alpha_j = 2\pi\lambda_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad (\alpha_{n+1} = \alpha_1),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Пусть $\mathcal{D}_2$ – семейство систем неналегающих двусвязных областей D_j на $\overline{\mathbb{C}}$, где область D_j ассоциирована с классом замкнутых жордановых кривых, отделяющих отрезок L_j от отрезков L_k при $k \neq j$. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}(D_j) \tag{9}$$

в семействе $\mathcal{D}_2$.

Теорема 2. *При любом $n \geq 2, r \in (0,1)$ максимум $\mathcal{M}_2^*$ суммы (9) в семействе $\mathcal{D}_2$ реализуется только в симметричном случае*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n.$$

При $n \geq 3$ граница каждой из экстремальных областей ${D_j}^*$, $j = 1, \ldots, n$, состоит из двух лучей, выходящих из начала координат под углом $2\pi/n$ друг к другу, и отрезка L_j, лежащего на биссектрисе угла между указанными лучами и имеющего свои концы на окружностях $|z| = r$ и $|z| = 1/r$. Области ${D_j}^*$, $j = 1, \ldots, n$, представляют собой систему кольцевых областей квадратичного дифференциала

$$Q_2(z)dz^2 = \frac{z^{n-2}dz^2}{(z^n - r^n)(1/r^n - z^n)}. \tag{10}$$

При $n = 2$ каждая экстремальная пара областей представляет собой подобласти кольцевой области дифференциала (10), имеющие своей общей граничной компонентой регулярную траекторию этого дифференциала. Для искомого максимума имеем равенство

$$\mathcal{M}_2^* = \frac{n}{4} K\Big(\frac{2r^{n/2}}{1+r^n}\Big) \Big/ K'\Big(\frac{2r^{n/2}}{1+r^n}\Big).$$

Доказательство. Пусть S_k – угол, образованный лучами, выходящими из начала координат и содержащими отрезки L_k и L_{k+1}. При отображении

$$w = f_k(z) = (e^{-i\alpha_k} z)^{1/(2\lambda_k)}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а отрезкам L_k и L_{k+1} – отрезки $I_k = [x_k, 1/x_k]$ и $I'_k = [-x_k, -1/x_k]$, где

$$x_k = r^{1/(2\lambda_k)}.$$

Пусть $D_k^w = \overline{\mathbb{C}} \setminus [I_k \cup I'_k]$, D_k^w – кольцевая область квадратичного дифференциала

$$q_k^{(2)}(w)\, dw^2 = -\frac{dw^2}{(w^2 - x_k^2)(w^2 - 1/x_k^2)}.$$

Пусть $\rho_k^{(2)}(w)|dw|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(D_k^w) : \rho_k^{(2)}(w)|dw| = c_k^{(2)}\, |q_k^{(2)}(w)|dw|$, где $c_k^{(2)}$ – положительная постоянная. Пусть метрика $\rho^*(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho^{(2)}(z)|dz| = \rho_k^{(2)}(f_k(z))|f'_k(z)||dz|, \quad z \in S_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Используя простые факты о структуре траекторий квадратичного дифференциала $q_k^{(2)}(f_k(z))f'^2(z)dz^2$, также как и при доказательстве теоремы 1 убеждаемся, что метрика $\rho^{(2)}(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум $\mathcal{M}_2^*$ суммы (9) в семействе $\mathcal{D}_2$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathcal{M}_2^* \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}(D_j^w).$$

При преобразовании

$$w \to \frac{(3 + x_k^2)x_k w + 1 + 3x_k^2}{(1 - x_k^2)(1 - x_k w)}$$

граничным континуумам области D_k^w соответствуют отрезок $[-1, 1]$ и луч $[a_k, \infty]$, где

$$a_k = \frac{1 + 6x_k^2 + x_k^4}{(1 - x_k^2)^2}.$$

Полагая

$$\frac{2}{a_k + 1} = \Big(\frac{1 - x_k^2}{1 + x_k^2}\Big)^2 = {\omega_k}'^2, \quad \omega_k^2 = \frac{4x_k^2}{(1 + x_k^2)^2},$$

по теореме 5.1 в [6] получаем

$$\log M(D_k^w) = \pi K(\omega_k)\big/K'(\omega_k).$$

Введем функцию

$$\mathcal{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} K(\omega_k)/K'(\omega_k) + C\Big[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k - 1\Big],$$

где C – постоянная, и рассмотрим систему

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_k} = \frac{d}{d\omega_k}\big[K(\omega_k)/K'(\omega_k)\big]\frac{\partial \omega_k}{\partial \lambda_k} + C = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Используя выражение (7) и равенство

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \lambda_k} = -\frac{1}{\lambda_k}\omega_k \omega_k' \log x_k,$$

систему (11) можем записать в виде

$$(\log r)\big[\lambda_k^2\, \omega_k'\, K^2(\omega_k')\big]^{-1} + C = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

C – постоянная. Положим

$$X(\lambda) = \{\lambda^2 \omega' K^2(\omega')\}^{-1}, \quad \omega' = \frac{1 - r^{1/\lambda}}{1 + r^{1/\lambda}}.$$

Используя выражение (6) и равенство

$$\frac{d\omega'}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\omega^2 \log x, \quad x = r^{1/(2\lambda)},$$

находим

$$\frac{X'(\lambda)}{X(\lambda)} = -\frac{2}{\lambda \omega'}\bigg[\Big(\frac{E(\omega')}{K(\omega')} - \frac{\omega'^2}{2}\Big)\log x + \omega'\bigg].$$

Положим $\varkappa = \omega'$, $\varkappa' = \omega$ и исследуем функцию

$$Y = \left(\frac{E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - \varkappa'^2\right)\log x + \varkappa.$$

Используя равенства

$$\frac{d}{d\varkappa}E(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}(E(\varkappa) - K(\varkappa))$$

и (6), получаем

$$\frac{dY}{d\varkappa} = -\frac{1}{\varkappa \varkappa'^2}\Big(\frac{E}{K} - \varkappa'^2\Big)^2 \log x - \Big(\frac{E}{K} - \frac{\varkappa'^2}{2}\Big)\frac{x}{\varkappa'^2} + 1.$$

Следовательно, обозначая

$$\frac{E}{K} - \varkappa'^2 = y,$$

имеем

$$\frac{dY}{d\varkappa} = -\frac{\log x}{\varkappa\varkappa'^2}\left(y + \frac{\varkappa x}{2\log x}\right)^2 - \frac{\varkappa}{\log^2 x}\left[\frac{\varkappa r^2}{4} + \varkappa'^2\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\log x\right].$$

Принимая во внимание равенства $\varkappa = (1 - x^2)/(1 + x^2)$, $\varkappa' = (2x)/(1 + x^)$, находим

$$\frac{\varkappa x^2}{4} + \varkappa'^2\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\log x = \frac{x^2}{4(1 + x^2)^2}\left[1 - x^4 + 16\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\log x\right]. \quad (12)$$

Функция в квадратных скобках в правой части (12) строго возрастает от $-\infty$ до 0 в интервале $0 < x < 1$. Следовательно, Y является строго возрастающей функцией от $\varkappa$ при всех рассматриваемых значениях $\varkappa$. Поэтому Y – строго возрастающая функция от λ при всех $0 < \lambda < 1$. Так как $Y = 0$ при $\lambda = 0$ и $Y = 1$ при $\lambda = 1$, то $Y > 0$ при $0 < \lambda < 1$. Отсюда следует, что $X(\lambda)$ – строго возрастающая функция от λ при $0 < \lambda < 1$ и потому система (11) имеет единственное решение $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$.

Доказательство теоремы 2 теперь завершается аналогично предыдущему.

§2. Смешанные задачи

2.1. Пусть $n \geq 1$, $\mu \leq 1/n$. Пусть a_j и b_j, $j = 1, \ldots, n$, – чередующиеся точки на окружности $|z| = 1$:

$$0 = \arg a_1 < \arg b_1 < \cdots < \arg a_n < \arg b_n < 2\pi.$$

Пусть выполнены условия

$$\arg\frac{b_j}{a_j} = 2\pi\widetilde{\lambda}_j, \quad \arg\frac{a_{j+1}}{b_j} = 2\pi\lambda_j, \quad \lambda_j + \widetilde{\lambda}_j > \mu, \quad \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j + \widetilde{\lambda}_j) = 1.$$

Пусть Γ_j, $j = 1, \ldots, n$, – дуги окружности $|z| = 1$ с центрами соответственно в точках a_j равной угловой меры $2\pi\mu$:

$$\Gamma_j = \big\{z : |z| = 1,\ \arg a_j - \pi\mu \leq \arg z \leq \arg a_j + \pi\mu\big\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\mathcal{D}_3$ – семейство систем неналегающих двусвязных областей D_j, $j = 1, \ldots, n$, и односвязных областей $\widetilde{D}_j$, $j = 1, \ldots, n$, где область D_j ассоциирована с классом замкнутых жордановых кривых, отделяющих дугу Γ_j от дуг Γ_k при $k \neq j$ и точек b_j, $j = 1, \ldots, n$, а область $\widetilde{D}_j$, $b_j \in \widetilde{D}_j$, ассоциирована с классом дуг, гомотопных точечной кривой в b_j. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$\sum_{j=1}^{n} [\mathcal{M}(D_j) + \mathcal{M}(\widetilde{D}_j, b_j)] \tag{13}$$

в семействе $\mathcal{D}_3$.

Теорема 3. *Максимум $\mathcal{M}_3^*$ суммы* (13) *в семействе $\mathcal{D}_3$ реализуется только в случае*

$$\lambda_j = \widetilde{\lambda}_j = 1/(2n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

При $n \geq 2$ экстремальная система областей D_j^*, $\widetilde{D}_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, представляет собой систему кольцевых и круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_3(z)dz^2 = -\frac{z^{2n-2}dz^2}{(z^2-1)^2(z^n + e^{i\pi\mu n})(z^n + e^{-i\pi\mu n})}. \tag{14}$$

При $n = 1$ каждая экстремальная пара областей D_1^*, $\widetilde{D}_1^*$ представляет собой подобласти круговой области дифференциала (14), *имеющие своей общей границей регулярную траекторию этого дифференциала (двусвязная область D_1^* может быть вырожденной. Для искомого максимума имеем равенство*

$$\mathcal{M}_3^* = \frac{n}{2\pi} \log\Big[\frac{1}{4n} \operatorname{tg}(\pi\mu n/2)\Big].$$

Доказательство. Рассматриваемая задача, как и задачи, рассмотренные выше, представляет собой экстремально-метрическую проблему в семействе всех допустимых метрик. Из результатов единственности метода экстремальной метрики и условий задачи следует, что экстремальная конфигурация данной задачи симметрична относительно окружности $|z| = 1$. Для определения допустимой метрики аналогично предыдущим случаям воспользуемся следующим построением.

Пусть S_k и $\widetilde{S}_k$ – углы с вершинами в начале координат, стороны которых содержат соответственно точки a_{k+1}, b_k и точки b_k, a_k. При отображении

$$w = f_k(z) = \Big(\frac{z}{b_k}\Big)^{1/(2\lambda_k)}$$

углу S_k оответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а точке b_k и дуге $\Gamma_k \cap S_k$ – точка 1 и дуга окружности $|w| = 1$ с концами -1 и $e^{i(\pi-\beta_k)}$, где

$$\beta_k = \frac{\pi\mu}{2\lambda_k}.$$

Пусть $\Delta_k = \overline{\mathbb{C}}^w \setminus \Gamma_k^w$, где $\Gamma_k^w = \{w : |w| = 1, \pi - \beta_k \le \arg w \le \pi + \beta_k\}$. Δ_k – круговая область для квадратичного дифференциала

$$q_k^{(3)}(w)dw^2 = -\frac{c_k^{(3)}}{4\pi^2}\frac{dw^2}{(w-1)^2(w+e^{i\beta_k})(w+e^{-i\beta_k})}, \quad c_k^{(3)} = 4\cos^2\frac{\beta_k}{2}.$$

Аналогично, при отображении

$$w = \widetilde{f}_k(z) = \left(\frac{z}{b_k}\right)^{1/(2\widetilde{\lambda}_k)}$$

углу $\widetilde{S}_k$ соответствует нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$, а точке b_k и дуге $\Gamma_{k-1} \cap \widetilde{S}_k$ – точка 1 и дуга окружности $|w| = 1$ с концами -1 и $e^{i(\pi+\beta_k)}$, где

$$\widetilde{\beta}_k = \frac{\pi\mu}{2\widetilde{\lambda}_k}.$$

Пусть $\widetilde{\Delta}_k = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_k^w$, где $\Gamma_k^w = \{w : |w| = 1,\ \pi - \widetilde{\beta}_k \le \arg w \le \pi + \widetilde{\beta}_k\}$. $\widetilde{\Delta}_k$ – круговая область для квадратичного дифференциала

$$\widetilde{q}_k^{(3)}(w)dw^2 = -\frac{\widetilde{c}_k^{(3)}}{4\pi^2}\ \frac{dw^2}{(w-1)^2(w+e^{i\widetilde{\beta}_k})(w+e^{-i\widetilde{\beta}_k})}, \quad \widetilde{c}_k^{(3)} = 4\cos^2\frac{\widetilde{\beta}_k}{2}.$$

Пусть метрика $\rho^{(3)}(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho^{(3)}(z)|dz| = \begin{cases} |q_k^{(3)}(f_k(z))|^{1/2}|f_k'(z)||dz|, & z \in S_k; \\ |\widetilde{q}_k^{(3)}(\widetilde{f}_k(z))|^{1/2}|\widetilde{f}_k'(z)|dz|, & z \in \widetilde{S}_k. \end{cases}$$

Незначительно видоизменяя рассуждение доказательства теоремы 1, убеждаемся, что метрика $\rho^{(3)}(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум $\mathcal{M}_3^*$ суммы (13) в семействе $\mathcal{D}_3$. Используя этот факт, а также принимая во внимание изменение радиусов окрестностей точек b_k при отображениях $z \to f_k(z)$ и $z \to \widetilde{f}_k(z)$, приходим к неравенству

$$\mathcal{M}_3^* \le \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\{\log R(\Delta_k, 1) + \log R(\widetilde{\Delta}_k, 1) + \log(2\lambda_k) + \log(2\widetilde{\lambda}_k)\}. \quad (15)$$

Величины $R(\Delta_k, 1)$ и $R(\widetilde{\Delta}_k, 1)$ нетрудно найти непосредственно. Действительно, при отображении

$$t_k = \frac{A(w-1)}{w+e^{i\beta_k}}, \quad A = \frac{i}{2} e^{i\beta_k/2} \sin\frac{\beta_k}{2}$$

области Δ_k и точке $w = 1$ соответствуют t_k-сфера с разрезом по лучу $[1/4, \infty]$ и точка $t_k = 0$. Следовательно,

$$R(\Delta_k, 1) = |t_k'(1)| = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\beta_k}{2}.$$

Аналогично,

$$R(\widetilde{\Delta}_k, 1) = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\widetilde{\beta}_k}{2}.$$

Неравенство (15) теперь можем записать в виде

$$\mathcal{M}_3^* \leqslant \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \Bigg[\log\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg}\frac{\beta_k}{2}\right) + \\ + \log\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg}\frac{\widetilde{\beta}_k}{2}\right) + \log(2\lambda_k) + \log(2\widetilde{\lambda}_k) \Bigg]. \quad (16)$$

Положим $\widetilde{\lambda}_j = \lambda_{n+j}$. Обозначая сумму в (16) через $\mathcal{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$, образуем функцию

$$\mathcal{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) + C\Big[\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{n+k}) - 1\Big],$$

где C – постоянная. Система

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \mathcal{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) + C = 0$$

имеет вид

$$\chi(\lambda_k) + C = 0, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

где

$$\chi(\lambda) = -\frac{\pi\mu}{\sin\beta} \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}, \quad \beta = \beta(\lambda) = \frac{\pi\mu}{2\lambda} < \frac{\pi}{2}.$$

Имеем

$$\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2 \sin^2\beta} [\beta^2 \cos\beta - 2\beta \sin\beta + \sin^2\beta].$$

Обозначим выражение в квадратных скобках последнего равенства через $\chi_1(\beta)$. Так как $\chi_1(0) = 0$, $\quad \chi_1'(\beta) = -\sin\beta[\beta^2 + 2(1 - \cos\beta)]$, то $\chi_1(\beta) < 0$ при $0 < \beta < \pi$. Следовательно, $\chi(\lambda)$ – строго возрастающая функция от λ при всех $\lambda > \mu/2$. Теперь доказательство теоремы легко завершается.

2.2. Пусть по-прежнему $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ – последовательно расположенные точки на окружности $|z| = 1$:

$$0 = \arg a_1 < \arg b_1 < \dots < \arg a_n < \arg b_n < 2\pi,$$

и пусть

$$\arg\frac{b_k}{a_k} = 2\pi\widetilde{\lambda}_k, \quad \arg\frac{a_{k+1}}{b_k} = 2\pi\lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \widetilde{\lambda}_k) = 1.$$

Пусть $L_1, \dots, L_n$ – радиальные отрезки с концами на окружностях $|z| = r$ и $|z| = 1/r$, содержащие соответственно точки $a_1, \dots, a_n$:

$$L_k = \{z : r < |z| < 1/r, \quad \arg z = \arg a_k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $\mathcal{D}_4$ – семейство систем неналегающих двусвязных областей D_k $(k = 1, \dots, n)$ и односвязных областей $\widetilde{D}_j$, $b_j \in D_j$ $(j = 1, \dots, n)$, где область D_k имеет отрезок L_k своей внутренней границей и ассоциирована с гомотопическим классом замкнутых жордановых кривых, отделяющих L_k от отрезков L_l, $l \neq k$, и точек $b_1, \dots, b_n$, а область $\widetilde{D}_j$ ассоциирована с классом замкнутых жордановых кривых, гомотопных точечной кривой в b_j. Рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$\sum_{j=1}^{n}[\mathcal{M}(D_j) + \mathcal{M}(\widetilde{D}_j, b_j)] \tag{17}$$

в семействе $\mathcal{D}_4$.

Теорема 4. *Максимум $\mathcal{M}_4^*$ суммы (17) в семействе $\mathcal{D}_4$ реализуется только в случае симметричного расположения отрезков L_k и точек b_j : $\lambda_k = \lambda_j = 1/(2n)$ при всех k и j. При $n \geq 2$ экстремальная система областей представляет собой систему кольцевых областей D_k^*, $k = 1, \dots, n$, и круговых областей $\widetilde{D}_j^*$, $b_j = e^{i2(j-1)\pi/n} \in \widetilde{D}_j^*$, $j = 1, \dots, n$, квадратичного дифференциала*

$$Q_4(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{z^{2n-2}dz^2}{(z^n - 1)^2(z^n + r^n)(z^n + 1/r^n)}. \tag{18}$$

При $n = 1$ экстремальной является любая пара областей D_1^*, $\widetilde{D}_1^*$, где $\widetilde{D}_1^*$ – односвязная область, $-1 \in \widetilde{D}_1^*$, D_1^* – двусвязная область, заполняющих дополнение отрезка $[r, 1/r]$ до z-сферы и имеющих своей общей границей некоторую регулярную траекторию дифференциала (18) при $n = 1$ (при этом двусвязная область может вырождаться). Для искомого максимума имеем равенство

$$\mathcal{M}_4^* = \frac{n}{2\pi}\Big[\log\frac{4}{n}(1+r^n)/(1-r^n)\Big].$$

Доказательство. Пусть S_k и $\widetilde{S}_k$ – углы с вершинами в начале координат, стороны которых содержат точку b_k и соответственно отрезки L_{k+1} и L_k. Пусть $2\pi\lambda_k$ и $2\pi\widetilde{\lambda}_k$ – угловые меры углов S_k и $\widetilde{S}_k$:

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \widetilde{\lambda}_k) = 1.$$

При отображении

$$w = f_k(z) = \Big(\frac{z}{b_k}\Big)^{1/(2\lambda_k)}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а точке b_k и отрезку L_{k+1} – точка 1 и отрезок $I_k = [-1/x_k, -x_k]$, где $x_k = r^{1/(2\lambda_k)}$. Область $\Delta_k = \overline{\mathbb{C}} \setminus I_k$ является круговой областью для квадратичного дифференциала

$$q_k^{(4)}(w)dw^2 = -\frac{c_k^{(4)}}{4\pi^2}\;\frac{dw^2}{(w-1)^2(w+x_k)(w+1/x_k)}, \quad c_k^{(4)} = \frac{(1+x_k)^2}{x_k}.$$

Аналогично, при отображении

$$w = \widetilde{f}_k(z) = \Big(\frac{z}{b_k}\Big)^{1/(2\widetilde{\lambda}_k)}$$

углу $\widetilde{S}_k$ соответствует нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а точке b_k и отрезку L_k – точка 1 и отрезок $\widetilde{I}_k = [-1/\widetilde{x}_k, -\widetilde{x}_k]$, где $\widetilde{x}_k = r^{1/(2\widetilde{\lambda}_k)}$. Область $\Delta_k = \overline{\mathbb{C}}\setminus\widetilde{I}_k$ – круговая область для квадратичного дифференциала

$$\widetilde{q}_k^{(4)}(w)dw^2 = -\frac{\widetilde{c}_k^{(4)}}{4\pi^2}\;\frac{dw^2}{(w-1)^2(w+\widetilde{x}_k)(w+1/\widetilde{x}_k)}, \quad \widetilde{c}_k^{(4)} = \frac{(1+\widetilde{x}_k)^2}{\widetilde{x}_k}.$$

Пусть метрика $\rho^{(4)}(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho^{(4)}(z)|dz| = \begin{cases} |q_k^{(4)}(f_k(z))|^{1/2}|f_k(z)||dz|, & z \in S_k, \quad k = 1, \dots, n; \\ |q_k^{(4)}(\widetilde{f}_k(z))|^{1/2}|\widetilde{f}_k(z)||dz|, & z \in \widetilde{S}_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что метрика $\rho^{(4)}(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей максимум суммы (17) в семействе $\mathcal{D}_4$. Используя этот факт, а также принимая во внимание искажение окрестностей точек b_k при отображениях $z \to f_k(z)$ и $z \to \widetilde{f}_k(z)$, приходим к неравенству

$$\mathcal{M}_4^* \le \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \big[\log R(\Delta_k, 1) + \log R(\widetilde{\Delta}_k, 1) + \log(2\lambda_k) + \log(2\widetilde{\lambda}_k)\big]. \quad (19)$$

Найдем значения конформных радиусов $R(\Delta_k, 1)$ и $R(\widetilde{\Delta}_k, 1)$. При отображении

$$t_k(w) = \frac{(1-x_k)(w-1)}{4(x_k w + 1)}, \quad t_k(1) = 0, \quad t_k'(1) = \frac{1-x_k}{4(1+x_k)},$$

области Δ_k соответствует t_k-сфера с разрезом по лучу $[-\infty, -1/4]$. Поэтому

$$R(\Delta_k, 1) = 1/t_k'(1) = \frac{4(1+x_k)}{1-x_k}, \quad x_k = r^{1/(2\lambda_k)}.$$

Аналогично,

$$R(\widetilde{\Delta}_k, 1) = \frac{4(1+\widetilde{x}_k)}{1-\widetilde{x}_k}, \quad \widetilde{x}_k = r^{1/(2\widetilde{\lambda}_k)}.$$

Неравенство (19) теперь можем записать в виде

$$\mathcal{M}_4^* \le \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\log \frac{4(1+x_k)}{1-x_k} + \log \frac{4(1+\widetilde{x}_k)}{1-\widetilde{x}_k} + \log(2\lambda_k) + \log(2\widetilde{\lambda}_k)\right].$$

Положим $\widetilde{\lambda}_j = \lambda_{n+j}$. Введем функцию

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} \left[\log \frac{4(1+x_k)}{1-x_k} + \log \frac{4(1+\widetilde{x}_k)}{1-\widetilde{x}_k} + \log(2\lambda_k) + \log 2\lambda_{n+k}\right] \\ &\qquad\qquad + C\left[\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \lambda_{n+k}) - 1\right], \end{aligned}$$

где C – постоянная. Система

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} + C = 0 \tag{20}$$

имеет вид

$$\chi(\lambda_k) + C = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$\chi(\lambda) = \left(-\frac{2x \log x}{1 - x^2} + 1 \right) \frac{1}{\lambda}, \quad x = r^{1/(2\lambda)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Находим

$$\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{2(1 + x^2)x}{(1 - x^2)^2} \chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda),$$

где

$$\chi_1(x) = \sqrt{x} \log x + \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \left(\sqrt{x} - \frac{1 + x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\chi_2(x) = \sqrt{x} \log x + \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \left(\sqrt{x} + \frac{1 + x}{\sqrt{2}} \right).$$

Так как $\log x + \frac{1-x^2}{1+x^2} < 0$ при $0 < x < 1$, то $\chi_1 < 0$. Разбивая интервал $0 < x < 1$ на частичные интервалы и оценивая $\chi_2(x)$ на этих интервалах, убеждаемся, что $\chi_2(x) > 0$ при $0 < x < 1$. Следовательно, $\chi(\lambda)$ строго убывает при $0 < \lambda < 1$ и потому система (20) имеет единственное решение $\lambda_k = 1/(2n)$, $k = 1, \dots, 2n$. Отсюда вытекают остальные утверждения теоремы

§3. Задачи о произведении степеней конформных радиусов

3.1. Задачам, указанным в заглавии, или, что то же, вопросам о максимуме взвешенной суммы приведенных модулей

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \mathcal{M}(D_k, a_k) \tag{21}$$

в семействе всех систем неналегающих односвязных областей D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$, посвящена обширная литература. Результаты в этой задаче при начальных значениях n представляют собой классические теоремы М. А. Лаврентьева, Г. М. Голузина, Л. И. Колбиной и других авторов.

В последние десятилетия задача о максимуме суммы (21) рассматривалась при условии, что расположение точек a_k обладает высокой степенью симметрии. Первые общие результаты в этом направлении принадлежат В. Н. Дубинину [3, 4]. Одним из них является следующая теорема.

Пусть $n \geq 3$, $a_k, k = 1, \ldots, n$, – любые различные точки окружности $|z| = 1$. Пусть $\mathcal{D}^{(1)}$ – семейство всех систем неналегающих односвязных областей D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема A. *Пусть $n \geqslant 3$. В семействе $\mathcal{D}^{(1)}$ справедливо точное неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}(D_k, a_k) \leq \frac{n}{2\pi} \log \frac{4}{n}. \tag{22}$$

Равенство в (22) достигается только в том случае, когда a_k, $k = 1, \ldots, n$, – равноотстоящие точки на окружности $|z| = 1$, а области D_k, $k = 1, \ldots, n$, – углы раствора $2\pi/n$ с вершинами в начале координат, содержащие точки a_k на своих биссектрисах.

Известны различные обобщения теоремы A и другие общие результаты в рассматриваемом круге задач. Эти результаты были получены В. Н. Дубининым [3, 4] методом разделяющего преобразования, Е. Г. Емельяновым и Г. В. Кузьминой методом экстремальной метрики на основании установленной в [5] связи между различными задачами об экстремальном разбиении (см., например, работы [5, 7, 8]). К указанным результатам относится, в частности, точное неравенство для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha^2 \mathcal{M}(D_k, a_k) + \mathcal{M}(\widetilde{D}_k, b_k)]$$

для чередующихся точек a_k, b_k на окружности $|z| = 1$ при любых $n \geqslant 2$ и $0 < \alpha < 1$ в соответствующем семействе систем областей [7, теорема 1]. Применение предложенного экстремально-метрического подхода, связанного с использованием теоремы Коши, приводит к более простым доказательствам упомянутых выше результатов.

3.2. Результатом несколько иного характера является решение задачи о максимуме суммы (21) при равных значениях параметров α_k в том случае, когда отмеченные точки лежат на концентрических окружностях. Указанный максимум выражается в терминах функции $H(\alpha) = \operatorname{cap} E(0, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$, где $E(0, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ – континуум наименьшей емкости, содержащий указанную тройку точек $H(0) = 1/4$, $H(\pi/2) = 1/2$. Остановимся коротко на этом результате.

Пусть $0 < r \leq 1$, $a_1, \dots, a_n$ – точки окружности $|z| = 1/r$, $b_1, \dots, b_n$ – точки окружности $|z| = r$ и пусть выполнены условия

$$0 = \arg a_1 < \arg b_1 < \dots < \arg b_n < 2\pi.$$

Положим при $1 \leq k \leq n$

$$\arg b_k = \arg a_k + 2\pi\lambda_k = \arg a_{k+1} - 2\pi\widetilde{\lambda}_k \quad (a_{k+1} = a_n),$$

где λ_k и $\widetilde{\lambda}_k$ – положительные числа,

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \widetilde{\lambda}_k) = 1.$$

Пусть $\mathcal{D}^{(2)}$ – семейство неналегающих односвязных областей D_k и $\widetilde{D}_k$, где $a_k \in D_k$, $b_k \in \widetilde{D}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема В. *Пусть $n \geq 2$, $0 < r \leq 1$. В семействе $\mathcal{D}^{(2)}$ справедливо точное неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} [\mathcal{M}(D_k, a_k) + \mathcal{M}(\widetilde{D}_k, b_k)] \leq (1/2\pi) \log \left[\frac{1}{n^{2n}} H^{-2n} \Big(\operatorname{arctg} \frac{2r^n}{1 - r^{2n}} \Big) \right]. \quad (23)$$

Равенство в (23) реализуется только при симметричном расположении точек a_k, b_k : $\lambda_k = \widetilde{\lambda}_k = 1/(2n)$ при $k = 1, \dots, n$. При всех $n \geqslant 2$ и $0 < r \leq 1$ экстремальной системой областей служит только система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(z) dz^2 = -\frac{z^{n-2}(z^n + 1/\mu^n)(z^n - \mu^n)}{(z^n - 1/r^n)^2 (z^n + r^n)^2} dz^2,$$

где μ, $0 < \mu < 1$, – решение уравнения

$$\pi^2 \frac{r^2(1/r^2 - \mu^2)(1/r^2 + 1/\mu^2)}{(1/r^2 + r^2)^2} = 1,$$

в случае $r = 1$ *указанной системой является система углов раствора* π/n, *содержащих соответственно точки* $a_k = e^{i2(k-1)/n}$, $b_k = e^{i(2k-1)/n}$, $k = 1, \dots, n$, *на своих биссектрисах.*

При доказательстве этой теоремы в [8] рассматривается разбиении z-сферы на углы $S_k = \{z : \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}$, $k = 1, \dots, n$, содержащие точки b_k, и при помощи указанного выше подхода в каждом из этих углов определяется допустимая метрика проблемы модуля, эквивалентной данной задаче. При этом используется результат о максимуме произведения конформных радиусов для четырех областей при соответствующем значении параметров, что позволило установить частичную симметрию в расположении точек a_k, b_k. При помощи повторного применения того же подхода доказательство может быть упрощено.

Отметим, что в случае различных значений параметров α_k поведение суммы в (23) уже не является столь предсказуемым.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II*, Алгебра и анализ **9**, No. 3 (1997), 41–103; **5** (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
3. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации и трансфинитный диаметр*, Сиб. мат. ж. **27** (1986), No. 2, 39–46.
4. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
5. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин. ПОМИ **160** (1987), 91–98.
6. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
7. Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 52–67.
8. Г. В. Кузьмина, *О связи различных задач об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 116–131.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 15 сентября 2006 г.