Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

**В. Г. Журавлев**

# СУММЫ КВАДРАТОВ НАД ∘–КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

## Введение

**Квазирешетка Фибоначчи.** Одномерная квазирешетка Фибоначчи $\mathcal{F}$ представляет собою подмножество из $\mathbb{R}$, состоящее из точек

$$x = x(N) = N + [(N+1)\tau] \cdot \tau \tag{0.1}$$

с параметрами $N$ из множества целых чисел $\mathbb{Z}$, где $[*]$ обозначает целую часть числа и $\tau = (-1+\sqrt{5})/2$ – золотое сечение. Квазирешетка $\mathcal{F}$ не является периодической, т.е. равенство $\mathcal{F} + t = \mathcal{F}$ возможно только при $t = 0$, и обладает свойством Мейера

$$\mathcal{F} + \mathcal{F} \subset \mathcal{F} + \mathcal{R}, \quad \mathcal{F} - \mathcal{F} \subset \mathcal{F} + \mathcal{R},$$

где множество $\mathcal{R}$ состоит из элементов $0, \pm\tau$.

**Сферические оболочки.** Рассмотрим над квазирешеткой $\mathcal{F}$ диофантовы уравнения вида

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 = \alpha, \tag{0.2}$$

где $x_i$ – произвольные элементы из $\mathcal{F}$, а $\alpha$ – некоторый фиксированный тотально положительный элемент из $\mathcal{F}$, т.е. положительны само $\alpha$ и его сопряженный элемент $\alpha'$ в квадратичном поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Таким образом, рассматриваются точки $x = (x_1, \ldots, x_k)$ из $k$-мерной квазирешетки $\mathcal{F}^k$, лежащие на $k$-мерной сфере (0.2). Поскольку $\mathcal{F}^k$ образует $(r, R)$-систему Делоне, то уравнение (0.2) имеет конечное число решений $r_{\mathcal{F},k}(\alpha)$. Лифшитц [1] впервые ввел двумерные квазирешетки $\mathcal{F}^2$ и исследовал их физические свойства. Статистические свойства квадратных разбиений Фибоначчи, отвечающих квазирешетке $\mathcal{F}^2$, изучены в [2]. В данной статье

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

рассмотрены диофантовы уравнения вида (0.2) над квазирешеткой $\mathcal{F}$ и получены некоторые следствия из них.

Относительно уравнений (0.2) основной результат формулируется следующим образом (теорема 6.1):

$$r_{\mathcal{F},k}(\alpha) \geq \frac{1}{2} r_k(\alpha), \tag{0.3}$$

где $r_k(\alpha)$ – количество представлений числа $\alpha$ в виде суммы $k$-квадратов целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Если выполняется дополнительное условие $0 \leq \alpha' < \tau^2$, то имеет место равенство

$$r_{\mathcal{F},k}(\alpha) = r_k(\alpha). \tag{0.4}$$

Из неравенства (0.3) вытекает следствие:

любое тотально положительное число $\alpha$ из квазирешетки Фибоначчи $\mathcal{F}$ представимо в виде суммы квадратов трех элементов из $\mathcal{F}$.

**$\circ$-кольцо Фибоначчи.** Квазирешетка Фибоначчи $\mathcal{F}$ обладает богатой полугруппой $\mathcal{F}_\tau$ подобий

$$\lambda\mathcal{F} \subset \mathcal{F},$$

где множители $\lambda$ выбираются из множества $\mathcal{F}_\tau$, состоящего из элементов $\lambda \in \mathcal{F}$, $|\lambda'| < \tau$. Это позволяет определить в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ операцию $\circ$-умножения $N_1 \circ N_2$ с помощью равенства

$$N_1 \circ N_2 = \operatorname{pr}_1(x(N_1) \cdot x(N_2)), \tag{0.5}$$

где для любых $a$, $b \in \mathbb{Z}$ полагаем $\operatorname{pr}_1(a + b\tau) = a$. Из (0.1) для произведения $N_1 \circ N_2$ вытекает явная формула

$$N_1 \circ N_2 = N_1 N_2 + [(N_1 + 1)\tau][(N_2 + 1)\tau]. \tag{0.6}$$

На множестве натуральных чисел умножение $N_1 \circ N_2$ ввел Кнут [3]. Он определил круговое умножение в терминах разложений чисел $N_1, N_2$ в системе счисления Фибоначчи (возможное обобщение его на двумерный случай см. [4])

Нашей основной целью является исследование диофантовых уравнений над $\circ$-кольцом Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, получающимся добавлением к кольцу $\mathbb{Z}$ неассоциативной операции $\circ$-умножения $N_1 \circ N_2$. В п. 4 доказано существование взаимно однозначного соответствия между классами эквивалентности простых элементов $\circ$-кольца $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ и кольца Фибоначчи $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, \tau]$ – кольца целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

**Диофантовы уравнения над $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$.** Диофантовы уравнения, о которых идет речь, получаются $\mathrm{pr}_1$-проекцией уравнений (0.2). Для доказательств мы используем метод "Cut and Project" (см., например, [5, с. 145–166]), выбирая в качестве "окна" (или внутреннего пространства) тор и рассматривая на нем обмотку. Приведем несколько результатов, которые удалось получить в этом направлении.

**1.** Если $0 \le m \le n-1$, то уравнение (см. следствие 7.1)

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 = F_{2m} \cdot F_{2n},$$

где $F_n$ – числа Фибоначчи, разрешимо в целых числах $X_i \in \mathbb{Z}$.

**2.** Любое неотрицательное число $A \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее неравенству $A \ge [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$, где $\widetilde{\tau} = \tau + 1$, представимо в виде суммы (теорема 7.2)

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 + X_3^2 + [(X_3+1)\tau]^2 = A,$$

где $X_i \in \mathbb{Z}$.

**3.** Пусть любое неотрицательное число $A \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию $A \ge [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$ и $r_4(A)$ – количество решений уравнения

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 + X_3^2$$
$$+[(X_3+1)\tau]^2 + X_4^2 + [(X_4+1)\tau]^2 = A,$$

где $X_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $r_4(A)$ удовлетворяет неравенству

$$r_4(A) \ge c(A) \cdot |A^2 - A[(A+1)\tau] - [(A+1)\tau]^2|,$$

где $c(A) = 3$, если $2|A$ и $4 \nmid A$, и $c(A) = 4$ – в остальных случаях.

**Связи с другими работами и комментарии.** Разложения по сферическим оболочкам (0.2) квазикристаллов с запрещенными симметриями подробно исследованы в [6], [7], [8], [9] для квазикристаллов с икосаэдрической группой симметрий, получающихся на основе решетки корней $E_8$ и ее алгебраического эквивалента — кольца икосианов над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, и для октогональных квазикристаллов в [10]. В первом случае квадраты радиусов сфер $\alpha$ (0.2) принадлежат цепочке Фибоначчи $\mathcal{F}_+ \subset \mathcal{F}$, состоящей из элементов $x \ge 0$, во втором случае — из аналогичной цепочки над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Наш подход проистекает из теории квадратичных форм: минуя симметричную надстройку, рассматривать квазирешетки $\mathcal{F}^k \subset \mathbb{R}^k$ на основе одномерной квазирешетки Фибоначчи $\mathcal{F}$ вместо традиционного кольца целых чисел $\mathbb{Z}$. При данном подходе мы получем непосредственную связь сферических оболочек над квазирешеткой $\mathcal{F}^k$ и квадратичным полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Получающиеся при этом формулы (0.4), (5.4), (5.10) для числа точек на сфере (0.2) для $k = 2$ аналогичны формулам из [10], [11], а для $k = 3$ из [9]. Данное явление указывет на фундаментальную роль базового квадратичного поля.

Связь между сферическими оболочками (0.2) над $\mathcal{F}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ является прямой только для квадратов радиусов $\alpha$ с условием $0 \le \alpha' \le \tau^2$. Остальные оболочки содержат лишь часть точек из оболочек над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, пропускаемых окном $I^k = [-1, \tau)^k$. То же самое происходит и для квазикристаллов. Чтобы обойти возникающую трудность, Бааке и Гримм [11] определили среднее значение $\widehat{r}_{\mathcal{F},k}(\alpha)$, получающееся усреднением $r_{\mathcal{F},k}(\alpha)$ по всем точкам из $\mathcal{F}$, выбранным в качестве центров сфер. Следуя схеме [11], среднее значение $\widehat{r}_{\mathcal{F},k}(\alpha)$ можно вычислить, если кубическое окно $I^k$ заменить $k$-мерным шаром подходящего радиуса.

Лифшитц [1] нашел ряд аргументов физического порядка о целесообразности изучения $\mathcal{F}^k$ — квазирешеток, не обладающих запрещенными кристаллографическими симметриями. Настоящая работа добавляет еще один аргумент: возможность построения теории квадратичных форм над квазирешетками.

Итак, мы видим, что замена классических решеток, например кубической решетки $\mathbb{Z}^k$, квазирешетками приводит к возникновению диофантовых уравнений, содержащих целые части иррациональных чисел, и при этом данный подход порождает естественный метод исследования таких уравнений. Полученные в работе первоначальные результаты дают основание надеяться, что построение теории квадратичных форм над квазирешетками может быть вполне реальной и перспективной задачей.

## 1. $\circ$-кольцо Фибоначчи

**1.1. Множество параметров $\delta(\mathbb{N})$.** Отождествим полуинтервал $I_1 = [0, 1)$ с единичной окружностью $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и пусть он разбит $I_1 = I_1^- \cup I_1^+$ на два поинтервала $I_1^- = [0, \tau^2)$, $I_1^+ = [\tau^2, 1)$, где $\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

— золотое сечение. Определим на $I_1$ сдвиг

$$I_1 \xrightarrow{s_1} I_1: \quad x \mapsto x + \tau \mod 1, \tag{1.1}$$

и обозначим $r(N)$, где $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, количество точек $M\tau \mod 1$ с номерами $M = 0, 1, \dots, N$, попавших в полуинтервал $I_1^+$, т.е. $r(N)$ — количество попаданий начальной точки $x_0 = 0$ в $I_1^+$ после $(N+1)$-го повторения сдвига $s_1$.

**Предложение 1.1.** *Отображение*

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}: \quad N \mapsto \delta(N) = N - r(N)\widetilde{\tau}, \tag{1.2}$$

*где* $\widetilde{\tau} = \tau + 1$, *обладает свойствами*

$$\delta(\mathbb{N}) \subset I, \quad \overline{\delta(\mathbb{N})} = \overline{I}, \tag{1.3}$$

*где* $I = [-1, \tau)$ *и черта обозначает замыкание множеств. Для функции* $r(N)$ *имеет место явная формула*

$$r(N) = [(N+1)\tau] \tag{1.4}$$

*для всех* $N \in \mathbb{N}$ , *где* $[*]$ *обозначает целую часть числа.*

**Доказательство.** Рассмотрим разностную функцию $\Delta(r(N)) = r(N) - r(N-1)$ для $N \geq 1$. Из определения функции $r(N)$ следует $\Delta(r(N)) = 1$ или $0$, если $N\tau \in I_1^+$ или $N\tau \in I_1^-$, соответственно. С другой стороны, для функции $\varrho(N) = [(N+1)\tau]$ ее разностная функция $\Delta(\varrho(N))$ обладает точно таким же свойством, т.е. $\Delta(r(N)) = \Delta(\varrho(N))$. Так как выполняется равенство $r(0) = \varrho(0)$, то отсюда следует $r(N) = \varrho(N)$ для всех $N \in \mathbb{N}$, что доказывет формулу (1.4). Из нее непосредственно вытекает включение $\delta(\mathbb{N}) \subset I$ (1.3).

Теперь докажем равенство из (1.3). По определению отображения (1.2), имеем

$$\delta(N) = N - r(N)\widetilde{\tau} \equiv N \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}.$$

Это означает, что $\delta(\mathbb{N})$ является орбитой начальной точки $x_0 = 0$ относительно сдвига

$$I \xrightarrow{s} I: x \mapsto x + 1 \mod \widetilde{\tau}.$$

Поскольку величина сдвига 1 и длина $\widetilde{\tau}$ полуинтервала $I$ несоизмеримы, то из включения $\delta(\mathbb{N}) \subset I$ следует равенство $\overline{\delta(\mathbb{N})} = \overline{I}$ (1.3). $\square$

**1.2.** На множестве $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ зададим функции $\sigma(N_1,N_2)$, $\varrho(N_1,N_2)$ со значениями в $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$, полагая

$$\begin{aligned}\delta(N_1)+\delta(N_2)=&\delta(N_1+N_2)-\sigma(N_1,N_2)\widetilde{\tau},\\ \delta(N_1)\cdot\delta(N_2)=&\delta(N_1\circ N_2)+\varrho(N_1,N_2)\widetilde{\tau},\end{aligned}\tag{1.5}$$

где произведение $N_1\circ N_2$ определяется следующим образом. Поскольку $\widetilde{\tau}^2=\widetilde{\tau}+1$, то в силу (1.2) получаем равенство

$$\begin{aligned}&\delta(N_1)\cdot\delta(N_2)=(N_1N_2+r(N_1)r(N_2))\\ &-(N_1r(N_2)+N_2r(N_1)-r(N_1)r(N_2))\widetilde{\tau}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Положим

$$N_1\circ N_2=N_1N_2+r(N_1)r(N_2).\tag{1.7}$$

Тогда из определения (1.2) функции $\delta(N)$ и равенства (1.5) получаем сравнения

$$\begin{aligned}\delta(N_1)+\delta(N_2)\equiv&\delta(N_1+N_2)\mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau},\\ \delta(N_1)\cdot\delta(N_2)\equiv&\delta(N_1\circ N_2)\mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Из данных сравнений следует, что равенства (1.5) однозначно задают функции $\sigma(N_1,N_2)$, $\varrho(N_1,N_2)$. Если воспользоваться (1.2), (1.3), то для них получаем явное описание

$$\sigma(N_1,N_2)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \delta(n_1)+\delta(n_2)\ge\tau,\\ 0, & \text{если}\quad \delta(n_1)+\delta(n_2)\in I,\\ -1, & \text{если}\quad \delta(n_1)+\delta(n_2)<-1;\end{cases}\tag{1.9}$$

$$\varrho(N_1,N_2)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \delta(n_1)\delta(n_2)\ge\tau,\\ 0, & \text{если}\quad \delta(n_1)\delta(n_2)\in I.\end{cases}\tag{1.10}$$

Сравнивая $\widetilde{\tau}$-части, из (1.5), (1.6) выводим

$$\begin{aligned}r(N_1+N_2)&=r(N_1)+R(N_2)-\sigma(N_1,N_2),\\ r(N_1\circ N_2)&=N_1r(N_2)+N_2r(N_1)-r(N_1)r(N_2)+\varrho(N_1,N_2)\end{aligned}\tag{1.11}$$

– свойства инвариантности функции $r(N)$ п. 1.2 относительно операций сложения и $\circ$-умножения.

**1.3.** Продолжим отображение $\delta : \mathbb{N} \to I$ на множество целых чисел $\mathbb{Z}$ требованием, чтобы

$$\delta(N) = N - r(N)\widetilde{\tau} \in I \tag{1.12}$$

для всех $N \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\delta(N)$ определяется через функцию $r(N)$, которая принимает значения из $\mathbb{Z}$ и однозначно задается условием $N - r(N)\widetilde{\tau} \in I$. Из определения (1.12) следует сравнение $\delta(N) \equiv N \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}$, из которого вытекает соотношение

$$r(-N) = -r(N) + \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \delta(N) \in J, \\ 1, & \text{если} \quad \delta(N) \in I \setminus J, \end{cases} \tag{1.13}$$

где $J = (-\tau, \tau)$. Для расширенной функции $r(N)$ сохраняются формула (1.4) и определения п. 1.2. В частности, $\circ$-умножение $N_1 \circ N_2$ для всех $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$ снова определяется формулой (1.7). Обозначим $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[+, \times, \circ]$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с дополнительной операцией (1.7) и назовем $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ $\circ$-кольцом Фибоначчи. Используя (1.7), (1.4), $\circ$-умножение можно записать в явном виде

$$N_1 \circ N_2 = N_1 N_2 + [(N_1 + 1)\tau][(N_2 + 1)\tau] \tag{1.14}$$

для всех $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$.

**Замечание 1.1.** В данной работе мы не ставим перед собою абстрактной задачи построения системы аксиом, включающей в себя $\circ$-кольцо $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ как частный случай. Хотя сама по себе такая аксиоматизация может быть интересной, нам представляется, что на начальном этапе все же более важным было бы выяснить, почему и как $\circ$-кольцо Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ работает в приложениях к конкретным диофантовым уравнениям.

## 2. Система счисления Фибоначчи

Числа Фибоначчи $F_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ определяются рекуррентным соотношением

$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}. \tag{2.1}$$

Для наших целей удобно в качестве начальных условий выбрать $F_1 = 1$, $F_2 = 2$. Для $F_n$ функция $\delta$ (2.2) принимает значения

$$\delta(F_n) = F_n - F_{n-1} \cdot \widetilde{\tau} = (-\tau)^n, \tag{2.2}$$

поскольку
$$r(F_n) = [(F_n+1)\tau] = F_{n-1} \tag{2.3}$$
для $n = 1, 2, 3, \dots$, где $F_0 = 1$. Числа $F_n$ образуют систему счисления Фибоначчи, в которой любое натуральное число $N$ однозначно разлагается в конечную сумму вида
$$N = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 + \dots + \varepsilon_n F_n + \dots = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n(N) F_n, \tag{2.4}$$
где коэффициенты $\varepsilon_n = 0, 1$ обладают свойством сокращения $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0$ для всех $n \geq 1$.

**Предложение 2.1.** *Для любого $N \in \mathbb{N}$ имеют место разложения*
$$\delta(N) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n(N)\delta(F_n), \tag{2.5}$$
$$\delta(N) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n(N)(-\tau)^n. \tag{2.6}$$

**Доказательство.** В силу (2.2) разложение (2.6) вытекает из (2.5). Согласно предложению 1.1 можем записать
$$\delta(N) \equiv \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n(N)\delta(F_n) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}, \tag{2.7}$$
где $\delta(N) \in I = [-1, \tau)$. Поэтому для доказательства (2.5) достаточно проверить включение
$$\sigma(N) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n(N)(-\tau)^n \in I. \tag{2.8}$$
В случае $\varepsilon_1(N) = 0$, согласно свойству сокращения $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0$, имеем
$$|\sigma(N)| \leq \sum_{n\geq 2} \varepsilon_n(N)\tau^n < \tau^2 + \tau^4 + \dots = \tau. \tag{2.9}$$
Если же $\varepsilon_1(N) = 1$, то аналогично получаем неравенство
$$|\sum_{n\geq 3} \varepsilon_n(N)\tau^n| \leq \tau^3 + \tau^5 + \dots = \tau^2. \tag{2.10}$$
Из (2.9), (2.10) выводим следующие неравенства: $-\tau < \sigma(N) < \tau$, если $\varepsilon_1(N) = 0$, и $-1 < \sigma(N) < -\tau^3$, если $\varepsilon_1(N) = 1$, из которых следует включение (2.8). $\square$

В системе Фибоначчи числа $N \in \mathbb{N}$ с коэффициентом $\varepsilon_1(N) = 0$ называются четными ($F$-четными). Более тонкий анализ показывет, что

$$\begin{aligned} \delta(N) &\in (-\tau^2, \tau) \quad \text{для} \quad F - \text{четных} \quad N, \\ \delta(N) &\in (-1, -\tau^2) \quad \text{для} \quad F - \text{нечетных} \quad N. \end{aligned} \tag{2.11}$$

**Предложение 2.2.** *В системе счисления Фибоначчи $\circ$-произведение $N_1 \circ N_2$ (1.7) вычисляется по формуле*

$$N_1 \circ N_2 = \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} \varepsilon_n(N_1)\varepsilon_n(N_2)F_{n+m}, \tag{2.12}$$

*где $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.*

**Замечание 2.1.** Формула (2.12) показывает, что $\circ$-умножение $N_1 \circ N_2$ совпадает с круговым умножением Кнута [3].

**Доказательство.** Согласно (2.6), имеем

$$\delta(N_1)\delta(N_2) = \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} \varepsilon_n(N_1)\varepsilon_n(N_2)(-\tau)^{n+m}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} \varepsilon_n(N_1)\varepsilon_n(N_2)\delta(F_{n+m}). \tag{2.13}$$

Пусть $N$ равно сумме, стоящей в правой части (2.12). Тогда

$$\delta(N) \equiv \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} \varepsilon_n(N_1)\varepsilon_n(N_2)\delta(F_{n+m}) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau} \tag{2.14}$$

и, следовательно,

$$\delta(N) \equiv \delta(N_1)\delta(N_2) \equiv \delta(N_1 \circ N_2) \mod \mathbb{Z}\widetilde{\tau}. \tag{2.15}$$

Поскольку числа $1, \widetilde{\tau}$ несоизмеримы, отображение $\delta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ иньективно. А так как, кроме того, выполняются включения $\delta(N)$, $\delta(N_1 \circ N_2) \in I$, то из (2.15) следует $N = N_1 \circ N_2$.

$\square$

## 3. Квазирешетка Фибоначчи

Квазирешетка Фибоначчи $\mathcal{F}$ – это дискретное подмножество из $\mathbb{R}$, определяемое следующим образом

$$\mathcal{F} = \delta'(\mathbb{Z}), \tag{3.1}$$

где $\delta'(N) = (N - r(N)\widetilde{\tau})' = N + r(N)\tau$ для всех $N \in \mathbb{Z}$ и $'$ – сопряжение в квадратичном поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Квазирешетка $\mathcal{F}$ обладает рядом интересных свойств.

Обозначим $\mathcal{F}^+$ подмножество из $\mathcal{F}$, состоящее из точек вида $\delta'(N) = N + r(N)\tau$ с параметрами $N \in \mathbb{N}$. Согласно определению функции $r(N)$ п. 1.1, разностная функция $\Delta r(N) = r(N) - r(N-1)$ равна $\Delta r(N) = 1$, если $N\tau \in [\tau^2, 1)$, и $\Delta r(N) = 0$, если $N\tau \in [0, \tau^2)$. Отсюда заключаем, что множество $\mathcal{F}^+$ параметризуется вращениями окружности. Из [12] следует, что последовательность

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_N, \dots) = (10110101\dots), \tag{3.2}$$

где $u_N = \Delta r(N) = 0, 1$, является последовательностью Штурма. Последовательность $u$ (3.2) полностью характеризует положительную часть $\mathcal{F}^+$ квазирешетки $\mathcal{F}$, так как $\Delta(\delta'(N)) = 1 + \tau$, если $u_N = 1$, и $\Delta(\delta'(N)) = 1$, если $u_N = 0$. Последовательность $u$ инвариантна относительно подстановки, действующей на символы $0, 1$ по правилу

$$\pi : 1 \mapsto 10, \quad 0 \mapsto 1,$$

и получается из 1 многократным применением подстановки $\pi$:

$$\pi^0(1) = 1, \quad \pi^1(1) = 10, \quad \pi^2(1) = 101, \quad \pi^3(1) = 10110, \dots$$

Длина последовательностей $\pi^n(1)$ равна $\sharp\pi^n(1) = F_{n+1}$, где $F_{n+1}$ – число Фибоначчи (2.1), и для них выполняется свойство рекуррентности

$$\pi^{n+1}(1) + \pi^n(1) = \pi^{n+2}(1), \tag{3.3}$$

где слева стоит последовательность, получающаяся последовательным продолжением $\pi^{n+1}(1)$ элементами последовательности $\pi^n(1)$, т.е. – это некоммутативная операция прикладывания одной последовательности к другой. Например, $\pi^2(1) + \pi^1(1) = (101) + (10) = (10110)$. Обозначим $\mathcal{F}_N^+ = \{\delta'(M) \in \mathcal{F}^+ : M = 0, 1, \dots, N-1\}$. Тогда из (3.3) вытекает

$$\mathcal{F}^+_{F_{n+1}} \cup (\mathcal{F}^+_{F_n} + \delta'(F_{n+1})) = \mathcal{F}^+_{F_{n+2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.4}$$

– рекуррентное свойство конечных отрезков подрешетки $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F}^+$ можно получить с помощью операций сложения и предельного перехода из двух ее частей $\mathcal{F}^+_{F_1} = \{\delta'(0)\} = \{0\}$ и $\mathcal{F}^+_{F_2} = \{\delta'(0), \delta'(1)\} = \{0, 1+\tau\}$.

Множество $\delta(\mathbb{Z}) \setminus \{\delta(-1)\}$ обладает центральной симметрией:

$$\iota\delta(N) = -\delta(N) + \delta(-2)$$

для любого $N \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Используя формулу (1.5), можем записать $\iota$ на языке параметров:

$$\iota\delta(N) = \delta(-N-2). \tag{3.5}$$

Отсюда получаем, что проколотая квазирешетка $\mathcal{F}_h = \mathcal{F} \setminus \{\delta(-1)\} = \mathcal{F} \setminus \{-1\}$ центрально симметрична:

$$\iota\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h$$

с центром симметрии $\frac{1}{2}\delta(-2) = \frac{-1+\tau}{2}$, не являющимся элементом из $\mathcal{F}_h$.

Кроме симметрии $\iota$, квазирешетка $\mathcal{F}$ допускает богатую полугруппу подобий $\delta'(\mathbb{Z}_\tau) \subset \mathcal{F}$, где $\mathbb{Z}_\tau$ – подмножество тех $N \in \mathbb{Z}$, для которых $|\delta(N)| < \tau$. Для любого $N \in \mathbb{Z}_\tau$ выполняется включение

$$\delta'(N) \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}.$$

Особый интерес представляет случай $N = 1$, когда наблюдается подобие

$$\lambda \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F} \tag{3.6}$$

с коэффициентом $\lambda = \delta'(1) = \widetilde{\tau}$, являющимся основной единицей кольца Фибоначчи $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\widetilde{\tau}]$. В данном случае подобие (3.6) представляет собою инфляцию проколотой квазирешетки $\mathcal{F}_h$, соответствующую подстановке $\pi$.

Квазирешетка $\mathcal{F}$ не является периодической, т.е. равенство $\mathcal{F} + t = \mathcal{F}$ возможно только при $t = 0$. Это вытекает из аналогичного свойства множества параметров $\delta(\mathbb{Z})$. Однако, имеют место следующие два свойства:

$$\mathcal{F} + \mathcal{F} \subset \mathcal{F} + \mathcal{R}, \quad \mathcal{F} - \mathcal{F} \subset \mathcal{F} + \mathcal{R}, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{R} = \{0, \pm\tau\}$, означающие, что квазирешетка $\mathcal{F}$ “почти” замкнута относительно операций сложения и вычитания (свойство Мейера).

## 4. Разложение на простые множители в $\circ$-кольце Фибоначчи

**4.1.** Разложение на простые множители в кольце Фибоначчи $\mathcal{O}$ определяется значением характера [13] $\chi(x) = \left(\frac{x}{5}\right)$ квадратичного поля $F$, где $\left(\frac{*}{5}\right)$ – символ Лежандра. Простые числа $p \in \mathbb{Z}$ не расщепляются в $F$ при $\chi(p) = -1$ и разветвляются при $\chi(p) = 0$. Отсюда получаем описание всех простых чисел кольца $\mathcal{O}$:

$$p \equiv 2, 3 \mod 5, \tag{4.1}$$

$$\wp, \wp', \quad \text{где} \quad \wp \neq \wp', \quad \wp\wp' = p \equiv \pm 1 \mod 5,$$

$$\wp_5 = 2 + \widetilde{\tau}, \quad \text{где} \quad \wp_5^2 = 5.$$

Здесь $p$ – положительные простые числа из кольца $\mathbb{Z}$.

**4.2.** Покажем, как разложение на простые множители в кольце $\mathcal{O}$ трансформируется при переходе к $\circ$-кольцу $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$. Назовем числа $A, B \in \mathbb{Z}$ ассоциированными $A \sim B$ в $\circ$-кольце $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, если ассоциированы $\delta(A) \sim \delta(B)$ в кольце $\mathcal{O}$, т.е. $\delta(A) = \varepsilon\delta(B)$ для некоторой единицы $\varepsilon$ из $\mathcal{O}$. Поскольку, как известно [13], любая единица $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ представима в виде $\varepsilon = (-1)^s(-\tau)^t$ для подходящих $s = 0, 1$, $t \in \mathbb{Z}$, то $A \sim B$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки местами $A$ и $B$ выполнено одно из следующих трех условий:

$$A = F_n \circ B, \quad \text{где} \quad n \geq 0; \tag{4.2}$$

$$A = (-1) \cdot F_n \circ B, \quad \text{где} \quad n \geq 0, \quad \delta(A) \in J = (-\tau, \tau);$$

$$A = 1, B = -1.$$

При этом в (4.2) полагаем $F_0 \circ B = B$ для всех $B$, т.е. мы тем самым дополняем $\circ$-кольцо Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ нейтральным элементом по $\circ$-умножению $F_0$.

Для $A \geq 0$ условие $\delta(A) \in J$ можно переформулировать в терминах $\circ$-кольца $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$:

$$A = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 + \cdots + \varepsilon_n F_n + \cdots, \tag{4.3}$$

где выполняется одно из ограничений: 1) $\varepsilon_1 = 0$ или 2) $\varepsilon_1 = 1$ и следующий за ним коэффициент $\varepsilon_k = 1$ имеет четный индекс $k$. Из условий (4.2), в частности, следует $A \sim 1$ или, что равносильно

$\delta(A) \sim -\tau$, где $\tau$ – основная единица квадратичного кольца $\mathcal{O}$, тогда и только тогда, когда

$$A = (-1)^s \cdot F_n, \quad \text{где} \quad s = 0, 1, \quad n \geq 1. \tag{4.4}$$

Назовем элемент $F_0$ и числа $A$ вида (4.4) единицами $\circ$-кольца $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$. Как обычно, будем обозначать множество единиц из $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ через $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^{\times}$.

Разложим число $\delta(A) \in \mathcal{O}$, где $A \neq 0$, на простые множители в кольце $\mathcal{O}$

$$\delta(A) = 2^{\nu_2} \cdot \wp_5^{\nu_5} \prod_p p^{\nu_p} \prod_{\wp} \wp^{\nu_\wp} \prod_{\wp'} \wp'^{\nu_{\wp'}}, \tag{4.5}$$

где $p \equiv 2, 3 \mod 5$, $N_{F/\mathbb{Q}}(\wp) = N_{F/\mathbb{Q}}(\wp') = p$, $\wp\wp' = p \equiv \pm 1 \mod 5$. Пусть $\varrho$ – простой элемент кольца $\mathcal{O}$. Выберем минимальное $n = n_\varrho > 1$ с условием $(-\tau)^n \varrho \in J$. Тогда

$$(-\tau)^n \varrho = \delta(R) \quad \text{для некоторого} \quad R \in \mathbb{Z}, \quad \delta(R) \in J. \tag{4.6}$$

Из (4.5), (4.6) вытекает существование $n_A > 1$ с условие $(-\tau)^{n_A} \delta(A) \in J$ и такого, что имеет место равенство

$$(-\tau)^{n_A} \delta(A) = \delta(P_2)^{\nu_2} \cdot \delta(\mathcal{P}_5)^{\nu_5} \prod_p \delta(P)^{\nu_p} \prod_{\wp} \delta(\mathcal{P})^{\nu_\wp} \prod_{\wp'} \delta(\mathcal{P}')^{\nu_{\wp'}}, \tag{4.7}$$

где все $\delta(*) \in J$. При этом выполнены следующие отношения ассоциативности $\sim$ в кольце $\mathcal{O}$:

$$\delta(P_2) \sim 2, \quad \delta(\mathcal{P}_5) \sim \wp_5 \quad \delta(P) \sim p, \quad \delta(\mathcal{P}) \sim \wp, \quad \delta(\mathcal{P}') \sim \wp'. \tag{4.8}$$

Из выбора $n_A$ следует, что (4.7) можно переписать в виде

$$\delta(F_{n_A} \circ A) = \delta(P_2^{\circ\nu_2} \circ \mathcal{P}_5^{\circ\nu_5} \circ \prod_p P^{\circ\nu_p} \circ \prod_{\wp} \mathcal{P}^{\circ\nu_\wp} \circ \prod_{\wp'} \mathcal{P}'^{\circ\nu_{\wp'}}), \tag{4.9}$$

где использовано сокращение $A^{\circ\nu} = A \circ \cdots \circ A$ (– $\nu$ раз). Это возможно в силу наложенного в (4.7) ограничения $\delta(*) \in J$, в условиях которого операция $\circ$-умножения становится ассоциативной.

Так как $\delta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}$ – вложение, то из (4.9) выводим

$$F_{n_A} \circ A = P_2^{\circ\nu_2} \circ \mathcal{P}_5^{\circ\nu_5} \circ \prod_p P^{\circ\nu_p} \circ \prod_{\wp} \mathcal{P}^{\circ\nu_\wp} \circ \prod_{\wp'} \mathcal{P}'^{\circ\nu_{\wp'}} \tag{4.10}$$

– разложение числа $F_{n_A} \circ A$, ассоциированного с $A$, на $\circ$-простые множители в $\circ$-кольце $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$.

**Предложение 4.1.** *Любое $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0$, является единицей* (4.4) *$\circ$-кольца Фибоначчи $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ или разлагается в нем на $\circ$-простые множители*

$$A \sim P_2^{\circ\nu_2} \circ \mathcal{P}_5^{\circ\nu_5} \circ \prod_p P^{\circ\nu_p} \circ \prod_\wp \mathcal{P}^{\circ\nu_\wp} \circ \prod_{\wp'} \mathcal{P}'^{\circ\nu_{\wp'}} \tag{4.11}$$

*– сокращенная запись разложения вида* (4.10).

□

По определению число $R \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ является $\circ$-простым, если $\delta(R) = \varrho$ – простой элемент кольца $\mathcal{O}$. С точностью до ассоциированности, $\circ$-простые числа из $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ имеют вид:

1) $P = p \cdot F_n$, где $p \equiv 2,3 \mod 5$, $n \geq 1$, $(-\tau)^n p \in J$;
2) $\mathcal{P}_5 = 4$;
3) $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, где $\delta(\mathcal{P}) \sim \wp$, $\delta(\mathcal{P}') \sim \wp'$, $\wp\wp' = p \equiv \pm 1 \mod 5$.

Таким образом, между множеством классов ассоциированных $\circ$-простых чисел из $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ и простых чисел кольца Фибоначчи $\mathcal{O}$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое отображением

$$\overset{\circ}{\mathbb{Z}}/\overset{\circ}{\mathbb{Z}}^\times \overset{\delta}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{O}/\mathcal{O}^\times : \quad N \mapsto \delta(N).$$

**4.3.** В качестве примера покажем, как разложение $p = \wp\wp'$ в кольце $\mathcal{O}$ переносится в $\circ$-кольцо $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$. Пусть $p = 11 \equiv \pm 1 \mod 5$. Найдем $A \in \mathbb{Z}$ с условием $\delta(A) \sim 11$ в кольце $\mathcal{O}$. Указанное $A$ можно выбрать в виде $A = 11 \cdot F_n$, где $(-\tau)^n \cdot 11 \in J$, например, $n = 8$. Имеем

$$\delta(11 \cdot F_8) = 11 \cdot \delta(F_8) = (-\tau)^8 \cdot 11 \sim p,$$

где $p = 11 = \wp\wp'$, $\wp = 3 + \widetilde{\tau}$, $\wp' = 3 + \widetilde{\tau}' = 3 - \tau$ – простые числа в $\mathcal{O}$, при этом $\wp, \wp' \notin J$. Отсюда имеем

$$\delta(11 \cdot F_8) = \wp_1\wp_2, \quad \text{где} \quad \wp_1 = (-\tau)^5\wp, \quad \wp_2 = (-\tau)^3\wp', \quad \wp_1, \wp_2 \in J.$$

Для вычисления $\wp_1, \wp_2$ заметим, что $(a - b\widetilde{\tau})(-\tau) = (a+b) - a\widetilde{\tau}$, откуда вытекает правило: $(a,b) \mapsto (a+b, a)$ – преобразования коэффициентов при умножении на единицу $-\tau \in \mathcal{O}^\times$. Применяя указанное правило к $\wp$ и $\wp'$, находим $\wp_1 = 19 - 12\widetilde{\tau} = \delta(19)$, $\wp_2 = 14 - 9\widetilde{\tau} = \delta(14)$. Следовательно, $\delta(11 \cdot F_8) = \delta(19)\delta(14) = \delta(19 \circ 14)$, т.е. получаем

$$11 \cdot F_8 = 19 \circ 14 = 14 \circ 19$$

– разложение числа $A = 11 \cdot F_8 = 374$ на $\circ$-простые множители $\mathcal{P} = 19$, $\mathcal{P}' = 14$ в $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$.

Из приведенных вычислений вытекает следующее общее утверждение. Для любого простого $p \equiv \pm 1 \mod 5$ и $n \geq 1$, $(-\tau)^n \in J$, имеет место разложение

$$p \cdot F_n \sim \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$$

на $\circ$-простые сомножители в $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, удовлетворяющие условию $\delta(\mathcal{P}) \sim \wp$, $\delta(\mathcal{P}') \sim \wp'$, где $p = \wp\wp'$ – разложение в кольце Фибоначчи $\mathcal{O}$.

## 5. Суммы квадратов над кольцом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

**5.1.** Вещественное квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ является одноклассным $h_F = 1$ с кольцом целых чисел $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau] = \mathbb{Z}[\widetilde{\tau}]$. Приведем в удобном для нас виде формулы для количеств представлений $r_k(\alpha)$ тотально положительного числа $\alpha$ из $\mathcal{O}$, т.е. $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$, где $\alpha'$ – сопряженное к числу $\alpha$, в виде суммы $k = 2, 3, 4$ квадратов

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 = \alpha, \tag{5.1}$$

где $x_i \in \mathcal{O}$. Известно, что квадратичные формы $x_1^2 + \cdots + x_k^2$ для $k \leq 4$ являются одноклассными над кольцом $\mathcal{O}$. Если переменные $x_i$ записать $x_i = x_{i1} - x_{i2}\widetilde{\tau}$ в $\mathbb{Z}$-базисе $\{1, \widetilde{\tau}\}$ кольца $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, \widetilde{\tau}]$, то уравнение (5.1) перепишется в виде равносильной ему системы квадратичных уравнений

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{12}^2 + \cdots + x_{k1}^2 + x_{k2}^2 &= a \\ 2x_{11}x_{12} - x_{12}^2 + \cdots + 2x_{k1}x_{k2} - x_{k2}^2 &= b, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $x_{ij}, a, b \in \mathbb{Z}$ и при этом $\alpha = a - b\widetilde{\tau}$. Из первого равенства (5.2) следует, что $r_k(\alpha) < \infty$ для всех $\alpha$. Пусть $\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha = a - b\widetilde{\tau} > 0$, $\alpha' = a + b\tau > 0$, $N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha) = a^2 - ab - b^2$ – норма $\alpha$ относительно расширения $F/\mathbb{Q}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

**5.2. Суммы двух квадратов над $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.** Пусть в обозначениях (4.5) задано разложение

$$\alpha = 2^{\nu_2} \cdot \wp_5^{\nu_5} \prod_p p^{\nu_p} \prod_{\wp} \wp^{\nu_\wp} \prod_{\wp'} \wp'^{\nu_{\wp'}} \tag{5.3}$$

тотально положительного числа $\alpha \in \mathcal{O}$ в произведение простых чисел в кольце $\mathcal{O}$. Количество представлений $r_2(\alpha) \neq 0$ тогда и только тогда, когда показатели $\nu_\wp, \nu_{\wp'}$ четные для всех $p \equiv \pm 1 \mod 5$, $p \equiv 3 \mod 4$. При выполнении этих условий имеет место формула [14], [11]

$$r_2(\alpha) = 4 \cdot (\nu_5 + 1) \prod_{p \equiv 2,3 \bmod 5} (\nu_p + 1) \prod_{\substack{p \equiv \pm 1 \bmod 5, \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (\nu_\wp + 1) \prod_{\substack{p \equiv \pm 1 \bmod 5, \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (\nu_{\wp'} + 1). \quad (5.4)$$

**5.3. Суммы четырех квадратов над $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.** Пусть тотально положительное число $\alpha \in \mathcal{O}$ имеет разложение (5.3) в произведение простых чисел в кольце $\mathcal{O}$. Тогда для количества представлений $r_4(\alpha)$ числа $\alpha$ в виде суммы четырех квадратов в кольце $\mathcal{O}$ выполняется формула [15]

$$r_4(\alpha) = 8 \cdot c_2 \cdot c_5 \prod_{\substack{p \mid \alpha \\ p \equiv 2,3 \bmod 5}} c_p \prod_{\substack{\wp \mid \alpha \\ N_{F/\mathbb{Q}}(\wp) = p \\ p \equiv \pm 1 \bmod 5}} c_\wp \prod_{\substack{\wp' \mid \alpha \\ N_{F/\mathbb{Q}}(\wp') = p \\ p \equiv \pm 1 \bmod 5}} c_{\wp'}. \quad (5.5)$$

Локальные множители $c_*$ в (5.5) определяются следующими равенствами:

$$c_2 = 1, \quad \text{если} \quad \nu_2 = 0; \quad c_2 = 2^{2\nu_2 + 1} - 5, \quad \text{если} \quad \nu_2 \geq 1; \quad (5.6)$$

$$c_5 = (5^{\nu_5 + 1} - 1)/4; \quad (5.7)$$

$$c_p = (p^{2(\nu_p + 1)} - 1)/(p^2 - 1) \quad \text{для простых} \quad p \equiv \pm 1 \mod 5, \quad p \neq 2; \quad (5.8)$$

$$c_\wp = (p^{\nu_\wp + 1} - 1)/(p - 1), \quad c_{\wp'} = (p^{\nu_{\wp'} + 1} - 1)/(p - 1) \quad (5.9)$$

для простых $\wp, \wp'$ с нормой $N_{F/\mathbb{Q}}(\wp) = N_{F/\mathbb{Q}}(\wp') = p$, где $p \equiv \pm 1 \mod 5$.

**5.4. Суммы трех квадратов над $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.** Для $k = 2, 4$ функции $r_k(\alpha)$, с точностью до постоянного множителя, являются мультипликативными. Иную природу имеет функция $r_3(\alpha)$. В [16] доказана формула

$$r_3(\alpha) = \quad (5.10)$$

$$\frac{12h(-\alpha)}{\omega_\alpha} \sum_{\mathcal{G}_f} \left[ (1 + \left\{ \frac{\mathcal{G}_f}{2} \right\}) N_{F/\mathbb{Q}}(f) \prod_{\wp \mid f} (1 - \left( \frac{K_\alpha}{\wp} \right)) N_{F/\mathbb{Q}}(\wp)^{-1} \right],$$

где $h(-\alpha)$ – число классов поля $K_\alpha = F(\sqrt{-\alpha})$; $\omega_\alpha$ – индекс группы единиц $\mathcal{O}^\times$ в группе единиц $\mathcal{O}_\alpha^\times$ поля $K_\alpha$. Суммирование в (5.10) ведется по всем порядкам $\mathcal{G}_f$ поля $K_\alpha$ с условием

$$\sqrt{-\alpha} \in \mathcal{G}_f \tag{5.11}$$

и произведение берется по всем простым делителям $\wp$ кондуктора $f$ порядка $\mathcal{G}_f$. Символ $\left(\frac{K_\alpha}{\wp}\right)$ является расширенным символом Артина и определяется следующим образом: $\left(\frac{K_\alpha}{\wp}\right) = 1, 0$ или $-1$ соответственно для $\wp$ расщепляющегося, разветвленного или остающегося простым в поле $K_\alpha$,

$$\left\{\frac{\mathcal{G}_f}{2}\right\} = 1, \quad \text{если} \quad 2|f, \quad \left\{\frac{\mathcal{G}_f}{2}\right\} = \left(\frac{K_\alpha}{\wp}\right), \quad \text{если} \quad 2\nmid f. \tag{5.12}$$

Из формулы (5.10) следует, что в вещественном квадратичном кольце $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau]$ любое тотально положительное число $\alpha$ представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел [17].

Рассмотрим подробнее случай полного квадрата $\alpha = \beta^2$, где $\beta \neq 0$ – любое число из $\mathcal{O}$.

**Предложение 5.1.** *Пусть $\beta \in \mathcal{O}$, $\beta \neq 0$, разложено в произведение $\beta = \beta_1 \cdot \beta_{-1}$, где $\beta_1$, $\beta_{-1}$ имеют следующие разложения на простые множители в кольце Фибоначчи $\mathcal{O}$:*

$$\beta_1 = \wp_5^{\nu_5} \prod_{p\equiv 2,3 \pmod 5} p^{\nu_p} \prod_{\substack{\wp \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \wp^{\nu_\wp} \prod_{\substack{\wp' \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 1 \pmod 4}} {\wp'}^{\nu_{\wp'}}, \tag{5.13}$$

$$\beta_{-1} = 2^{\nu_2} \prod_{\substack{\wp \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 3 \pmod 4}} \wp^{\nu_\wp} \prod_{\substack{\wp' \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 3 \pmod 4}} {\wp'}^{\nu_{\wp'}}, \tag{5.14}$$

*при этом в (5.13), (5.14) $N_{F/\mathbb{Q}}(\wp) = N_{F/\mathbb{Q}}(\wp') = p$. Тогда для $r_3(\beta^2)$ (5.10) выполняется формула*

$$r_3(\beta^2) = 6 \cdot |N_{F/\mathbb{Q}}(\beta_1)| \cdot c(\beta_{-1}), \tag{5.15}$$

*где*

$$c(\beta_{-1}) = c(2^{\nu_2}) \prod_{\substack{\wp \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 3 \pmod 4}} c(\wp^{\nu_\wp}) \prod_{\substack{\wp' \\ p\equiv\pm1 \pmod 5 \\ p\equiv 3 \pmod 4}} c({\wp'}^{\nu_{\wp'}}) \tag{5.16}$$

*и локальные множители* $c(*)$ *в* (5.16) *вычисляются по формулам*

$$c(2^{\nu_2}) = \frac{2}{3}(4^{\nu_2+1} - 1) - 1,$$

$$c(\wp^{\nu_\wp}) = (p^{\nu_\wp}(p+1) - 2)/(p-1), \quad c({\wp'}^{\nu_{\wp'}}) = (p^{\nu_{\wp'}}(p+1) - 2)/(p-1)$$

*для* $\wp\wp' = p \equiv \pm 1 \mod 5$, $p \equiv 3 \mod 4$.

**Доказательство.** По формуле (5.10) имеем $h(-\beta^2) = h(-1) = 1$, $\omega_{\beta^2} = \omega_1 = 2$. Для доказательства равенства $h(-1) = 1$ достаточно в формуле (5.10) положить $\alpha = 1$. Обозначим $c(\beta) = \frac{1}{6} r_3(\beta^2)$. Согласно (5.10) функция $c(\beta)$ мультипликативная

$$c(\beta_1 \cdot \beta_2) = c(\beta_1)c(\beta_2), \quad \text{если} \quad g.c.d.(\beta_1, \beta_2) = 1. \tag{5.17}$$

Поэтому для вычисения функции $c(\beta)$ достаточно знать ее значения на степенях простых чисел кольца $\mathcal{O}$.

Случай $\beta = 2^{\nu_2}$. Из определения (5.12) вытекает

$$1 + \left\{ \frac{\mathcal{G}_f}{2} \right\} = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad 2|f, \\ 1, & \text{если} \quad 2 \nmid f. \end{cases} \tag{5.18}$$

Из включения $\sqrt{-\alpha} = 2^{\nu_2}\sqrt{-1} \in \mathcal{O}$ (5.11) следует, что кондуктор имеет вид $f = 2^0, 2^1, \ldots, 2^{\nu_2}$. Тогда из формулы (5.10) следует

$$c(2^{\nu_2}) = 1 \cdot 2^{2 \cdot 0} + 2 \cdot 2^{2 \cdot 1} + \cdots + 2 \cdot 2^{2 \cdot \nu_2} = \frac{2}{3}(4^{\nu_2+1} - 1) - 1$$

– формула для $c(2^{\nu_2})$ (5.16).

Случай $\beta = p^{\nu_p}$, $p \equiv 2, 3 \mod 5$. В данных условиях кондуктор имеет вид $f = p^0, p^1, \ldots, p^{\nu_p}$. Из формулы (5.10) получим

$$c(p^{\nu_p}) = 1 + (p^2 - p^0) + (p^4 - p^2) + \cdots + (p^{2\nu_p} - p^{2\nu_p - 2}) = p^{2\nu_p},$$

т.е. получаем локальный множитель $c(p^{\nu_p}) = N_{F/\mathbb{Q}}(p^{\nu_p})$. Именно такой множитель входит в $|N_{F/\mathbb{Q}}(\beta_1)|$ в формуле (5.15).

Оставшиеся локальные множители также считаются по приведенной выше схеме. □

## 6. Суммы квадратов над квазирешеткой Фибоначчи

**Теорема 6.1.** 1. *Пусть* $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ *– квазирешетка Фибоначчи* (3.1), $\alpha$ *– тотально положительное число из* $\mathcal{F}$. *Тогда количество решений* $r_{\mathcal{F},k}(\alpha)$ *уравнения*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 = \alpha, \tag{6.1}$$

*где $k = 2, 3, 4$ и $x_i \in \mathcal{F}$, удовлетворяет неравенству*

$$r_{\mathcal{F},k}(\alpha) \geq \frac{1}{2} r_k(\alpha), \tag{6.2}$$

*где $r_k(\alpha)$ – количество представлений (5.4), (5.5), (5.10) числа $\alpha$ в виде суммы $k$-квадратов целых чисел поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.*

*2. Если выполняется дополнительное условие $0 \leq \alpha' < \tau^2$, где $\alpha'$ – сопряженное к числу $\alpha$ ,то имеет место равенство*

$$r_{\mathcal{F},k}(\alpha) = r_k(\alpha). \tag{6.3}$$

Согласно формуле (5.10), выполняется неравенство $r_3(\alpha) > 0$ для любого целого тотально положительное числа $\alpha$ из поля $F$. Отсюда и неравенства (6.2) вытекает

**Следствие 6.1.** *Любое тотально положительное число $\alpha$ из квазирешетки Фибоначчи $\mathcal{F}$ представимо в виде суммы трех квадратов элементов из $\mathcal{F}$.*

**Доказательство теоремы 6.1.** С помощью сопряжения $'$ в поле $F$ преобразуем (6.1) в уравнение

$$x'^2_1 + \cdots + x'^2_k = \alpha', \tag{6.4}$$

где в силу (3.1) $x'_i = \delta(X_i) = X_i - r(X_i)\widetilde{\tau}$ и $\alpha' = \delta(A) = A - r(A)\widetilde{\tau}$ для некоторых целых чисел $X_i, A \in \mathbb{Z}$. Уравнение (6.4) имеет $r_k(\alpha')$ решений над кольцом $\mathcal{O}$, так как $\alpha'$ – тотально положительное число из $\mathcal{O}$. Данное уравнение допускает над кольцом $\mathcal{O}$ симметрии $x'_i \mapsto -x'_i$. Правая часть в (6.4) удовлетворяет неравенствам $0 \leq \alpha' < \tau$, поэтому $k$-мерная сфера (6.4) имеет радиус, меньший чем $\tau^{1/2} < \sqrt{2}\tau$. Отсюда с учетом симметрий заключаем, что не меньше половины точек $x' = (x'_1, \ldots, x'_k) \in$ (6.4) лежит в области $[-1, \tau)^k$. Пересечение $[-1, \tau) \cap \mathcal{O}$ совпадает с множеством $\delta(\mathbb{Z})$. Поэтому каждое $x'_i$ из $[-1, \tau) \cap \mathcal{O}$ имеет вид $x'_i = \delta(X_i)$ для некоторого $X_i \in \mathbb{Z}$. Любое $x'_i \in \mathcal{O}$ принадлежит полуинтервалу $[-1, \tau)$, а значит $x_i = \delta'(X_i) \in \mathcal{F}$. Отсюда, принимая во внимание равенство $r_k(\alpha) = r_k(\alpha')$ для любого тотально положительного $\alpha \in \mathcal{O}$, получаем утверждение 1.

Если выполнено условие $0 \leq \alpha' < \tau^2$, то радиус сферы (6.4) не превосходит $\tau$. В этом случае все точки $x' \in$ (6.4) содержатся в области $[-1, \tau)^k$, и поэтому неравенство (6.2) можно заменить на равенство (6.2). $\square$

**Замечание 6.1.** Из доказательства теоремы 6.1 вытекает разбиение всех квадратов радиусов $k$-мерной сферы (6.1) на два полуинтервала $[0,\tau^2)$ и $[\tau^2,\tau)$, содержащих $\alpha'$. В последнем случае на сферу (6.1) попадает только часть точек с координатами из кольца $\mathcal{O}$, пропускаемых окном $I^k=[-1,\tau)^k$. В этом месте проявляется существенное различие между распределениями точек на сферах над квазирешеткой $\mathcal{F}$ и квадратичным кольцом $\mathcal{O}$. Можно попытаться заменить (6.2) на равенство вида

$$r_{\mathcal{F},k}(\alpha)=c_{\mathcal{F},k}(\alpha)\cdot r_k(\alpha) \tag{6.5}$$

с коэффициентом $1/2\le c_{\mathcal{F},k}(\alpha)\le 1$. На успех можно расчитывать только для размерностей $k$, когда имеет место равномерное распределение точек на сферах (6.1) над кольцом $\mathcal{O}$. Возможен и другой поход [11]: через введение среднего значения $\widehat{r}_{\mathcal{F},k}(\alpha)$, получающегося усреднением $r_{\mathcal{F},k}(\alpha)$ по всем точкам из $\mathcal{F}$, выбранным в качестве центров сфер. Если ему следовать, то в нашем случае придется кубическое окно $I^k$ заменить $k$-мерным шаром и, значит, заменить $\mathcal{F}$ квазирешеткой сферического типа.

## 7. Суммы квадратов над $\circ$-кольцом $\mathring{\mathbb{Z}}$

**7.1.** Перепишем уравнение (6.4) в виде

$$\delta(X_1)^2+\cdots+\delta(X_k)^2=\delta(A). \tag{7.1}$$

Воспользуемся формулами сложения и $\circ$-умножения (1.11) в $\mathring{\mathbb{Z}}$. Применяя их к равенству (7.1), получаем

$$\delta(X_1\circ X_1+\cdots+X_k\circ X_k)=\delta(A)+M\widetilde{\tau}, \tag{7.2}$$

где $M$ – некоторое число из $\mathbb{Z}$, зависящее от $X_i$, $A$. Используя определение функции $\delta$ (1.2), получаем равенство

$$X_1\circ X_1+\cdots+X_k\circ X_k=A, \tag{7.3}$$

где $X_i$, $A$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}$ и $A$ удовлетворяет условию $\delta(A)=A-r(A)\widetilde{\tau}$ – тотально положительное число, т.е. в силу равенства (1.4)

$$A-[(A+1)\tau]\widetilde{\tau}>0,\quad A+[(A+1)\tau]\tau>0,$$

что равносильно

$$A>0,\quad A>[(A+1)\tau]\widetilde{\tau}. \tag{7.4}$$

Приведенные рассуждения показывают, что решения уравнения (7.1) вкладываются в множество решений уравнения (7.3). Отсюда и из теоремы 6.1 получаем следующий результат.

**Теорема 7.1.** 1. *Пусть* $A \in \mathbb{Z}$ – *положительное число, удовлетворяющее неравенству* $A > [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$, *где* $\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ – *золотое сечение и* $\widetilde{\tau} = \tau + 1$. *Тогда для* $k = 2, 3, 4$ *уравнение*

$$X_1 \circ X_1 + \cdots + X_k \circ X_k = A, \tag{7.5}$$

*где* $X_i \in \mathbb{Z}$ *и*

$$X_i \circ X_i = X_i^2 + [(X_i+1)\tau]^2, \tag{7.6}$$

*имеет число решений* $r_k(A)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$r_k(A) \geq \frac{1}{2} r_k(\alpha), \tag{7.7}$$

*где* $r_k(\alpha)$ – *количество представлений алгебраического числа* $\alpha = A - [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$ *в виде суммы* $k$*-квадратов целых чисел кольца Фибоначчи* $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau]$, *вычисляемое по формулам* (5.4), (5.5) *и* (5.10).

2. *Если дополнительно потребовать выполнение условия* $\delta(A) < \tau^2$, *т.е.* $A < [(A+1)\tau]\widetilde{\tau} + \tau^2$, *то получим усиление неравенства* (7.7):

$$r_k(A) \geq r_k(\alpha). \tag{7.8}$$

$\square$

**7.2. Суммы двух квадратов над** $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$**.** Пусть $A, n \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, $n$ удовлетворяет неравенству $2n - 1 > \log_\tau \frac{1}{A}$ и $I = [-1, \tau)$. Тогда, согласно формулы (1.5), получаем

$$\alpha = \delta(AF_{2n}) = A\delta(F_{2n}) \in I.$$

Более того, имеем $0 < \alpha < \tau$ и $\alpha$ — тотально положительное число, равное

$$\alpha = A\tau^{2n},$$

где $\tau$ является основной единицей кольца Фибоначчи $\mathcal{O}$. Пусть в соответствии с (4.5) $A$ имеет разложение

$$A = 2^{\nu_2} \cdot 5^{\nu_5} \cdot \prod_{p \equiv 2,3 \mod 5} p^{\nu_p} \cdot \prod_{p \equiv \pm 1 \mod 5} p^{\nu_p} \tag{7.9}$$

на простые числа над кольцом $\mathbb{Z}$. Пусть показатели $\nu_p$ в (7.9) будут четными для всех $p \equiv \pm 1 \mod 5$, $p \equiv 3 \bmod 4$. Тогда в силу (5.4) уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 = \alpha$$

над кольцом $\mathcal{O}$ имеет число решений

$$r_2(\alpha) = 4 \cdot (2\nu_5 + 1) \prod_{p \equiv 2,3 \bmod 5} (\nu_p + 1) \prod_{\substack{p \equiv \pm 1 \bmod 5,\\ p \equiv 1 \bmod 4}} (\nu_p + 1)^2. \qquad (7.10)$$

Из теоремы 6.1 вытекает

**Предложение 7.1.** *Пусть $A \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, имеет разложение* (7.9) *на простые множители над кольцом $\mathbb{Z}$, где показатели $\nu_p$ четные для всех $p \equiv \pm 1 \bmod 5$, $p \equiv 3 \bmod 4$, и пусть $n$ – натуральное число. Тогда уравнение*

$$X_1^2 + [(X_1 + 1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2 + 1)\tau]^2 = A \cdot F_{2n}, \qquad (7.11)$$

*где $X_i \in \mathbb{Z}$ и $F_{2n}$ – числа Фибоначчи* (2.1), *имеет количество решений $r_2(A \cdot F_{2n})$, удовлетворяющее неравенству*

$$r_2(A \cdot F_{2n}) \geq \\ c(n) \cdot (2\nu_5 + 1) \prod_{p \equiv 2,3 \bmod 5} (\nu_p + 1) \prod_{\substack{p \equiv \pm 1 \bmod 5,\\ p \equiv 1 \bmod 4}} (\nu_p + 1)^2, \qquad (7.12)$$

*при этом $c(n) = 2$, если $n \geq n_A$, и $c(n) = 4$, если $n \geq n_A + 1$, где*

$$n_A = \frac{1}{2}\Big(\log_\tau \frac{1}{A} + 1\Big).$$

$\square$

Выберем $A = 1$. Тогда $\alpha = \delta(F_{2n}) = \tau^{2n}$ – единица кольца $\mathcal{O}$ и, следовательно, по формуле (7.12) имеем $r_2(F_{2n}) \geq 2$ для всех $n \geq 1$, т.е. уравнение

$$X_1^2 + [(X_1 + 1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2 + 1)\tau]^2 = F_{2n} \qquad (7.13)$$

имеет целые решения $X_i \in \mathbb{Z}$. В качестве одного из решений можно выбрать $X_1 = F_n$, $X_2 = 0$. Поскольку

$$[(F_n + 1)\tau] = F_{n-1},$$

то приходим к известному соотношению [18] для чисел Фибоначчи

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n} \quad \text{для всех} \quad n \geq 1. \tag{7.14}$$

Соотношение (7.14) становится очевидным, если, воспользовавшись формулой $\circ$-умножения, его переписать в виде $F_n \circ F_n = F_{2n}$. Таким образом, числа Фибоначчи $F_{2n}$ представимы суммой квадратов двух целых чисел. А поскольку соседние числа Фибоначчи $F_{n-1}$, $F_n$ взаимно простые, то отсюда вытекает также известный факт:

любые простые числа $p$ из кольца $\mathbb{Z}$, делящие число Фибоначчи $F_{2n}$, где $n \geq 1$, имеют вид $p = 2$ или $p \equiv 1 \mod 4$.

**Следствие 7.1.** *Если $0 \leq m \leq n-1$, то уравнение*

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 = F_{2m} \cdot F_{2n} \tag{7.15}$$

*разрешимо в целых числах $X_i \in \mathbb{Z}$.*

**Доказательство.** Выберем в предложении 7.1 $A = F_{2m}$ с индексом $0 \leq m \leq n-1$ и воспользуемся формулой

$$F_k = \frac{\tau^{-(k+1)} - (-\tau)^{(k+1)}}{\sqrt{5}} \quad \text{для} \quad k \geq 0.$$

Получаем $A\tau^{2n} = F_{2m}\tau^{2n} \leq F_{2n-2}\tau^{2n} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tau < \tau$, откуда следует выполнение неравенства $n \geq n_{F_{2m}}$. Учитывая свойство простых множителей чисел Фибоначчи $F_{2m}$, из предложения 1 получаем утверждение следствия. $\square$

**Замечание 7.1.** Может показаться, что решения уравнения (7.15) получаются композицией решений двух уравнений вида (7.11), у которых справа стоят числа Фибоначчи $F_{2m}$, $F_{2n}$. В действительности это не так: композиция решений приводит к $\circ$-произведению $F_{2m} \circ F_{2n}$ в $\circ$-кольце Фибоначчи $\mathring{\mathbb{Z}}$, а не к обычному произведению $F_{2m} \cdot F_{2n}$ в кольце целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

**Замечание 7.2.** Таким образом, при разложении чисел в сумму квадратов над $\circ$-кольцом $\mathring{\mathbb{Z}}$ играют роль оба умножения $\times$, $\circ$. В предложении 7.1 выявлена роль разложения на простые множители в кольце $\mathbb{Z}$. Если в правой части равенства (7.11) поставить произвольное число $N \in \mathbb{N}$, то аналогичный результат будет формулироваться в терминах $\circ$-разложений из п. 4.2.

### 7.3. Суммы трех квадратов над $\mathring{\mathbb{Z}}$.

**Теорема 7.2.** *Любое неотрицательное число $A \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее неравенству $A \geq [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$, представимо в виде суммы*

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 + X_3^2 + [(X_3+1)\tau]^2 = A, \quad (7.16)$$

*где $X_i \in \mathbb{Z}$.*

**Доказательство** вытекает из теоремы 7.1 и п. 5.4.

□

**Предложение 7.2.** *Пусть произвольное фиксированное число $A \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию $A > [(A+1)\tau]\widetilde{\tau} - \tau^{1/2}$ и $r_3(A \circ A)$ – количество решений уравнения*

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 + X_3^2 + [(X_3+1)\tau]^2 = A \circ A, \quad (7.17)$$

*где $X_i \in \mathbb{Z}$. Тогда для $r_3(A \circ A)$ выполняется следующее неравенство:*

$$r_3(A \circ A) \geq 3 \cdot |A^2 - A[(A+1)\tau] - [(A+1)\tau]^2|. \quad (7.18)$$

**Доказательство.** По формуле (1.5) записываем равенство $\delta(A \circ A) = \delta(A)^2 - \varrho(A,A)\widetilde{\tau}$, где $\varrho(A,A) = 1$ или $0$ соответственно для $\delta(A)^2 \geq \tau$ или $\delta(A)^2 < \tau$. По условию предложения $\delta(A)^2 < \tau$, поэтому в нашем случае выполняется равенство $\delta(A \circ A) = \delta(A)^2$ и, следовательно, радиус сферы (7.1) $|\delta(A)| < \tau^{1/2} < \sqrt{2}\tau$. Это означает, что мы можем применить теорему 7.1 к числу $A \circ A$.

Теперь оценим количество решений $r_3(\alpha)$ для тотально положительного числа $\alpha = \delta(A \circ A) = \delta(A)^2$, являющегося полным квадратом в поле $F = \mathbb{Q}(\tau)$. По формуле (5.16) множитель $c(\beta_{-1}) \geq |N_{F/\mathbb{Q}}(\beta_{-1})|$. Поэтому, используя формулу (5.15), приходим к неравенству

$$r_3(\delta(A \circ A)) \geq 6 \cdot |N_{F/\mathbb{Q}}(\delta(A))|, \quad \text{если} \quad \delta(A)^2 < \tau, \quad (7.19)$$

где, согласно (1.4), норма вычисляется по формуле

$$N_{F/\mathbb{Q}}(\delta(A)) = A^2 - A[(A+1)\tau] - [(A+1)\tau]^2.$$

Отсюда по теореме 7.1 получаем неравенство (7.18).

□

### 7.4. Суммы четырех квадратов над $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$.

**Теорема 7.3.** *Пусть любое неотрицательное число $A \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию $A \geq [(A+1)\tau]\widetilde{\tau}$ и $r_4(A)$ – количество решений уравнения*

$$X_1^2 + [(X_1+1)\tau]^2 + X_2^2 + [(X_2+1)\tau]^2 + X_3^2$$
$$+[(X_3+1)\tau]^2 + X_4^2 + [(X_4+1)\tau]^2 = A, \qquad (7.20)$$

*где $X_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $r_4(A)$ удовлетворяет неравенству*

$$r_4(A) \geq c(A) \cdot |A^2 - A[(A+1)\tau] - [(A+1)\tau]^2|, \qquad (7.21)$$

*где $c(A) = 3$, если $2|A$ и $4 \nmid A$, и $c(A) = 4$ – в остальных случаях.*

**Доказательство.** Из формул (5.6)–(5.9) следует

$$\begin{array}{lll} c_2 = 3, & \text{если} \quad \nu_2 = 1, & \\ c_2 \geq |N_{F/\mathbb{Q}}(2^{\nu_2})|, & \text{если} \quad \nu_2 = 0 \quad \text{или} \quad \nu_2 \geq 2, & \\ c_5 \geq |N_{F/\mathbb{Q}}(\wp_5^{\nu_5})|, & c_p \geq |N_{F/\mathbb{Q}}(p^{\nu_p})|, & \\ c_\wp \geq |N_{F/\mathbb{Q}}(\wp^{\nu_\wp})|, & c_{\wp'} \geq |N_{F/\mathbb{Q}}({\wp'}^{\nu_{\wp'}})|. & \end{array}$$

Отсюда и формулы (5.5) получаем неравенство

$$r_4(\alpha) \geq c(\alpha)|N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha)|, \qquad (7.22)$$

где $c(\alpha) = 6$, если $\nu_2 = 1$, и $c(\alpha) = 8$ – в остальных случаях. Теперь неравенство (7.21) следует из теоремы 7.1 и неравенства (7.22).

□

## Литература


1. R. Lifshitz, *The square Fibonacci tiling*, J. Alloys and Compaunds **342** (2002), 186-190.
2. G. Urban, J. Wolny, *Average unit cell of a square Fibonacci tiling*, J. Non-Cryst. Solids (2004), 334-335, 105-109.
3. D. E. Knuth, *Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. **1** (1988), 57–60.
4. A. Messaoudi, *Tribonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. **15** (2002), 981–985.
5. R. V. Moody, *Model sets: a survey, from Quasicrystals to more complex systems.* Eds. F. Alex, F. Dénoyer and J. P. Gazeau, EPD Science, Les Ulis, and Springer-Verlag, Berlin, 2000.
6. J. F. Sadoc, R. Mosseri, *The $E_8$ lattice and quasicrystals: geometry, number theory and quasicrystals*, J. Phys. A **26** (1993), 1789–1809.

7. R. V. Moody, J. Patera, *Quasicrystals and icosians*, J. Phys. A **26** (1993), 2829–2853.
8. R. V. Moody, A. Weiss, *On shelling $E_8$ quasicrystals*, J. Number Theory **47** (1994), 405–412.
9. A. Weiss, *On shelling icosahedral quasicrystals*, Directions in mathematical quasicrystals, 161–176 GRM Monogr. Ser. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
10. J. Morita, K. Sakamoto, *Octagonal quasicrystals and a formula for shelling*, J. Phys. A **31** (1998), 9321–9325.
11. M. Baake, U. Grimm, *A note on shelling*, Discrete Comput. Geom. **30** (2003), 573–589.
12. N. P. Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics, and combinatorics*, Lect. Notes Math. **1794** (2002).
13. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* М., 1985.
14. J. Hardy, *Sums of two squares in a quadratic ring*, Acta Arithm. **14** (1968), 357–369.
15. H. Cohn, G. Pall, *Sums of four squares in a quadratic ring*, Amer. J. Math. **83** (1962), 536–556.
16. E. N. Donkar, *On sums of three integral squares in algebraic number fields*, Amer. J. Math. **99** (1977), 1297–1328.
17. H. Maass, *Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers $R(\sqrt{5})$ als Summe von drei Quadraten*, Abh. Math. Sem. Hamb. **14** (1941), 185–191.
18. P. Ribenboim, *The book of prime number records.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.


Владимирский государственный
педагогический университет
*E-mail*: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 26 июня 2006 г.