Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

А. С. Жук, В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ АППРОКСИМАЦИИ

Работа состоит из трех параграфов.

В §1 получено обобщение известной теоремы Харди–Юнга (см., например, [1, с. 141, 142; 2, с. 258]), играющей важную роль в теории приближения. Далее, установлено, что для любой 2π-периодической функции, суммируемой на периоде, справедлива формула

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2^r((r-1)!) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r \frac{1}{A_r(t)}dt, \tag{1}$$

где $A_r(t)$ – некоторые положительные тригонометрические полиномы порядка не выше $[r/2]$, которые легко выписываются в явной форме. Формула (1), в частности, позволяет получать для агрегатов приближения (в том числе и классических, таких как суммы Фурье) новые формы записи, которые естественным образом распространяют их на более широкие классы функций, чем периодические. Упомянутые выше результаты применяются к ряду вопросов теории приближения.

В §2 получены новые аппроксимативные характеристики для функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности различных порядков для пространств L_p периодических функций.

Примером установленных здесь утверждений может служить следующее предложение.

Пусть C – пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00742.

– ядро Фейера. Тогда для $f \in C$ соотношения

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\ln n} \left\| \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x)\}\Phi_n(t)dt \right\| \leqslant K,$$

$$f \in \mathrm{Lip}_K\, 1$$

эквивалентны.

В §3 рассматриваются непрерывные, периодические и четные по каждой переменной функции нескольких переменных с неотрицательными коэффициентами Фурье.

Одномерные результаты В. В. Жука [3; 4], посвященные этим вопросам, в весьма оригинальной трактовке были распространены в депонированной работе [5] Н. С. Жук на случай функций нескольких переменных. Полученные в [5] результаты полностью сохранили свое значение, однако, до сих пор не опубликованы. Они и составили содержание §3.

§1. Некоторые представления агрегатов приближения

1. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел, $Q = [-\pi, \pi]$. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Запись $k = \overline{a, b}$, где a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. По определению

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} d_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k + d_{-k}).$$

Пусть E промежуток в $\mathbb{R}$. При $1 \leqslant p < \infty$ через $L_p(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{C}$, у которых

$$\|f\|_{p,E} = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_\infty(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{C}$, у которых

$$\|f\|_{\infty,E} = \operatorname*{vraisup}_{x\in E} |f(x)| < \infty.$$

Если $E = Q$, то вместо $L_p(Q)$ и $\|f\|_{p,Q}$ пишем просто L_p и $\|f\|_p$; при этом функции, входящие в L_p, считаются 2π-периодическими; C – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\sin kt\,dt,$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_Q f(t)e^{-ikt}dt$$

– коэффициенты Фурье функции f;

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx},$$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikx}$$

суть соответственно суммы Фурье и Фейера функции f;

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

– ядро Фейера. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$a(f,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\cos zt\,dt, \quad b(f,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\sin zt\,dt,$$

$$c(f,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-izt}dt$$

– преобразования Фурье функции f.

2. Нам понадобятся следующие известные факты.

Теорема A (см., например, [6, с. 56, 68]). *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in C$ при $p = \infty$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_p = 0.$$

Теорема B (см., например, [7, с. 28, формула (11)]). *Пусть* $r-1\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^r\cos xt\,dx=$$

$$=\begin{cases}\frac{r\pi}{2}\sum\limits_{0\leqslant l<(|t|+r)/2}\frac{(-1)^l(|t|+r-2l)^{r-1}}{l!(r-l)!}, & \textit{если}\quad 0\leqslant|t|\leqslant r,\\ 0, & \textit{если}\quad |t|\geqslant r.\end{cases}$$

3. Следующее важное предложение принято в литературе называть теоремой Харди–Юнга (см., например, [1, с. 141, 142; 2, с. 258], в связи с историей вопроса см. также [8, с. 506-508]).

Теорема C. *Пусть* $f\in L_1$, *функция* $g\in L_1(\mathbb{R})$ *имеет ограниченную вариацию на* $\mathbb{R}$. *Тогда* $fg\in L_1(\mathbb{R})$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}f(t)g(t)dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)\int\limits_{\mathbb{R}}g(t)e^{ikt}dt.$$

Эта теорема впоследствии развивалась в ряде направлений в [9].

Мы сейчас установим еще одно усиление теоремы C. В связи с этим сначала докажем следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть* X *– нормированное пространство,* $x_k\in X$ $(k=\overline{0,\infty})$, $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k$, $\sigma_n=(1/n)\sum\limits_{k=0}^{n-1}s_k$, $\tau_n=(1/n)\sum\limits_{k=n}^{2n-1}s_k$. *Тогда, если* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=s$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n-1}\|x_k\|_X=0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\tau_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n, \tag{1}$$

$$\tau_n=s_n+\sum_{k=n+1}^{2n}\big(2-\frac{k}{n}\big)x_k.$$

В силу (1) и условия $\lim\sigma_n=s$ имеем $\lim\tau_n=s$. Далее,

$$\|\tau_n-s_n\|_X=\|\sum_{k=n+1}^{2n}\big(2-\frac{k}{n}\big)x_k\|_X\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n-1}\|x_k\|_X\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Из приведенных соотношений и очевидного неравенства

$$\|s_n - s\|_X \leqslant \|s_n - \tau_n\|_X + \|\tau_n - s\|_X$$

сразу следует, что $\lim s_n = s$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_1$, $P_k = [2\pi k,\, 2\pi(k+1)]$, *функция* $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ *такова, что ряд*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in P_k} |\Phi(x)|$$

сходится, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} (|a_k(f)| + |b_k(f)|)(|a(\Phi, k)| + |b(\Phi, k)|) = 0, \tag{2}$$

то $f(\cdot + x)\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ *и*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\biggl(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\biggr)e^{ikx}, \tag{3}$$

причем ряд в правой части равенства (3) *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Прежде всего установим, что функия $f(\cdot + x)\Phi$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)\Phi(t)|dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{P_k} |f(x+t)\Phi(t)|dt$$
$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k \int_{P_k} |f(x+t)|dt = \|f\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k < \infty.$$

Теперь покажем, что в условиях теоремы

$$\alpha_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \biggl| \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt - \sum_{k=-n}^{n} \bigl(1 - \frac{|k|}{n}\bigr) c_k(f)$$
$$\times \biggl(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\biggr)e^{ikx}\biggr| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

т.е., иными словами, ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\right)e^{ikx}$$

суммируется в пространстве C методом средних арифметических к интегралу

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt.$$

Имеем

$$\alpha_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt - \int_{\mathbb{R}} \sigma_{n-1}(f,x+t)\Phi(t)dt\right|$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-\sigma_{n-1}(f,x+t)||\Phi(t)|dt \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k$$
$$\times \int_{P_k} |f(x+t)-\sigma_{n-1}(f,x+t)|dt = \|f-\sigma_{n-1}(f)\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k. \qquad (4)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-\sigma_{n-1}(f)\|_1 = 0$ (теорема А, $p=1$), то из (4) вытекает, что $\lim\alpha_n = 0$.

Простые вычисления показывают, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\right)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2}a(\Phi,0)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\{(a_k(f)a(\Phi,k)+b_k(f)b(\Phi,k))\cos kx + (b_k(f)a(\Phi,k)$$
$$-a_k(f)b(\Phi,k))\sin kx\}. \qquad (5)$$

Далее,

$$\beta_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \|(a_k(f)a(\Phi,k)+b_k(f)b(\Phi,k))\cos kx + (b_k(f)a(\Phi,k)$$
$$-a_k(f)b(\Phi,k))\sin kx\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n-1}(|a_k(f)|+|b_k(f)|)(|a(\Phi,k)|+|b(\Phi,k)|).$$

Следовательно, в силу (2), $\lim \beta_n = 0$. Из соотношений $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$ и леммы 1 (в которой надо положить $X = C$) вытекает, что ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\biggr)e^{ikx}$$

сходится в пространстве C к интегралу $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt$.

Замечание 1. Основываясь на результатах, изложенных в работе [9], нетрудно установить, что теорема C является следствием теоремы 1.

Положим при $r-1 \in \mathbb{N}$

$$\lambda_r(t) = \begin{cases} \sum\limits_{0\leqslant l<(|t|+r/2)} (-1)^l C_r^l(|t|+\frac{r}{2}-l)^{r-1}, & \text{если} \quad |t| \leqslant \frac{r}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad |t| \geqslant \frac{r}{2}. \end{cases}$$

Опираясь на теоремы 1 и B, после простых преобразований приходим к следствию 1.

Следствие 1. *Пусть $r-1\in\mathbb{N}$, $a>0$, $f\in L_1$. Тогда*

$$\frac{(r-1)!}{\pi a^{r-1}\lambda_r(0)}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\left(\frac{\sin at}{t}\right)^r dt = \sum_{k=-[ar]}^{[ar]} c_k(f)\frac{\lambda_r\left(\frac{k}{2a}\right)}{\lambda_r(0)}e^{ikx}, \tag{6}$$

где $[b]$, как обычно, есть целая часть числа b.

Из (6) в частности следует, что при $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{2}{\pi n}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^2 dt = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)c_k(f)e^{ikx}, \tag{7}$$

$$\frac{12}{\pi n^3}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^4 dt = \sum_{k=-2n}^{2n} g(\frac{k}{n})c_k(f)e^{ikx}, \tag{8}$$

где

$$g(t) = \begin{cases} 1-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{4}|t|^3, & \text{если} \quad |t|\leqslant 1, \\ 2-3|t|+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{4}|t|^3, & \text{если} \quad 1\leqslant |t|\leqslant 2. \end{cases}$$

Формулы (7) и (8) приведены в книге [1, с. 144, 375]. Соотношение (6) также может быть отнесено к ранее известным.

Следствие 2. *Пусть* $r-1\in\mathbb{N}$, $a>0$, $f\in L_1$. *Тогда*

$$\frac{(r-1)!}{\pi a^{r-1}\lambda_r(0)}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{\sin at}{t}\right)^r dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q} f(t)\{1+2\sum_{k=1}^{[ra]}\frac{\lambda_r(\frac{k}{2a})}{\lambda_r(0)}\cos kt\}dt. \tag{9}$$

Следствие 3. *Пусть* $r-1\in\mathbb{N}$, $f\in L_1$. *Тогда*

$$\frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi\lambda_r(0)}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q} f(t)\{1+2\sum_{k=1}^{[r/2]}\frac{\lambda_r(k)}{\lambda_r(0)}\cos kt\}dt. \tag{10}$$

Для доказательства (10) достаточно положить в (9) $a=1/2$.

4. Приведем небольшие таблицы явных выражений функий $\lambda_r(t)$ и чисел $\lambda_r(k)$. Эти величины полезны в ряде вопросов теории приближения, в частности они тесно связаны с ядрами В. А. Стеклова.

Таблица 1. Явные выражения функций $\lambda_r(t)$ для $r = \overline{2,8}$ при $|t| \leqslant r/2$

$r=2$	$\lvert t\rvert \leqslant 1$	$\lambda_2(t) = -\lvert t\rvert + 1$
$r=3$	$\lvert t\rvert \leqslant 1/2$ $1/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 3/2$	$\lambda_3(t) = -2t^2 + 3/2$ $\lambda_3(t) = t^2 - 3\lvert t\rvert + 9/4$
$r=4$	$\lvert t\rvert \leqslant 1$ $1 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 2$	$\lambda_4(t) = 3\lvert t\rvert^3 - 6t^2 + 4$ $\lambda_4(t) = -\lvert t\rvert^3 + 6t^2 - 12\lvert t\rvert + 8$
$r=5$	$\lvert t\rvert \leqslant 1/2$ $1/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 3/2$ $3/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 5/2$	$\lambda_5(t) = 6t^4 - 15t^2 + \frac{115}{8}$ $\lambda_5(t) = -4t^4 + 20\lvert t\rvert^3 - 30t^2 + 5\lvert t\rvert + \frac{55}{4}$ $\lambda_5(t) = t^4 - 10\lvert t\rvert^3 + \frac{75}{2}t^2 - \frac{125}{2}\lvert t\rvert + \frac{625}{16}$
$r=6$	$\lvert t\rvert \leqslant 1$ $1 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 2$ $2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 3$	$\lambda_6(t) = -10\lvert t\rvert^5 + 30t^4 - 60t^2 + 66$ $\lambda_6(t) = 5\lvert t\rvert^5 - 45t^4 + 150\lvert t\rvert^3 - 210t^2 + 75\lvert t\rvert + 51$ $\lambda_6(t) = -\lvert t\rvert^5 + 15t^4 - 90\lvert t\rvert^3 + 270t^2 - 405\lvert t\rvert + 243$
$r=7$	$\lvert t\rvert \leqslant 1/2$ $1/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 3/2$ $3/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 5/2$ $5/2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 7/2$	$\lambda_7(t) = -20t^6 + 105t^4 - \dfrac{1155}{4}t^2 + \dfrac{5887}{16}$ $\lambda_7(t) = 15t^6 - 105\lvert t\rvert^5 + \frac{945}{4}t^4 - \frac{175}{2}\lvert t\rvert^3 - \dfrac{4095}{16}t^2 - \dfrac{105}{16}\lvert t\rvert + \dfrac{23583}{64}$ $\lambda_7(t) = -6t^6 + 84\lvert t\rvert^5 - \frac{945}{2}t^4 + 1330\lvert t\rvert^3 - \dfrac{14805}{8}t^2 + \dfrac{3801}{4}\lvert t\rvert + \dfrac{4137}{32}$ $\lambda_7(t) = \lvert t\rvert^6 - 21\lvert t\rvert^5 + \frac{735}{4}t^4 - \frac{1715}{2}\lvert t\rvert^3 + \dfrac{36015}{16}t^2 - \dfrac{50421}{16}\lvert t\rvert + \dfrac{117649}{64}$
$r=8$	$\lvert t\rvert \leqslant 1$ $1 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 2$ $2 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 3$ $3 \leqslant \lvert t\rvert \leqslant 4$	$\lambda_8(t) = 35\lvert t\rvert^7 - 140t^6 + 560t^4 - 1680t^2 + 2416$ $\lambda_8(t) = -21\lvert t\rvert^7 + 252t^6 - 1176\lvert t\rvert^5 + 2520t^4 - 1960\lvert t\rvert^3 - 504t^2 - 392\lvert t\rvert + 2472$ $\lambda_8(t) = 7\lvert t\rvert^7 - 140t^6 + 1176\lvert t\rvert^5 - 5320t^4 + 13720\lvert t\rvert^3 - 19320t^2 + 12152\lvert t\rvert - 1112$ $\lambda_8(t) = -\lvert t\rvert^7 + 28t^6 - 336\lvert t\rvert^5 + 2240t^4 - 8960\lvert t\rvert^3 + 21504t^2 - 28672\lvert t\rvert + 16384$

5. Положим при $r - 1 \in \mathbb{N}$

$$A_r(t) = \lambda_r(0) + 2\sum_{k=1}^{[r/2]} \lambda_r(k)\cos kt.$$

Тогда соотношение (10) можно переписать в виде

$$\frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q} f(t)A_r(t)dt. \tag{11}$$

Таблица 2. Числа $\lambda_r(k)$ при $r = \overline{2,10}$.

$\lambda_2(0) = 1; \lambda_3(0) = 3/2, \lambda_3(1) = 1/4; \lambda_4(0) = 4, \lambda_4(1) = 1; \lambda_5(0) = 115/8,$
$\lambda_5(1) = 19/4, \lambda_5(2) = 1/16; \lambda_6(0) = 66, \lambda_6(1) = 26, \lambda_6(2) = 1; \lambda_7(0) = 5887/16,$
$\lambda_7(1) = 10543/64, \lambda_7(2) = 361/32, \lambda_7(3) = 1/64; \lambda_8(0) = 2416, \lambda_8(1) = 1191,$
$\lambda_8(2) = 120, \lambda_8(3) = 1; \lambda_9(0) = 2337507/128, \lambda_9(1) = 310661/32,$
$\lambda_9(2) = 82903/64, \lambda_9(3) = 819/32, \lambda_9(4) = 1/256; \lambda_{10}(0) = 156190,$
$\lambda_{10}(1) = 88234, \lambda_{10}(2) = 14608, \lambda_{10}(3) = 502, \lambda_{10}(4) = 1.$

Лемма 2. *Пусть $r - 1 \in \mathbb{N}$. Тогда $\min\limits_{t \in \mathbb{R}} A_r(t) > 0$.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\frac{r-1}{2} \in \mathbb{N}$, т.е. случаем нечетного r. Случай четного r рассматривается аналогично, но проще. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x+t)(-1)^{kr}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t+2\pi k}\right)^r dt$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} f(x+t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{kr}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t+2\pi k}\right)^r dt.$$

Положим

$$B_r(t) = \left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{kr}\left\{\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t+2\pi k}\right)^r + \left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t-2rk}\right)^r\right\}.$$

При $t \in (0, 2\pi)$ сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{kr}\left\{\left(\frac{1}{t+2\pi k}\right)^r+\left(\frac{1}{t-2\pi k}\right)^r\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(t-2\pi k)^r+(t+2\pi k)^r}{(t^2-4\pi^2k^2)^r}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(t+2\pi k)^r+(t-2\pi k)^r}{(4\pi^2k^2-t^2)^r}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\beta_k(t)$$

неотрицательна, ибо

$$\beta_k(t)=\frac{1}{(4\pi^2k^2)^r}\frac{\sum\limits_{l=0}^{r}C_r^l t^{r-l}(2\pi k)^l+\sum\limits_{l=0}^{r}C_r^l t^{r-l}(2\pi k)^l(-1)^l}{\left(1-\frac{t^2}{4\pi^2k^2}\right)^r}$$
$$=\frac{2\sum\limits_{l=0}^{[r/2]}C_r^{2l}t^{r-2l}\frac{(2\pi k)^{2l}}{(2\pi k)^r}}{\left(1-\frac{t^2}{4\pi^2k^2}\right)^r}\frac{1}{(2\pi k)^r}$$

убывает с ростом r. Отсюда вытекает, что $B_r(t) > 0$ при $t \in (0, 2\pi)$. Непосредственно вычисления дают: $B_r(0) = B_r(2\pi) = 2^{-r}$. Функция $B_r(t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$. Поэтому из сказанного выше следует, что $\min\limits_{[0,2\pi]} B_r(t) > 0$. Далее, в силу (11), для любой $f \in L_1$ справедливо равенство

$$(r-1)!2^r\int_0^{2\pi}f(t)B_r(t)dt=\int_0^{2\pi}f(t)A_r(t)dt.$$

Значит, при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k((r-1)!2^rB_r)=c_k(A_r)$$

и потому

$$A_r(t)=(r-1)!2^rB_r(t)\geqslant(r-1)!2^r\min_{[0,2\pi]}B_r(t)>0.$$

Следствие 4. *Пусть* $r-1\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$A_r(0)=\lambda_r(0)+2\sum_{k=1}^{[r/2]}\lambda_r(k)=(r-1)!$$

Доказательство. Имеем

$$A_r(0)=(r-1)!2^rB_r(0)=(r-1)!$$

Теорема 2. *Пусть* $r-1\in\mathbb{N}$, $f\in L_1$. *Тогда*

$$\int\limits_Q f(t)dt=(r-1)!2^r\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^r\frac{1}{A_r(t)}dt. \tag{12}$$

Для доказательства соотношения (12) достаточно применить формулу (11) к функции $g\in L_1$ и, приняв во внимание лемму 2, положить $f(t)=g(t)A_r(t)$.

6. Формула (12) весьма полезна в вопросах теории аппроксимации. Она дает возможность легко переходить от формы записи агрегата приближения в виде интеграла по конечному промежутку к форме записи в виде интеграла, распространенного на всю ось. Последнее позволяет рассматривать соответствующий оператор на более широких классах функций, чем периодические.

Приведем два примера приложений формулы (12).

Пример 1. Пусть $f\in L_1$, k, $n+1\in\mathbb{N}$. Величина

$$\sigma_{n,k}(f)=\frac{1}{k}\sum_{l=n}^{n+k-1}s_l(f)$$

называется суммой Валле Пуссена функции f.

Суммы $\sigma_{n,k}(f)$ могут быть записаны (см., например, [10, с. 57]) в виде

$$\sigma_{n,k}(f,x)=\int\limits_Q f(x+t)V_{n,k}(t)dt,$$

где

$$V_{n,k}(t)=\frac{\sin^2((n+k)/2)t-\sin^2(n/2)t}{2\pi k\sin^2(t/2)}.$$

Ясно, что

$$\sigma_{n,1}(f) = s_n(f), \quad \sigma_{0,k+1}(f) = \sigma_k(f).$$

На основании формулы (12) имеем для $f \in L_1$ при $r-1 \in \mathbb{N}$

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi k} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{(\sin^2((n+k)/2)t - \sin^2(n/2)t)}{t^r}$$

$$\times \frac{\sin^{r-2}(t/2)}{A_r(t)} dt \tag{13}$$

или, что тоже самое,

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi k} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{k}{2})t \sin\frac{kt}{2}}{A_r(t)} \frac{\sin^{r-2}\frac{t}{2}}{t^r} dt.$$

Отсюда (при $r=2$) следует, что

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \frac{2}{\pi k} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{\sin\frac{kt}{2} \sin(n+\frac{k}{2})t}{t^2} dt.$$

Последняя формула известна (см., например, [10, с. 178]). Из (13), в частности, следует, что

$$s_n(f,x) = \frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t \sin\frac{t}{2}}{A_r(t)} \frac{\sin^{r-2}\frac{t}{2}}{t^r} dt, \tag{14}$$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{(r-1)!2^{r-1}}{\pi(n+1)} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{A_r(t)} \frac{\sin^{r-2}\frac{t}{2}}{t^r} dt.$$

Здесь $r-1 \in \mathbb{N}$. Формула (14) (при $r=2$) была успешно использована при изучении вопросов сильной аппроксимации функций в работе [11].

Пример 2. Пусть r, $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_1$. Положим

$$D_{2r,n}(f,x) = \frac{(2r-1)!2^{2r-1}}{\pi n^{2r-1}\lambda_{2r}(0)} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^{2r} dt.$$

Интеграл $D_{2r,n}(f)$ называется обобщенным интегралом Джексона – Валле Пуссена. С помощью формулы (12) запишем его в виде интеграла по отрезку Q. Опираясь на (12), имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2r}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^{2r}dt$$

$$= \frac{1}{(2r-1)!2^{2r}}\int_{Q} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2r}\{\lambda_{2r}(0)+2\sum_{k=1}^{r}\lambda_{2k}(k)\cos kt\}dt.$$

Отсюда следует, что

$$D_{2r,n}(f,x) = \frac{1}{2\pi n^{2r-1}\lambda_{2r}(0)}\int_{Q} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2r}\{\lambda_{2r}(0)$$

$$+2\sum_{k=1}^{r}\lambda_{2r}(k)\cos kt\}dt. \tag{15}$$

В частности,

$$D_{2,n}(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{Q} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2}dt, \tag{16}$$

$$D_{4,n}(f,x) = \frac{1}{2\pi n^3}\int_{Q} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{4}(1+\frac{1}{2}\cos t)dt. \tag{17}$$

Формула (16) установлена Валле Пуссеном (см., например, [1, с. 143-145]), соотношение (17) имеется в книгах [12, с. 129-132, 136; 1, с. 375].

7. Пусть H_m – множество тригонометрических полиномов порядка не выше m, $H = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} H_m$, P – полунорма заданная на H, такая, что $P(T) = P(T(\cdot + h))$ для $T \in H$, $h \in \mathbb{R}$; $P(T) \leqslant M\|T\|$ для $T \in H$.

Теорема 3. *Пусть r, n, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant rn$, $T \in H_m$. Тогда*

$$P(T - D_{2r,n}(T)) \leqslant P(T)2\left(1 - \frac{(2r-1)!n}{2m\lambda_{2r}(0)}\right). \tag{18}$$

Доказательство. В силу (6)

$$D_{2r,n}(f,x)=\sum_{k=-nr}^{nr}c_k(f)\frac{\lambda_{2r}(k/n)}{\lambda_{2r}(0)}e^{ikx}$$

для любой $f\in L_1$. Рассуждая аналогично доказательству формулы (6) на стр. 203 книги [13] и принимая во внимание (15), приходим к неравенству

$$P(T-D_{2r,n}(T))\leqslant P(T)2\biggl(1-\frac{n}{2m}\biggl(1+2\sum_{k=1}^{r}\frac{\lambda_{2r}(k)}{\lambda_{2r}(0)}\biggr)\biggr).$$

Осталось воспользоваться следствием 4.

Замечание 2. При $r=1$, $m=n$ соотношение (18) переходит в известное неравенство Г. Сегё

$$P(\tilde{T}')\leqslant nP(T),$$

если $T\in H_n$.

§2. Аппроксимативные характеристики функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности

1. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}$. Величина

$$\Delta_h^r(f,x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}C_r^kf(x+kh)$$

называется разностью r-го порядка функции f в точке x с шагом h, величина

$$\delta_h^r(f,x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^kC_r^kf\bigl(x+\frac{(r-2k)h}{2}\bigr)$$

– центральной разностью r-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Пусть $f\in L_p$, $r\in\mathbb{N}$. Полагаем

$$\omega_{r,p}(f,h)=\sup_{|t|\leqslant h}\|\Delta_t^r(f)\|_p=\sup_{|t|\leqslant h}\|\delta_t^r(f)\|_p.$$

Величина $\omega_{r,p}(f,h)$ называется модулем непрерывности функции f в пространстве L_p порядка r.

В дальнейшем нам понадобится следующая известная теорема.

Теорема A (см., например, [6, с. 111]). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_p$ *при* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C$ *при* $p = \infty$. *Тогда соотношения*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n^{(r)}(f)\|_p \leqslant K, \tag{1}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \|\sigma_n^{(r)}(f)\|_p \leqslant K, \tag{2}$$

$$\sup_{h\in(0,\infty)} h^{-r}\omega_{r,p}(f,h) \leqslant K, \tag{3}$$

$$\varliminf_{h\to 0+} h^{-r}\omega_{r,p}(f,h) \leqslant K \tag{4}$$

эквивалентны, т.е. выполнение одного из соотношений (1)–(4) *влечет выполнение трех других.*

2. Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $E = [a,b]$, $f \in L_p$, $\Psi_n : E \to \mathbb{R}_+$ $(n = \overline{1,\infty})$ – *последовательность функций из* $L_\infty(E)$,

$$\Delta_{n,k} = \left| \int\limits_E t^k \Psi_n(t)dt \right|, \quad \delta_{n,k} = \int\limits_E |t|^k \Psi_n(t)dt.$$

Тогда, если при некотором $r \in \mathbb{N}$ *имеют место соотношения:* $\Delta_{n,r} \neq 0$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n,r+1}}{\Delta_{n,r}} = 0,$$

то неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \|\int\limits_E \Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt\|_p \leqslant K \tag{5}$$

влечет соотношение

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n^{(r)}(f)\|_p \leqslant K.$$

Доказательство. При любых натуральных n и m

$$\Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(\sigma_m(f))\Psi_n(t)dt\Big\|_p = \Big\|\int\limits_E \sigma_m(\Delta_t^r(f))\Psi_n(t)dt\Big\|_p$$

$$= \Big\|\int\limits_E \big(\int\limits_Q \Delta_t^r(f,x+u)\Phi_{m+1}(u)du\big)\Psi_n(t)dt\Big\|_p$$

$$= \Big\|\int\limits_Q \Big(\int\limits_E \Delta_t^r(f,x+u)\Psi_n(t)dt\Big)\Phi_{m+1}(u)du\Big\|_p$$

$$\leqslant \int\limits_Q \Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(f,\cdot+u)\Psi_n(t)dt\Big\|_p \Phi_{m+1}(u)du$$

$$= \Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt\Big\|_p,$$

так как $\int\limits_Q \Phi_{m+1}(u)du = 1$, а

$$\Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(f,\cdot+u)\Psi_n(t)dt\Big\|_p$$

не зависит от u. Далее,

$$\Delta_t^r(\sigma_m(f),x) = \int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t \sigma_m^{(r)}(f,x+t_1+\cdots+t_r)dt_1\ldots dt_r$$

$$= \sigma_m^{(r)}(f,x)t^r + \int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t\{\int\limits_0^{t_1+\cdots+t_r} \sigma_m^{(r+1)}(f,x+z)dz\}dt_1\ldots dt_r.$$

Следовательно,

$$\Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(\sigma_m(f))\Psi_n(t)dt\Big\|_p \geqslant \|\sigma_m^{(r)}(f)\|_p\Big|\int\limits_E t^r\Psi_n(t)dt\Big|$$

$$-r\|\sigma_m^{(r+1)}(f)\|_p\int\limits_E |t|^{r+1}\Psi_n(t)dt.$$

Из сказанного вытекает, что при любом $m \in \mathbb{N}$

$$K \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \left\| \int\limits_E \Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt \right\|_p$$

$$\geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \left\| \int\limits_E \Delta_t^r(\sigma_m(f))\Psi_n(t)dt \right\|_p \geqslant \|\sigma_m^{(r)}(f)\|_p$$

$$-r\|\sigma_m^{(r+1)}(f)\|_p \lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n,r+1}}{\Delta_{n,r}} = \|\sigma_m^{(r)}(f)\|_p.$$

Значит,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|\sigma_m^{(r)}(f)\|_p \leqslant K.$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *неравенство* (5) *можно заменить на соотношение*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \left\| \int\limits_E \delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt \right\|_p \leqslant K. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $E = [a,b]$, $a \geqslant 0$, $f \in L_p$ *при* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C$ *при* $p = \infty$, $\Psi_n : E \to \mathbb{R}_+$ $(n = \overline{1,\infty})$ *– последовательность функций из* $L_\infty(E)$,

$$\Delta_{n,k} = \int\limits_E t^k \Psi_n(t)dt.$$

Тогда, если при некотором $r \in \mathbb{N}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство* $\Delta_{n,r} > 0$ *и выполнено равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{n,r+1}}{\Delta_{n,r}} = 0,$$

то соотношения

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \left\| \int\limits_E \Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt \right\|_p \leqslant K, \tag{7}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (\Delta_{n,r})^{-1} \left\| \int\limits_E \delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt \right\|_p \leqslant K, \tag{8}$$

$$\sup_{h\in(0,\infty)} h^{-r}\omega_{r,p}(f,h)\leqslant K \tag{9}$$

эквивалентны, т.е. выполнение одного из соотношений (7)–(9) *влечет выполнение двух других.*

Доказательство. Пусть выполнено (9). Тогда

$$\Big\|\int\limits_E \Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt\Big\|_p\leqslant\int\limits_E\|\Delta_t^r(f)\|_p\Psi_n(t)dt$$

$$\leqslant\int\limits_E\omega_{r,p}(f,t)\Psi_n(t)dt\leqslant K\int\limits_E t^r\Psi_n(t)dt=K\Delta_{n,r}.$$

Значит,

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\Delta_{n,r})^{-1}\Big\|\int\limits_E\Delta_t^r(f)\Psi_n(t)dt\Big\|_p\leqslant K.$$

Аналогично доказывается, что (9) влечет (8).

С другой стороны, из соотношения (7) в силу теоремы 1 следует, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\sigma_n^{(r)}(f)\|_p\leqslant K$, а потому, на основании теоремы A, выполнено и неравенство (9). Аналогично доказывается, что неравенство (8) (здесь вместо теоремы 1 применяется теорема 2) влечет (9).

3. Приведем примеры приложений результатов, установленных в пункте 2.

Пример 1. Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L_p$ при $1\leqslant p<\infty$, $f\in C$ при $p=\infty$,

$$\Pi_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos t}$$

– ядро Пуассона. Тогда соотношения

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\ln n}\Big\|\int\limits_0^\pi\{f(\cdot+t)-f\}\Phi_n(t)dt\Big\|_p\leqslant K,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\ln n}\Big\|\int\limits_0^\pi\Big\{f\Big(\cdot+\frac{t}{2}\Big)-f\Big(\cdot-\frac{t}{2}\Big)\Big\}\Phi_n(t)dt\Big\|_p\leqslant K,$$

$$\varlimsup_{\alpha\to 0+}\frac{\pi}{\alpha|\ln\alpha|}\left\|\int_0^\pi\{f(\cdot+t)-f\}\Pi_\alpha(t)dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\varlimsup_{\alpha\to 0+}\frac{\pi}{\alpha|\ln\alpha|}\left\|\int_0^\pi\Big\{f\Big(\,\cdot+\frac{t}{2}\Big)-f\Big(\,\cdot-\frac{t}{2}\Big)\Big\}\Pi_\alpha(t)dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\sup_{t\in(0,\infty)}t^{-1}\omega_{1,p}(f,t)\leqslant K$$

эквивалентны.

Доказательство получается из сопоставления теоремы 3 с известными (см., например, [6, с. 305, 306]) соотношениями

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\ln n}\int_0^\pi t\Phi_n(t)dt=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\ln n}\int_0^\pi t^2\Phi_n(t)dt=0,$$

$$\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\pi}{\alpha|\ln\alpha|}\int_0^\pi t\Pi_\alpha(t)dt=1,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\pi}{\alpha|\ln\alpha|}\int_0^\pi t^2\Pi_\alpha(t)dt=0.$$

Пример 2. Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L_p$ при $1\leqslant p<\infty$, $f\in C$ при $p=\infty$, функция $\Psi:[0,\pi]\to\mathbb{R}_+$, принадлежит $L_\infty([a,\pi])$ при любом $a\in(0,\pi)$,

$$\Delta_{h,k}=\int_h^\pi t^k\Psi(t)dt.$$

Тогда, если при некотором $r\in\mathbb{N}$ при всех $h\in(0,\pi)$ справедливо неравенство $\Delta_{h,r}>0$ и выполнено равенство

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Delta_{h,r+1}}{\Delta_{h,r}}=0,$$

то соотношения

$$\varlimsup_{h\to 0+}(\Delta_{h,r})^{-1}\left\|\int\limits_h^{\pi}\Delta_t^r(f)\Psi(t)dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\varlimsup_{h\to 0+}(\Delta_{h,r})^{-1}\left\|\int\limits_h^{\pi}\delta_t^r(f)\Psi(t)dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\sup_{h\in(0,\infty)}h^{-r}\omega_{r,p}(f,h)_p\leqslant K$$

эквивалентны.

Пример 2 легко устанавливается с помощью теоремы 3.

Следствие 1. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L_p$ *при* $1\leqslant p<\infty$, $f\in C$ *при* $p=\infty$, $r\in\mathbb{N}$. *Тогда соотношения*

$$\varlimsup_{h\to 0+}(\ln\frac{\pi}{h})^{-1}\left\|\int\limits_h^{\pi}\frac{\Delta_t^r(f)}{t^{r+1}}dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\varlimsup_{h\to 0+}(\ln\frac{\pi}{h})^{-1}\left\|\int\limits_h^{\pi}\frac{\delta_t^r(f)}{t^{r+1}}dt\right\|_p\leqslant K,$$

$$\sup_{h\in(0,\infty)}h^{-r}\omega_{r,p}(f,h)_p\leqslant K$$

эквивалентны.

§3. Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения функций нескольких переменных с неотрицательными коэффициентами Фурье

Этот параграф написан на основании депонированной работы [5] Н. С. Жук.

В нем устанавливается ряд соотношений между равномерными наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами и коэффициентами Фурье непрерывных, периодических и четных по каждой переменной функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

1. В дальнейшем, если A – некоторое множество, то $A^m = A \times \cdots \times A$ (m раз), $Q_m = [-\pi, \pi]^m$, $\mathbb{O}^m = (0, \ldots, 0)$ – нулевой элемент $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{I}^m = (1, \ldots, 1)$ (m единиц). Если $A \subset \mathbb{R}^m$, то запись $\sum\limits_{k \in A}$ означает $\sum\limits_{k \in A \cap \mathbb{Z}^m}$. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{C}$. Ряд $\sum\limits_{k \in A} y_k$ называется сходящимся, если сходится последовательность $s_n = \sum\limits_{k \in A \cap [-n,n]^m}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. Суммой ряда называется предел s этой последовательности: $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$. Если рассматривается некоторая величина $x \in \mathbb{C}^m$, то $x_k (k = \overline{1,m})$ обозначает ее k-ю координату, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Если a, $b \in \mathbb{R}^m$, то запись $a \leqslant b$ означает, что $a_k \leqslant b_k$ при каждом $k = \overline{1,m}$, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^m; a \leqslant x \leqslant b\}$. Через $B_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ обозначаем неотрицательные вещественные постоянные, зависящие только от выписанных аргументов. Если $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\mathbb{Z}_n^m = \mathbb{Z}_+^m \backslash \{[\mathbb{O}^m, \mathbb{I}^m n] \cap \mathbb{Z}^m\}$. При $k \in \mathbb{Z}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$ по определению полагаем $\cos kx = \prod\limits_{i=1}^m \cos k_i x_i$. Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ называется периодической, если для всех $x \in \mathbb{R}^m$ при каждом $k = \overline{1,m}$ выполняется тождество $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + 2\pi, x_{k+1}, \ldots, x_m) = f(x)$. Через $C(Q_m)$ обозначаем пространство непрерывных периодических функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C(Q_m)} = \max_{x \in Q_m} |f(x)|.$$

Если $k \in \mathbb{Z}^m$, $f \in C(Q_m)$, то

$$a_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^l \pi^{m-l}} \int\limits_{Q_m} f(x) \cos kx dx,$$

где l – число k_i, равных нулю, – косинус-коэффициент Фурье функции f. Полагаем $C_A(Q_m) = \{f \in C(Q_m);\ f$ – четная функция по каждой переменной $x_i (i = \overline{1,m})$, $a_k(f) \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{Z}_+^m\}$. Если x, $y \in \mathbb{R}^m$, то $(x \cdot y) = \sum\limits_{k=1}^m x_k y_k$. Пусть $f \in C(Q_m)$. Тогда

$$c_k(f) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q_m} f(x) e^{-i(x \cdot k)} dx \quad (k \in \mathbb{Z}^m)$$

– коэффициенты Фурье функции f,

$$s_n(f, x) = \sum_{k \in [-n,n]} c_k(f) e^{i(x \cdot k)} \quad (x \in \mathbb{R}^m,\ n \in \mathbb{Z}_+^m)$$

– частная сумма порядка n ряда Фурье функции f. Ясно, что для $f \in C_A(Q_m)$ имеет место равенство

$$s_n(f,x) = \sum_{k\in[\mathbb{O}^m,n]} a_k(f)\cos kx.$$

Для $f \in C(Q_m)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ полагаем

$$s_n(m,f,x) = s_{\mathbb{1}^m n}(f,x).$$

Пусть $f \in C(Q_m)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sigma_n(m,f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(m,f,x),$$

$$\tau_n(m,f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} s_k(m,f,x)$$

суть соответственно суммы Фейера–Марцинкевича и суммы Валле Пуссена–Марцинкевича функции f. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^m$, $x \in \mathbb{R}^m$. Сумма $T(x) = \sum\limits_{k\in[-n,n]} c_k e^{i(x\cdot k)}$, где $c_k \in \mathbb{C}$, называется тригонометрическим полиномом порядка n. Множество всех тригонометрических полиномов порядка n обозначается H_n. Для $f \in C(Q_m)$, $n \in \mathbb{Z}_+^m$ полагаем

$$E_n(f) = \inf_{T\in H_n} \|f - T\|.$$

Если $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C(Q_m)$, то $E_n(m,f) = E_{n\mathbb{1}^m}(f)$;

$$A_n(m,f) = \|s_n(m,f) - s_{n-1}(m,f)\|$$

при $n \in \mathbb{N}$, $A_0(m,f) = \|s_0(m,f)\|$.

2. Приведем ряд результатов вспомогательного характера.

Теорема A. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$B_1(m) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in C(Q_m)} \{\|\sigma_n(m,f)\| \,/\, \|f\|\} < \infty, \tag{1}$$

$$B_2(m) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in C(Q_m)} \{\|\tau_n(m,f)\| \,/\, \|f\|\} < \infty. \tag{2}$$

Неравенство (2) – очевидное следствие неравенства (1), ибо $\tau_n(m,f) = 2\sigma_{2n}(m,f) - \sigma_n(m,f)$. Соотношение (1) при $m = 1$ (в этом случае $B_1(1) = 1$) хорошо известно, при $m = 2$ оно установлено И. Марцинкевичем (см. [14, с. 527–538]), общий случай рассмотрен А. Н. Подкорытовым [15].

Теорема B. *Пусть* $m,\ n \in \mathbb{N}$, $f \in C(Q_m)$. *Тогда*

$$\|f - \tau_n(m,f)\| \leqslant B_3(m)\, E_n(m,f), \tag{3}$$

где $B_3(m) = B_2(m) + 1$.

В основе неравенства (3) лежит соотношение (2). Неравенство (3) при $m = 1$ впервые было получено Валле Пуссеном (см., например, 16, с. 212]).

Лемма 1. *Если* $f \in C_A(Q_m)$, *то* $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+^m} a_k(f) < \infty$.

Доказательство. Ясно, что

$$\alpha_n = \sum_{k \in [\mathbb{O}^m, \mathbb{I}^m n]} a_k(f) \leqslant 2\sigma_{2n}(m,f,0).$$

Отсюда и из неравенства (1) вытекает, что $\alpha_n \leqslant 2B_1(m)\|f\|$. Таким образом, α_n – возрастающая ограниченная последовательность. Следовательно, она сходится.

Замечание 1. В связи с леммой 1 при $m = 1$ см. [17, с. 277].

Лемма 2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $p \leqslant q$, $\alpha_k (k = \overline{p,q})$ – *неотрицательные вещественные числа,* $f \in C_A(Q_m)$. *Тогда*

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m,f), \tag{4}$$

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \|f - s_k(m,f)\| = \sum_{l=p+1}^{q+1} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k + \left(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k\right) \sum_{l=q+2}^{\infty} A_l(m,f). \tag{5}$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму 1, имеем

$$\|f\| = f(\mathbb{O}^m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} a_k(f) = s_0(m,f,\mathbb{O}^m) + \sum_{k=1}^{\infty} \{s_k(m,f,\mathbb{O}^m)$$

$$-s_{k-1}(m,f,\mathbb{O}^m)\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m,f).$$

Тем самым соотношение (4) установлено. В силу (4) при любом $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f - s_n(m, f)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k(m, f).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \|f - s_k(m, f)\| = \sum_{k=p}^{q} \alpha_k \sum_{l=k}^{\infty} A_{l+1}(m, f)$$

$$= \sum_{l=p+1}^{q+1} A_l(m, f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k + \left(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \right) \sum_{l=q+2}^{\infty} A_l(m, f).$$

Лемма 3. *Пусть m, p, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha_k(k = \overline{p, 2^q p - 1})$ неотрицательные вещественные числа, $\alpha_k = \alpha_{2^q p-1}$ при $k > 2^q p - 1$, $f \in C_A(Q_m)$. Тогда*

1. *Если последовательность α_k $(k = \overline{p, \infty})$ убывающая, то*

$$\sum_{k=p}^{2^q p-1} \alpha_k \|f - s_k(m, f)\| \leqslant B_3(m)\{p\alpha_p E_p(m, f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p} \alpha_k E_k(m, f)\}. \tag{6}$$

2. *Если последовательность $\alpha_k(k = \overline{p, \infty})$ возрастающая, то*

$$\sum_{k=p}^{2^q p-1} \alpha_k \|f - s_k(m, f)\| \leqslant B_3(m)\{p\alpha_{2p-1} E_p(m, f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p} \alpha_{4k} E_k(m, f)\}. \tag{7}$$

Здесь и далее сумма $\sum\limits_{a}^{b}$ при $b < a$ считается равной нулю.

Доказательство. Условимся вместо $s_k(m, f)$, $E_k(m, f)$, $\tau_k(m, f)$ писать соответственно s_k, E_k, τ_k. Положим $t_\gamma = \max\limits_{k} \alpha_k$, где

$k=\overline{2^{\gamma-1}p, 2^{\gamma}p-1}$. Принимая во внимание, что $f\in C_A(Q_m)$ и лемму 1, нетрудно понять, что

$$A=\sum_{k=p}^{2^q p-1}\alpha_k\|f-s_k\|=\sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{k=2^{\gamma-1}p}^{2^{\gamma}p-1}\alpha_k\|f-s_k\|$$

$$\leqslant\sum_{\gamma=1}^{q}t_\gamma\sum_{k=2^{\gamma-1}p}^{2^{\gamma}p-1}\|f-s_k\|=\sum_{\gamma=1}^{q}t_\gamma\left\|\sum_{k=2^{\gamma-1}p}^{2^{\gamma}p-1}(f-s_k)\right\|$$

$$=\sum_{\gamma-1}^{q}t_\gamma 2^{\gamma-1}p\|f-\tau_{2^{\gamma-1}p}\|.$$

Отсюда, применяя неравенство (3), находим, что

$$A\leqslant B_3(m)\sum_{\gamma=1}^{q}t_\gamma 2^{\gamma-1}pE_{2^{\gamma-1}p}\leqslant B_3(m)\{t_1pE_p$$

$$+2\sum_{\gamma=2}^{q}t_\gamma\sum_{k=2^{\gamma-2}p+1}^{2^{\gamma-1}p}E_k\}. \tag{8}$$

Если $\alpha_k(k=\overline{p,\infty})$ – убывающая последовательность, то, опираясь на (8), имеем

$$A\leqslant B_3(m)\left\{t_1pE_p+2\sum_{\gamma=2}^{q}\sum_{k=2^{\gamma-2}p+1}^{2^{\gamma-1}p}\alpha_kE_k\right\}$$

$$=B_3(m)\left\{\alpha_ppE_p+2\sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p}\alpha_kE_k\right\}.$$

Пусть теперь α_k $(k=\overline{p,\infty})$ – возрастающая последовательность. Учитывая, что $2^\gamma p-1\leqslant 4(2^{\gamma-2}p+1)$ и используя (8), имеем

$$A\leqslant B_3(m)\left\{t_1pE_p+2\sum_{\gamma=2}^{q}\sum_{k=2^{\gamma-2}p+1}^{2^{\gamma-1}p}\alpha_{4k}E_k\right\}$$

$$=B_3(m)\left\{\alpha_{2p-1}pE_p+2\sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p}\alpha_{4k}E_k\right\}.$$

3. Перейдем к изложению основных результатов параграфа.

Теорема 1. *Пусть* m, p, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha_k (k = \overline{p, 2^q p - 1})$ – *неотрицательные вещественные числа,* $\alpha_k = \alpha_{2^q p - 1}$ *при* $k > 2^q p - 1$, $f \in C_A(Q_m)$,

$$L(f,p,q) = \sum_{l=p+1}^{2^q p} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k + \left(\sum_{k=p}^{2^q p - 1} \alpha_k \right) \sum_{l=2^q p+1}^{\infty} A_l(m,f).$$

Тогда

1. *Если последовательность* $\alpha_k (k = \overline{p, \infty})$ *убывающая, то*

$$\sum_{k=p}^{2^q p-1} \alpha_k E_k(m,f) \leqslant L(f,p,q) \leqslant B_3(m)\{p\alpha_p E_p(m,f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p} \alpha_k E_k(m,f)\}. \tag{9}$$

2. *Если последовательность* α_k $(k = \overline{p, \infty})$ *возрастающая, то*

$$\sum_{k=p}^{2^q p-1} \alpha_k E_k(m,f) \leqslant L(f,p,q) \leqslant B_3(m)\{p\alpha_{2p-1} E_p(m,f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{2^{q-1}p} \alpha_{4k} E_k(m,f)\}. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1 получается сопоставлением лемм 2 и 3.

Следствие 1. *Пусть* m, $p \in \mathbb{N}$, $f \in C_A(Q_m)$, *последовательность* $A_l(m,f)$ $(l = \overline{p+1, 2p})$ *убывающая. Тогда*

$$A_{2p}(m,f) \leqslant \frac{2B_3(m)}{p+1} \quad E_p(m,f), \tag{11}$$

$$A_{2p-1}(m,f) \leqslant \frac{2B_3(m)}{p-1} E_p(m,f) \quad (p \geqslant 2). \tag{12}$$

Доказательство. Полагая в теореме 1 $\alpha_k = 1$ $(k = \overline{p, \infty})$, $q = 1$ и применяя второе из неравенств (9), имеем

$$\sum_{l=p+1}^{2p} A_l(m,f)(l-p) \leqslant B_3(m) p E_p(m,f).$$

Учитывая монотонность последовательности $A_l(m,f)$, легко видеть, что

$$A_{2p}(m,f)p(p+1) \leqslant 2\sum_{l=p+1}^{2p} A_l(m,f)(l-p),$$

$$A_{2p-1}(m,f)p(p-1) \leqslant 2\sum_{l=p+1}^{2p-1} A_l(m,f)(l-p).$$

Сопоставляя приведенные неравенства, получаем требуемое.

Следствие 2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $f \in C_A(Q_m)$, *последовательность* $A_l(m,f)$ $(l=\overline{1,\infty})$ *убывающая,* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *положительная убывающая функция, такая, что*

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)} < \infty, \quad \varlimsup_{p\to\infty} (\varphi(p))^{-1} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} < \infty.$$

Тогда соотношения

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{E_p(m,f)}{\varphi(p)} < \infty, \tag{13}$$

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{pA_p(m,f)}{\varphi(p)} < \infty \tag{14}$$

эквивалентны.

Доказательство. То, что соотношение (13) влечет соотношение (14), следует из (11) и (12). С другой стороны, если выполнено соотношение (14), то

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{E_p(m,f)}{\varphi(p)} \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} A_k(m,f)}{\varphi(p)}$$

$$\leqslant B_4 \varlimsup_{p\to\infty} (\varphi(p))^{-1} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} < \infty.$$

Замечание 2. В связи со следствием 2 см. [17, с. 678, 679].

Следствие 3. *Пусть m, $p \in \mathbb{N}$, $f \in C_A(Q_m)$, $\alpha_k (k = \overline{p,\infty})$ – неотрицательные вещественные числа. Тогда*

1. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \alpha_k E_k(m,f) \leqslant \sum_{l=p+1}^{\infty} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k. \tag{15}$$

2. *Если последовательность α_k $(k = \overline{p,\infty})$ убывающая, то*

$$\sum_{l=p+1}^{\infty} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k \leqslant B_3(m)\{p\alpha_p E_p(m,f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \alpha_k E_k(m,f)\}. \tag{16}$$

3. *Если последовательность α_k $(k = \overline{p,\infty})$ возрастающая, то*

$$\sum_{l=p+1}^{\infty} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k \leqslant B_3(m)\{p\alpha_{2p-1} E_p(m,f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \alpha_{4k} E_k(m,f)\}. \tag{17}$$

Доказательство. Неравенство (15) очевидным образом следует из равенства (5). Если последовательность α_k убывает, то в силу (9) при любом $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=p+1}^{2^q p} A_l(m,f) \sum_{k=p}^{l-1} \alpha_k \leqslant B_3(m)\{p\alpha_p E_p(m,f)$$

$$+2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \alpha_k E_k(m,f)\}$$

и, следовательно, соотношение (16) выполняется. Неравенство (17) устанавливается аналогично, но здесь вместо неравенства (9) используется неравенство (10).

Следствие 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, $f \in C_A(Q_m)$. *Тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} E_k(m, f) \tag{18}$$

и

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{\alpha+1} A_k(m, f) \tag{19}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. То, что сходимость ряда (19) влечет сходимость ряда (18) следует из неравенства (15). Обратное утверждение легко выводится из неравенств (16) (при $\alpha \leqslant 0$) и (17) (при $\alpha > 0$).

Следствие 5. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $f \in C_A(Q_m)$. *Тогда ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{E_k(m,f)}{k}$ *и* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} A_k(m, f) \ln k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание 3. В связи со следствиями 4 и 5 см. [3, с. 84-87] и [4, с. 110-114].

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
2. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, М., 1965.
3. В. В. Жук, *Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами, Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций*, Сб. научн. трудов Ленингр. мех. ин-та **50** (1965), 73–92.
4. В. В. Жук, *О приближении 2π-периодической функции линейным оператором*, Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Сб. научн. трудов Ленингр. мех.ин-та, **50** (1965), 93–115.
5. Н. С. Жук, *Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения периодических функций нескольких переменных с неотрицательными коэффициентами Фурье.* Л., 1991, 10 с. Деп. в ВИНИТИ 26.03.91, No. 1318–В91.
6. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, Т. 1, М., 1969.
8. Collected papers of G. H. Hardy. *Oxford*, Vol. 3, 1969.
9. В. В. Жук, *Дополнения к формуле суммирования Пуассона и к теореме Харди–Юнга*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1992**, вып.2 (No.8), 8–15.

10. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации*. Л., 1983.
11. Т. П. Дубова, Г. И. Натансон, *Об одном неравенстве в теории сильной аппроксимации*, Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. мат., мех., астроном. **1992**, вып. 3 (No. 15), 86–89.
12. Н. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Харьков, 1940.
13. В. В. Жук, *Сильная аппроксимация периодических функций*, Л., 1989.
14. J. Marcinkiewicz, *Collected papers*, Warsawa 1964.
15. А. Н. Подкорытов, *Теорема Фейера–Марцинкевича в многомерном случае*, Л., 1976, 11 с. Деп. в ВИНИТИ 1.02.77, No. 368-77.
16. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*. М.–Л., 1949.
17. Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*. М., 1961.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 2 мая 2006 г.