Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Е. Г. Емельянов

О КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОЛНЫМИ КВАДРАТАМИ

Посвящается 100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина

§0 Введение

Роль квадратичных дифференциалов на римановой сфере или в единичном круге, являющихся полными квадратами, хорошо известна. Такие дифференциалы естественно появляются при изучении, например, экстремальных проблем, связанных с функционалами Голузина или Грунского (см. [1, 2]). Для многосвязной области $G \subset \mathbb{C}$ положительный квадратичный дифференциал, являющийся полным квадратом и регулярный в G, строится посредством гармонических мер граничных компонент области, а в случае наличия в некоторых точках G двойных полюсов также с участием функций Грина с полюсами в этих точках. Данная работа посвящена изучению роли таких дифференциалов в задачах об экстремальном разбиении многосвязной области G. Показано, что если ассоциированный квадратичный дифференциал-полный квадрат, то значение функционала для этого разбиения является наименьшим в некотором классе разбиений. В §1 приведены необходимые факты из теории задач об экстремальном разбиении, в §2 рассматриваются дифференциалы, регулярные в области G, в §3 результаты из §2 распространяются на случай наличия полюсов второго порядка, в §4 дается решение одной задачи о максимуме внутреннего радиуса двусвязной области.

§1. Необходимые определения и факты

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – $(n+1)$-связная область с граничными континуумами γ_j, $0 \le j \le n$. В дальнейшем γ_0 – внешняя граница области G и все γ_j – кусочно-гладкие кривые. Нам понадобятся некоторые факты, относящиеся к задачам об экстремальном разбиении, которые мы сформулируем в виде трех теорем. Везде далее Qdz^2 – положительный квадратичный дифференциал в области G (сокращенно – п.к.д.), т.е. $Qdz^2 \geq 0$ на каждом граничном континууме γ_j. Для замкнутой жордановой кривой Γ в G (простой петли) двусвязную область $D \subset G$ будем называть ассоциированной с Γ, если замкнутые жордановы кривые в области G, разделяющие границы D, свободно гомотопны на G петле Γ. Если задан набор $\mathit{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ простых петель на G, в котором каждая петля не гомотопна нулю и любые две не гомотопны друг другу на G, то система попарно неналегающих двусвязных областей $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_r)$ в G называется допустимой (относительно $\mathit{\Gamma}$), если область D_k ассоциирована с Γ_k, $1 \leq k \leq r$ Если, дополнительно, в G задано множество отмеченных точек $Z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, $G' = G \setminus Z$, то в данных выше определениях гомотопия в G заменяется на гомотопию в G'. Допустимой (относительно $\mathit{\Gamma}$) системой областей называется в этом случае система $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_{r+m})$ попарно неналегающих областей в G, в которой области D_k, $1 \leq k \leq r$ – двусвязные, D_k ассоциирована с Γ_k, а области $D_{r+s}, 1 \leq s \leq m$, – односвязные, $\zeta_s \in D_{r+s}$. Для кольцевой области D п.к.д. Qdz^2 в G через $l = l(D)$ обозначим Q-длину замкнутой траектории, разделяющей границы D, через $h = h(D)$ Q-длину отрезка ортогональной траектории, соединяющего границы D. Тем самым,

$$M(D) = \frac{h}{l}.$$

В дальнейшем мы будем l и h называть “длиной” и “высотой” области D. Через $M(D, z)$ будем обозначать приведенный модуль области D относительно точки $z \in D$.

Теорема A. *Пусть* $\overline{G} = \bigcup_{k=1}^{r+m} \overline{D}_k$, *где* D_k, $1 \leq k \leq r$ *и* D_{r+s}, $1 \leq s \leq m$, *– соответственно кольцевые и круговые области положительного квадратичного дифференциала* Qdz^2 *в* G, $\zeta_s \in D_{r+s}$ *– двойные полюсы этого дифференциала. Пусть* $\mathit{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ *– набор петель в* G, *в котором* Γ_k *разделяет границы* D_k, $1 \leq k \leq r$. *Тогда для любой допустимой системы областей* $\widehat{D} = (\widehat{D}_1, \ldots, \widehat{D}_{r+s})$, *выполняются неравенства:*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{G\setminus\cup_{s=1}^{s=m}\Delta_{\epsilon(\zeta_s)}}|Q|d\sigma+\sum_{s=1}^{m}\frac{{\alpha_s}^2}{2\pi}\log\epsilon=\sum_{k=1}^{r}{l_k}^2M(D_k)$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\alpha_s^2M(D_{r+s},\zeta_s)\geq\sum_{k=1}^{r}{l_k}^2M(\widehat{D}_k)+\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(\widehat{D}_{r+s},z_s),\qquad(1)$$

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{{h_k}^2}{M(D_k)}-\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(D_{r+s},\zeta_s)$$
$$\leq\sum_{k=1}^{r}\frac{{h_k}^2}{M(\widehat{D}_k)}-\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(\widehat{D}_{r+s},z_s),\qquad(1')$$

где α_s – *"длина" области* D_{r+s}.

Теорема B. *Пусть* $Z=(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)$ – *множество отмеченных точек в* G, $G'=G\setminus Z$, $\mathit{\Gamma}=(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r)$ – *набор простых петель в* G, *в котором каждая петля не гомотопна на* G' *нулю или проколу в точке* ζ_s, $1\leq s\leq m$, *и любые две не гомотопны друг другу. Пусть* $\mathbf{L}=(l_1,\ldots,l_r)$, $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_r)$, *и* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ – *заданные произвольные наборы положительных чисел. Тогда существуют единственные положительные дифференциалы* $Q_{L,\boldsymbol{\alpha}}dz^2$ *и* $Q_{\mathbf{h},\boldsymbol{\alpha}}dz^2$ *в* G, *системы кольцевых и круговых областей которых доставляют соответственно максимум* $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbf{L},\boldsymbol{\alpha},Z)$ *функционалу*

$$\sum(\widehat{D})=\sum_{k=1}^{r}{l_k}^2M(\widehat{D}_k)+\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(\widehat{D}_{r+s},\zeta_s)\qquad(2)$$

и минимум $\mathbf{m}=\mathbf{m}(\mathbf{h},\boldsymbol{\alpha},Z)$ *функционалу*

$$\sum{}'(\widehat{D})=\sum_{k=1}^{r}\frac{{h_k}^2}{M(\widehat{D}_k)}-\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(\widehat{D}_{r+s},\zeta_s).\qquad(3)$$

Максимум в (2) и минимум в (3) берется по множеству всех допустимых систем областей $\widehat{D}$.

Теорема C. *Функции $\mathcal{M}(\mathbf{L}, \alpha, Z)$ и $\mathbf{m}(\mathbf{h}, \alpha, Z)$ дифференцируемы по своим аргументам. При этом*

$$\frac{\partial}{\partial l_k}\mathcal{M}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\alpha}, Z) = 2h(D_k), \qquad \frac{\partial}{\partial h_k}\mathbf{m}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\alpha}, Z) = 2l(D_k), \tag{4}$$

где $h(D_k)$ и $l(D_k)$ – соответственно – “высота” и “длина” экстремальной области D_k.

$$\frac{\partial}{\partial z_s}\mathcal{M}(L, \boldsymbol{\alpha}, Z) = \pi\lambda_s, \tag{5}$$

где для квадратичного дифференциала Qdz^2 в окрестности точки $z = \zeta_s$ имеет место разложение

$$Q(z) = -\frac{\alpha_s^2}{4\pi^2(z-\zeta_s)^2} + \frac{\lambda_s}{(z-\zeta_s)} + \cdots$$

Неравенство (1) в теореме A восходит к Дж. Дженкинсу [4, 5], который рассматривал случай отсутствия двойных полюсов, но указал на возможность распространения его результатов на общий случай. Неравенство ($1'$) следует из (1) По поводу утверждения о максимуме в теореме B см. также работы [4, 5], книгу Г. В. Кузьминой [6] или К. Штребеля [7]. Утверждение о минимуме для случая $Z = \varnothing$ доказано Штребелем вариационным методом. В приведенном здесь виде оно может быть получено из теоремы Дж. Дженкинса [5] или из леммы А. Ю. Солынина [8]. Формулы дифференцирования в теореме C получены А. Ю. Солыниным и автором [8, 9]. Настоящая работа посвящена изучению случая, когда дифференциал, доставляющий решение задачи о максимуме $\sum$ или о минимуме $\sum'$, является полным квадратом, т.е. $Qdz^2 = (qdz)^2$, где q – регулярна или мероморфна на G. В этом случае функция

$$f(z) = \operatorname{Im}\int\limits_p^z \sqrt{Q}\,du, \quad p \in \gamma_0.$$

гармоническая в G. Наша цель – показать, что отсюда по принципу Дирихле следует некоторое экстремальное свойство для функций $\mathcal{M}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{m}(\mathbf{h})$. Сначала будет рассмотрен случай $Z = \varnothing$. В §3 мы вернемся к общему случаю.

§2. Регулярные квадратичные дифференциалы в области G

2.1. Пусть $q(z)=\sqrt{Q(z)}$ – регулярная в G функция, и

$$q(z)=iG'(z) \tag{6}$$

где $G(z)=g(z)+i\eta(z)$ – аналитическая в G. Для дуги траектории $z=z(t)$ дифференциала Qdz^2из условия $Qdz^2\geq 0$ следует, что $i(G(z))'_t$ – вещественно, откуда $g(z(t))=\mathrm{const}$. Следовательно, $g(z)$ – гармоническая в G функция, принимающая постоянные значения x_k на граничных континуумах γ_k. Можем считать, что $x_0=0$,так как g определена с точностью до константы. Тогда необходимо

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}x_jH_j(z),\qquad q(z)=2ig'_z. \tag{7}$$

где H_j – гармоническая мера компоненты γ_j относительно области G. Из (7) следует

$$\int\limits_G|Q|d\sigma_z=\int\limits_G|\nabla g|^2d\sigma_z=\sum_j a_{jj}{x_j}^2-\sum_{i,j,i\neq j}a_{ij}x_ix_j, \tag{8}$$

где a_{ii} – емкостные коэффициенты области G, $a_{ij}\geqslant 0$, $a_{ij}=a_{ji}$,

$$a_{jj}=-\int\limits_{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial n}H_jds,\quad a_{ij}=a_{ij}=\int\limits_{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial n}H_ids,\quad a_{jj}=\sum_{k:k\neq j}a_{jk},$$

n – внутренняя нормаль (см. [3]).

2.2. Рассмотрим на G к.д. $(qdz)^2$, где $q(z)$ имеет вид (7). Будем сначала для удобства считать, что $x_i\neq x_j$, если $i\neq j$. Доказательство в общем случае получается отсюда предельным переходом. Каждая ортогональная траектория (о.т.) этого к.д., не имеющая концевой точки в нуле дифференциала, имеет концевые точки на двух граничных компонентах γ_i, γ_j области G. Выберем набор $\sum$ таких о.т., удовлетворяющий следующим условиям:

1^0. Если для компонент γ_i, γ_j, $0\leq i\leqslant j\leq n$ существует соединяющая их о.т., то набор $\sum$ должен включать какую-нибудь о.т., гомотопную данной (здесь имеется в виду гомотопия двух кривых с концами, принадлежащими указанным множествам).

2^0. Любые две о.т., входящие в $\sum$, не гомотопны.

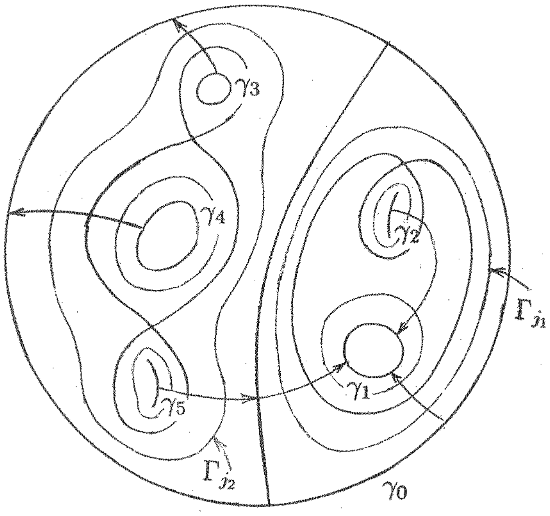

Рис. 1.

Вдоль любой дуги о.т., соединяющей граничные компоненты γ_i, γ_j, функция g меняется монотонно. Если дуга σ соединяет γ_i, γ_j, то мы будем считать σ направленной в сторону возрастания функции g (см. рис. 1).

Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ – набор простых петель в G, в котором $\Gamma_k \subset D_k$ разделяют границы D_k. Для $\sigma \in \sum$ обозначим через $N(\sigma) \subset (1, 2, \ldots, r)$ множество индексов j, для которых σ пересекает любую простую петлю, свободно гомотопную на G петле Γ_j.

Ясно, что если $k \in N(\sigma)$, то σ пересекает область D_k, поэтому все дуги $\sigma \in \sum$, пересекающие Γ_k, ориентированы по отношению к Γ_k одинаково (их направление определяется направлением возрастания функции g внутри области D_k).

Положим $\Theta(\Gamma_j) = +1$ если найдется дуга $\sigma \in \sum$, входящая внутрь Γ_j, и $\Theta(\Gamma_j) = -1$ в противном случае. Для дуги $\sigma \in \sum$, соединяющей γ_i, γ_j, имеем

$$\sum_{k \in (\sigma)} h_k = (x_t - x_s)\Theta(s,t), \qquad (9)$$

где $\Theta(s,t) = 1$, если $x_t > x_s$ и $\Theta(s,t) = -1$ в противном случае.

Множество всех γ_j, $0 \leq j \leq n$, рассматриваемых как вершины и множество всех $\sigma \in \sum$, рассматриваемых как ребра, образуют связный направленный граф. Выберем произвольное дерево в этом графе, и пусть $\sum_0 \subset \sum$ – множество ребер, входящих в это дерево (их всего n). Систему условий (9) для $\sigma \in \sum_0$ удобнее преобразовать к виду

$$S\mathbf{h} = X, \tag{10}$$

где S –некоторая постоянная матрица, которую мы будем называть матрицей условий, а $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_r)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ – соответственно векторы-столбцы. Для обозначения векторов-строчек будем использовать символ транспонирования $T : h^T$, X^T и т.д. Условия (10) позволяют сформулировать первое утверждение об экстремальных свойствах к.д. $(qdz)^2$.

Теорема 1. *Пусть* $g(z) = \sum_{j=1}^n x_j H_j(z)$, $q(z) = 2ig'_z$, $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_r)$ *– система кольцевых областей квадратичного дифференциала* $(qdz)^2$ *в* G, $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ *– набор петель в области* G, *в котором* Γ_k *разделяет границы* D_k. *Пусть* $\mathbf{L} = (l_1, \ldots, l_r)$ *и* $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_r)$ *– векторы "длин" и "высот" областей* $D_1, \ldots, D_r$, *соответственно,* S *– матрица условий для* $(qdz)^2$. *Пусть* $\widehat{\mathbf{h}} = (\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_r)$, $\widehat{h}_k > 0$ *для* $1 \leq k \leq r$ *и выполнено условие*

$$S\widehat{\mathbf{h}} = X. \tag{10'}$$

Тогда

$$\mathbf{m}(\widehat{\mathbf{h}}) \geq \mathbf{m}(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{r} a_{kk} {x_k}^2 - \sum_{ij, i\neq j} a_{ij} x_i x_j, \tag{11}$$

где $\mathbf{m}(\widehat{\mathbf{h}})$, $\mathbf{m}(\mathbf{h})$ *определены в* (3), *емкостные коэффициенты* a_{ij} *области* G *введены в* (8).

Доказательство. Пусть $\widehat{Q}dz^2$ – п.к.д. на G система $\widehat{\mathbf{D}} = (\widehat{D}_1, \ldots, \widehat{D}_r)$ кольцевых областей которого доставляет значение $\mathbf{m}(\widehat{\mathbf{h}})$. Такой дифференциал существует и единственен по теореме B. Мы построим функцию $f(z)$ на G, удовлетворяющую следующим условиям:

1^0. f непрерывна на G,

2^0. $|\nabla f|^2 = |\widehat{Q}|$ в $\widehat{D}_k$, $1 \leq k \leq r$,

3^0 $f\big|_{\gamma_j} = x_j$, $0 \leq j \leq n$.

Тогда по принципу Дирихле получим:

$$\mathbf{m}(\widehat{\mathbf{h}}) = \int_G |\widehat{Q}| d\sigma = \int_G |\nabla f|^2 d\sigma \geq \int_G |\nabla g|^2 d\sigma = \mathbf{m}(\mathbf{h}).$$

В дальнейшем внешнюю и внутреннюю граничные компоненты двусвязной области $D \subset \mathbb{C}$ мы будем обозначать $\partial_+(D)$, $\partial_-(D)$, соответственно. Будем писать $\Gamma_i < \Gamma_j$, если петля Γ_i лежит внутри петли Γ_j (соответственно, $\gamma_i < \Gamma_j$), считая, что $\Gamma_i < \Gamma_i$ – верно, $\Gamma_i \leq \Gamma_j$, если Γ_i внутри Γ_j и нет Γ_k такой, что $\Gamma_i < \Gamma_k < \Gamma_j$, $\Gamma_i \perp \Gamma_j$, если эти петли – внешние по отношению друг к другу (соответственно, $\gamma_i \perp \Gamma_j$). Через $\Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_q}$ обозначим петли, максимальные по отношению к введенному частичному упорядочению. Тогда $\Gamma_{j_s} \perp \Gamma_{j_t}$ при $s \neq t$, и для

$$\Omega_t = \cup_{\Gamma_k < \Gamma_{j_t}} \overline{\widehat{D}}_k$$

имеем:

$$\cup_{t=1}^{q} \Omega_t = \overline{G}, \quad \operatorname{Int} \Omega_p \cap \operatorname{Int} \Omega_q = \varnothing$$

при $p \neq q$.

Мы определим функцию f отдельно на каждом множестве Ω_t. При этом будут выполняться условия:

(a) $f|_{\partial_+ \widehat{D}_{J_t}} = 0$,

(b) функция f – непрерывна на Ω_t,

(c) Для каждой области $\widehat{D}_k \subset \Omega_t$, f постоянна на границах $\widehat{D}_k$.

Опишем построение функции f для Ω_1. Пусть $\gamma_s < \Gamma_{j_1}$. Тогда либо найдется петля $\sigma \in \sum_0$, соединяющая γ_s, $\gamma_t, \gamma_t \perp \Gamma_{j_1}$, либо нет. Допустим первое (множество таких γ_s не пусто в силу связности $\sum_0$). Для $z \in \widehat{D}_{j_1}$ положим

$$f(z) = \Theta(t, s) \operatorname{Im} \int_p^z \sqrt{\widehat{Q}}\, du, \tag{12}$$

где $p \in \partial_+(\widehat{D}_{j_1})$ и выбрана положительная ветвь корня.

Заметим, что $\Theta(t, s) = \Theta(\Gamma_{j_1})$ Имеем:

$$f|_{\partial_-(\widehat{D}_{j_1})} = \Theta(\Gamma_{j_1}) \widehat{h}_{j_1}.$$

Далее, если $\Gamma_i \leq \Gamma_j < \Gamma_{j_1}$, $i, j \in N(\sigma)$ и f уже определена в D_j, $f|_{\partial_-(\widehat{D}_j)} = C$, то для $z \in \widehat{D}_i$ положим

$$f(z) = C + \Theta(\Gamma_{j_1}) \operatorname{Im} \int_{p_i}^z \sqrt{\widehat{Q}}\, du, \tag{13}$$

где $p_i \in \partial_+(\widehat{D}_i)$. Таким образом, функция f будет по индукции определена на замыканиях всех областей $\widehat{D}_k$, $k \in N(\sigma)$, $\Gamma_k < \Gamma_{j_1}$. Для $\widehat{x}_s = f\big|_{\gamma_s}$ получим:

$$\widehat{x}_s = \Theta(\Gamma_{j_1}) \sum_{k\in N(\sigma), \Gamma_k < \Gamma_{j_1}} \widehat{h}_k. \tag{14}$$

Если дуга $\sigma' \in \sum_0$ соединяет γ_s и $\gamma_{t'}$, $\gamma_{t'} \perp \Gamma_{j_1}$, то, очевидно,

$$N_1 = N(\sigma) \cap (k : \Gamma_k < \Gamma_{j_1}) = N(\sigma') \cap (k : \Gamma_k < \Gamma_{j_1}),$$

и легко видеть, что построение функции f посредством σ' дает ту же функцию f на областях $\widehat{D}_k$, $k \in N_1$. Если $\gamma_{s'} < \Gamma_{j_1}$, $\gamma_{t'} \perp \Gamma_{j_1}$, σ' соединяет $\gamma_{s'}$, $\gamma_{t'}$, причем $\gamma_{s'} < \Gamma_i \leq \Gamma_p < \Gamma_{j_1}$, $\gamma_{t'} < \Gamma_j \leq \Gamma_p < \Gamma_{j_1}$, то опять очевидно, что

$$N = N(\sigma) \cap (k : \Gamma_p < \Gamma_k < \Gamma_{j_1}) = N(\sigma') \cap (k : \Gamma_p < \Gamma_k < \Gamma_{j_1}),$$

и на замыканиях областей $\widehat{D}_k$, $k \in N$, продолжения функции f посредством σ, σ' совпадают. Если $\gamma_{s'}$ не соединяется дугами из $\sum_0$ ни с одной граничной компонентой γ_t, $\gamma_t \perp \Gamma_{j_1}$, то найдется $\gamma_s < \Gamma_{j_1}$ такая, что σ соединяет γ_s и γ_t, $\gamma_t \perp \Gamma_{j_1}$, σ' соединяет γ_s, $\gamma_{s'}$. Пусть $\gamma_{s'} < \Gamma_i \leq \Gamma_p < \Gamma_{j_1}$, $\gamma_s < \Gamma_j \leq \Gamma_p < \Gamma_{j_1}$, $\Gamma_i \perp \Gamma_j$. Тогда на замыканиях областей $\widehat{D}_k$, $k \in N(\sigma)$, $\Gamma_k < \Gamma_{j_1}$, функция f определена посредством σ. Пусть

$$C = f|_{\partial_-(\widehat{D}_p)} = f|_{\partial_+(\widehat{D}_j)}.$$

Для $z \in \widehat{D}_i$ положим

$$f(z) = C + \Theta(s, s') \operatorname{Im} \int_{p_i}^{z} \sqrt{\widehat{Q}}\, du,$$

где $p_i \in \partial_+(\widehat{D}_i)$.

Для областей $\widehat{D}_k$ при $k \in N(\sigma')$ таких, что $\Gamma_k < \Gamma_i$ продолжение f строится по правилу (13). Тогда для $\widehat{x}_{s'} = f|_{\gamma_{s'}}$ имеем:

$$\widehat{x}_{s'} = C + \Theta(s, s') \sum_{k\in N(s'), \Gamma_k < \Gamma_i} \widehat{h}_k. \tag{15}$$

Как и выше, легко убедиться в том, что продолжения функции f для тех же областей при помощи других дуг из $\sum_0$, если они возможны, приводят к той же функции. Из способа построения следует непрерывность f на Ω_1. Поскольку наряду с (15) мы имеем также

$$\widehat{x}_s = C + \Theta(\Gamma_{j_1}) \sum_{k \in N(\sigma), \Gamma_k < \Gamma_j} \widehat{h}_k, \tag{16}$$

$\Theta(s, s') = -\Theta(\Gamma_{j_1})$, $N(\sigma) \cap (k : \Gamma_k < \Gamma_j) = N(\sigma') \cap (k : \Gamma_k < \Gamma_j)$, то из (15) и (16) получаем:

$$\widehat{x}_{s'} = \widehat{x}_s + \Theta(s, s') \sum_{k \in \ N(\sigma)} \widehat{h}_k. \tag{17}$$

Таким образом, функция f построена на Ω_1. Аналогично f определяется на всех $\Omega_t, 1 \leq t \leq q$. Построенная таким образом функция будет непрерывной в G в силу (12) и условия (a). Свойство 2^0 следует из определения f. Докажем выполнение 3^0. Пусть $\sigma \in \sum_0$ соединяет γ_s и γ_t, $\gamma_s < \Gamma_{j_p}$, $\gamma_t < \Gamma_{j_q}$. Тогда необходимо

$$\partial_+(\widehat{D}_{J_p}) \cap \partial_+(\widehat{D}_{j_q}) \neq \varnothing,$$

$$\Theta(\Gamma_{j_p}) = -\Theta(\Gamma_{j_q}) = \Theta(t, s),$$

и

$$N(\sigma) = N(\sigma) \cap (k : \Gamma_k < \Gamma_{j_p}) \cup N(\sigma) \cap (k ; \Gamma_k < \Gamma_{j_q}).$$

Имеем по аналогии с (13):

$$\widehat{x}_s = \Theta(\Gamma_{j_p}) \sum_{\substack{k \in N(\sigma), \\ \Gamma_k < \Gamma_{j_p}}} \widehat{h}_k, \quad \widehat{x}_t = \Theta(\Gamma_{j_q}) \sum_{\substack{k \in N(\sigma), \\ \Gamma_k < \Gamma_{j_q}}} \widehat{h}_k,$$

откуда

$$\widehat{x}_s = \widehat{x}_t + \Theta(s, t) \sum_{k \in N(\sigma)} \widehat{h}_k. \tag{18}$$

Теперь из (17) и (18) следует, что для любой дуги $\sigma \in \sum_0$

$$\sum_{k \in \ N(\sigma)} \widehat{h}_k = \Theta(s, t)(\widehat{x}_t - \widehat{x}_s).$$

Отсюда по условию (10) получим, что $\widehat{x}_t - \widehat{x}_s = x_t - x_s$, если γ_s, γ_t соединены дугой $\sigma \in \sum_0$. Поскольку $\widehat{x}_0 = x_0 = 0$ и в силу связности дерева $\sum_0$ отсюда следует $\widehat{x}_j = x_j$ для $0 \leq j \leq n$. Это завершает доказательство теоремы.

2.3. Удобнее будет сформулировать экстремальное свойство кольцевых областей к.д. $(qdz)^2$ не в виде ограничения на "высоты" областей, а в виде ограничения на их "длины". Чтобы получить такое условие, докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ – набор простых петель в области G, не содержащий петель, гомотопных нулю или друг другу, пусть A – $\rho \times r$ матрица, $\rho < r$ и $b = (b_1, \dots, b_\rho)$ – постояный вектор. Пусть множество решений системы $A\mathbf{h} = b$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_r)$, $h_k > 0$, $1 \le k \le r$ непусто, $m(\mathbf{h})$ определено в (3).*

Тогда задача на условный минимум

$$\mathbf{m}(h) \to \min, \quad Ah = b$$

имеет не более одного решения h^*. При этом, если решение существует, то для вектора "длин" $\mathbf{L}^* = ({l_1}^*, \dots, {l_r}^*)$ областей экстремального рабиения, соответствующих вектору h^*, выполняется условие

$$\mathbf{L}^{*T} = C^T A, \tag{19}$$

где $C = (C_1, \dots, C_\rho)$ – некоторый постоянный вектор, знак T означает транспонирование.

Доказательство. По теореме C,

$$\nabla m(\mathbf{h}) = 2\mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = (l_1, \dots, l_r)$$

– вектор "длин" областей экстремального разбиения. Поэтому (19) есть необходимое дифференциальное условие экстремума. Наоборот, если (19) выполнено для h^*, то для любого $\mathbf{h} > 0$, удовлетворяющего условию $Ah = b$, имеем:

$$\mathbf{m}(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{r} h_k l_k = \sum_{k=1}^{r} h_k l_k^* \Big(\frac{{l_k}^*}{l\ _k} + \frac{l_k^*}{l_k}\Big) - \sum_{k=1}^{r} l_k^{*2} M(D_k) \ge 2 \sum_{k=1}^{r} h_k l_k^*$$
$$-\mathcal{M}(L^*) = 2L^{*T} h - \mathbf{m}(\mathbf{h}^*) = 2C^T A\mathbf{h} - m(\mathbf{h}^*) = \mathbf{m}(\mathbf{h}^*).$$

Следствие. *Пусть Qdz^2 – положительный квадратичный дифференциал на G такой, что $Q = q^2$, где q имеет вид (7). Пусть S, $\mathbf{h}$, $\mathbf{L}$ – соответственно, матрица условий, вектор "высот", и вектор "длин" областей этого дифференциала, и выполнено*

$$S\mathbf{h} = X.$$

Тогда $\mathbf{L}^T = C^T S$, *где* $C = (C_1, \ldots, C_n)$ – *некоторый вектор. При этом*

$$\mathbf{m}(\mathbf{h}) = C^T X.$$

Замечание. Условие $L^T = C^T S$ имеет простой геометрический смысл. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = A^T$$

– матрица емкостных коэффициентов области G. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n} g = \sum_{j=1}^{n} x_j \int\limits_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n} H_j = X^T A^k,$$

где n – внешняя нормаль к области G, A^k – k-ый столбец матрицы A. Теперь, если Γ – замкнутая траектория к.д. $(qdz)^2$, $\Gamma \subset D_k$, то для "длины" области D_k имеем:

$$l_k = \int\limits_{\Gamma} |qdz| = \int\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial}{\partial n} g\right| = \Theta(\Gamma) \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} g,$$

где, как прежде, $\Theta(\Gamma) = +1$, если дуги $\sigma \in \sum_0$ входят в область D_k, и $= -1$ в противном случае. По тождеству Грина имеем:

$$l_k = \Theta(\Gamma) \sum_{\gamma_j < \Gamma} \int\limits_{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} g = \Theta(\Gamma) \sum_{\gamma_j < \Gamma} X^T A^j.$$

Поэтому для вектора "длин" получаем:

$$\mathbf{L}^T = X^T A R,$$

где R – некоторая постоянная $n \times r$ матрица. Тогда должно быть $\mathbf{L}^T \mathbf{h} = X^T A R \mathbf{h}$. Поскольку $L^T \mathbf{h} = X^T A X$, то $R\mathbf{h} = X$, откуда $R = S$. Окончательно имеем два условия, связывающие векторы "длин", "высот", и матрицу условий:

$$S\mathbf{h} = X, \quad \mathbf{L}^T = X^T A S.$$

Условие на длины означает, что алгебраическая сумма "длин" всех внешних по отношению друг к другу областей D_j, содержащихся внутри области D_k, равна "длине" области D_k. Знаки в этой сумме определяются при помощи матрицы S.

Теорема 2. *Пусть в условиях предыдущей леммы* $\widehat{\mathbf{L}} = (\widehat{l}_1, \ldots, \widehat{l}_n)$, $\widehat{l}_k > 0$ *и* $\widehat{\mathbf{L}}^T \geqslant C^T$.

Тогда $\mathcal{M}(\widehat{\mathbf{L}}) \geq \mathcal{M}(\mathbf{L})$, причем равенство достигается лишь при $\widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{M}(\widehat{\mathbf{L}}) = \sum_{k=1}^{r} \widehat{l}_k^{\,2} M(\widehat{D}_k) \geq \sum_{k=1}^{r} \widehat{l}_k^{\,2} M(D_k) = \sum_{k=1}^{r} \widehat{l}_k h_k \Big(\frac{\widehat{l}_k}{l_k} + \frac{l_k}{\widehat{l}_k} \Big)$$

$$- \sum_{k=1}^{r} l_k h_k \geqslant 2 \sum_{k=1}^{r} \widehat{l}_k h_k - \sum_{k=1}^{r} l_k h_k = 2\widehat{C}^T X - C^T X \geq \mathcal{M}(\mathbf{L}).$$

§3. Квадратичные дифференциалы в области G с полюсами второго порядка

3.1. Пусть Qdz^2 – п.к.д. на G, причем $Q = (q)^2$,

$$q(z) = i \sum_{s=1}^{m} \frac{\alpha_s}{(z - z_s)} + v(z), \tag{20}$$

где выбрана положительная ветвь корня, α_s вещественны и функция $v(z)$ регулярна в G. Положим

$$g_0(z) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s g(z.z_s),$$

где

$$g(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z - \zeta|} + \omega(z,\zeta) \tag{21}$$

– функция Грина области G с полюсом в ζ, $\omega(z,\zeta)$ – гармоническая в G функция,

$$q_0 = 2i(g_0)'_z = i \sum_{s=1}^{m} \frac{\alpha_s}{z - \zeta_s} + v_0(z),$$

v_0 – регулярна на G.

Тогда к.д. $(q-q_0)^2 dz^2$ положительный на G, значит,

$$q - q_0 = q_1 = 2i(g_1)'_z, \quad g_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j H_j.$$

Таким образом,

$$q = 2ig'_z, \quad g = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s g(z,\zeta_s) + \sum_{j=1}^{n} x_j H_j(z) \leftarrow \tag{22}$$

Замыкание множества критических траекторий п.к.д. $(qdz)^2$ разбивает G на кольцевые области D_k, $1 \le k \le r$, и круговые области D_{r+s}, $1 \le s \le m$, $\zeta_s \in D_{r+s}$. Прямое вычисление дает

$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{G \setminus \cup_s \Delta_\epsilon(\zeta_s)} |Q| d\sigma - \frac{1}{2\pi} \sum_s {\alpha_s}^2 \log \frac{1}{\epsilon}$$

$$= \sum_{s=1}^{m} {\alpha_s}^2 M(D_{r+s},\zeta_s) + \sum_{k=1}^{r} {l_k}^2 M(D_k) = \sum_s {\alpha_s}^2 \omega(\zeta_s,\zeta_s)$$

$$- \sum_{s,t,s\ne t} \alpha_s\alpha_t g(\zeta_s,\zeta_t) + \sum_{j=1}^{n} a_{jj} {x_j}^2 - \sum_{i,j,i\ne j} a_{ij} x_i x_j,$$

где l_k Q – “длина” кольцевой области D_k, a_{ij} – емкостные коэффициенты области G, введенные в (8). Результаты предыдущего параграфа естественно распространяются на случай наличия у к.д. двойных полюсов.

3.2. Фиксируем $\epsilon > 0$ и пусть $\gamma_{n+s}(\epsilon)$ – какая-нибудь замкнутая траектория п.к.д. $(qdz)^2$, пересекающая окружность $|z-\zeta_s| = \epsilon$. Пусть $d_s(\epsilon)$ – внутренняя область, ограниченная кривой $\gamma_{n+s}(\epsilon)$,

$$G_\epsilon = G \setminus \cup_s \overline{d_s(\epsilon)} \quad \text{и} \qquad D_{r+s}(\epsilon) = D_{r+s} \setminus \overline{d_s(\epsilon)}.$$

Пусть $x_{n+s}(\epsilon) = g\big|_{\gamma_{n+s}(\epsilon)}$, где g определена в (22),

$$x_{n+s}(\epsilon) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log\frac{1}{\epsilon} + \alpha_s \omega(\zeta_s,\zeta_s) + \sum_{t,t\ne s} \alpha_t g(\zeta_s,\zeta_t)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} x_j H_j(\zeta_s) + O(\epsilon). \tag{23}$$

Для функции $g(z)$ из (22) при $z \in G_\epsilon$ имеем:

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} x_j H_j(z) + \sum_{s=1}^{m} x_{n+s}(\epsilon) H_s(\epsilon, z), \tag{24}$$

где $H_s(\epsilon, .)$ – гармоническая мера $\gamma_{n+s}(\epsilon)$ относительно области G_ϵ. К к.д. $(qdz)^2$, рассматриваемому в области G_ϵ, применимы все утверждения из §2.

Пусть $\sum_0(\epsilon)$ – набор дуг ортогональных траекторий к.д. $(qdz)^2$ в G_ϵ, соединяющих попарно $n+m+1$ граничные компоненты этой области и образующий дерево в соответствующем графе. Если дуга $\sigma \in \sum_0(\epsilon)$ соединяет γ_i, γ_j, $0 \le i < j \le n$, то она не зависит от ϵ. Если дуга $\sigma(\epsilon) \in \sum_0(\epsilon)$ соединяет γ_k с $\gamma_{n+s}(\epsilon)$, то она является частью о.т. дифференциала σ в G, имеющей концевую точку в ζ_s. Применительно к к.д. $(qdz)^2$ в G, мы будем говорить, что σ соединяет γ_k с ζ_s. Аналогично, дуга $\sigma(\epsilon)$, соединяющая $\gamma_{n+s}(\epsilon)$ с $\gamma_{n+t}(\epsilon)$, – часть σ, соединяющей ζ_s и ζ_t. Последнее, как легко видеть, возможно лишь при $\alpha_s\alpha_t < 0$. Пусть S – матрица условий для к.д. $(qdz)^2$ в G_ϵ, соответствующая $\sum_0(\epsilon)$. Она, очевидно, не зависит от ϵ, поэтому мы будем называть S также матрицей условий для $(qdz)^2$ в G. Для $\sigma(\epsilon)$, соединяющей γ_k с $\gamma_{n+s}(\epsilon)$, уравнениее (9) имеет вид:

$$h_{r+s}(\epsilon) + \sum_{k \in N(\sigma(\epsilon)), k \le r} h_k = \operatorname{sign} \alpha_s (x_{r+s}(\epsilon) - x_k),$$

где $h_{r+s}(\epsilon)$ – “высота” области $D_{r+s}(\epsilon)$,

$$h_{r+s}(\epsilon) = |\alpha_s|(M(D_{r+s}, \zeta_s) + \frac{1}{2pi} \log \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon),$$

$x_{n+s}(\epsilon)$ определено в (23). В пределе при $\epsilon \to 0$ из (9) получаем для дуги σ, соединяющей γ_k с ζ_s:

$$|\alpha_s| M(D_{r+s}, \zeta_s) + \sum_{k \in N(\sigma), k \le r} = \operatorname{sign} \alpha_s (x_{r+s} - x_k), \tag{9'}$$

где

$$x_{r+s} = \alpha_s \omega(\zeta_s, \zeta_s) + \sum_{t, t \ne s} \alpha_t g(\zeta_s, \zeta_t) + \sum_{j=1}^{m} x_j H_j(\zeta_s).$$

Для дуги $\sigma(\epsilon)$, соединяющей $\gamma_{n+s}(\epsilon)$ с $\gamma_{n+t}(\epsilon)$, уравнение (9) имеет вид

$$h_{r+s}(\epsilon)+h_{r+t}(\epsilon)+\sum_{k\in N(\sigma),k\leq r}h_k=\operatorname{sign}\alpha_s(x_{r+s}(\epsilon)-x_{r+t}(\epsilon)),$$

что в пределе при $\epsilon\to 0$ дает:

$$|\alpha_s|M(D_{r+s},\zeta_s)+|\alpha_t|M(D_{r+t},\zeta_t)+\sum_{k\in N(\sigma),k\leq r}h_k \\ =\operatorname{sign}\alpha_s(x_{r+s}-x_{r+t}). \quad (9'')$$

Полагая $h_{r+s}=|\alpha_s|M(D_{r+s},\zeta_s)$, $1\leq s\leq m$, мы имеем для вектора высот $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_{r+k})$

$$S\mathbf{h}=X, \tag{10'}$$

Положим для $1\leq s\leq m$, $l_{r+s}=|\alpha_s|$, $\mathbf{L}=(l_1,\ldots,l_{r+s})$ – вектор "длин". По следствию §2.3 имеем равенство $L^T=C^TS$, $C=(c_1,\ldots,c_{n+m})$. При этом

$$\mathcal{M}=\sum_{k=1}^{r}{l_k}^2M(D_k)+\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(D_S,\zeta_s)=\sum_{i=1}^{r+m}l_ih_i=C^TX.$$

Теперь мы можем сформулировать для к.д. $(qdz)^2$ с полюсами второго порядка теорему, аналогичную теореме 2.

3.3. Теорема 3. *Пусть Qdz^2 – положительный квадратичный дифференциал в области G, причем $Q=q^2$, $q=2ig'_z$, g имеет вид (22). Пусть $(D_1,\ldots,D_{r+s})$ – система кольцевых и круговых областей дифференциала Qdz^2, $\mathbf{h}$, $\mathbf{L}$, и S – соответственно, векторы "высот" и "длин" этих областей и матрица условий, $L^T=C^TS$, $\mathcal{M}=C^TX$. Пусть*

$$\widehat{\mathbf{L}}=(\widehat{l}_1,\ldots,\widehat{l}_{r+s}),\quad \widehat{l}_{r+s}=l_{r+s}=|\alpha_s|,\quad 1\leq s\leq m,$$

и $\widehat{\mathbf{L}}^T=\widehat{C}^TS$, $\widehat{C}^T=(\widehat{C}_1,\ldots,\widehat{C}_{n+m})$, причем $\widehat{C}^TX\geq C^TX$. Тогда

$$\mathcal{M}(\widehat{\mathbf{L}})\geq\mathcal{M}(\mathbf{L}), \tag{27}$$

где величина

$$\mathcal{M}(\widehat{\mathbf{L}})=\sum_{k=1}^{r}\widehat{l}_k^{\,2}M(\widehat{D}_k)+\sum_{s=1}^{m}{\alpha_s}^2M(\widehat{D}_s,\zeta_s)$$

определена в (2).

Доказательство. Положим $\widehat{D}_{r+s}(\epsilon) = \widehat{D}_{r+s} \setminus \overline{d_s(\epsilon)}$, где $d_s(\epsilon)$ определено в 3.1. Тогда для $\epsilon > 0$ имеем по теореме 2:

$$\sum_{k=1}^{r} \widehat{l_k}^2 M(\widehat{D}_k) + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s{}^2 M(\widehat{D}_s(\epsilon))$$
$$\geq \sum_{k=1}^{r} l_k{}^2 M(D_k) + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s{}^2 M(D_s(\epsilon)),$$

что в пределе при $\epsilon \to 0$ дает (27).

§4. Одна задача о максимуме внутреннего радиуса для двусвязных областей

В этом параграфе мы дадим решение одой задачи, поставленной В. О. Кузнецовым в связи с его исследованиями свойств внутреннего радиуса (см. [10]): среди всех двусвязных областей $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in G$, заданного конформного модуля и таких, что точки $z = 1$ и $z = -1$ принадлежат разным компонентам дополнения G, найти область с наибольшим внутренним радиусом в точке $z = 0$. Напомним, что если $g_G(z, \zeta)$ – функция Грина области G с полюсом в точке ζ,

$$g_G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z - \zeta|} + \omega_G(z, \zeta),$$

то $R = \exp(2\pi\omega_G(\zeta, \zeta))$ – внутренний радиус области G в точке ζ. В силу (22), задача сводится к следующему: пусть $(g_G(z, 0))_z'^2 dz^2$ – к.д. в G,

$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{G \setminus \Delta_\epsilon(0)} |Q| d\sigma - \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\epsilon}.$$

Среди указанного выше класса двусвязных областей требуется найти область, доставляющую наибольшее значение функционалу $\mathcal{M}$.

Пусть функция f конформно отображает область G на кольцо $\mathcal{K} = \{w : r < |w| < R\}$, $f(0) = u$, $r < u < R$, $|f'(0)| = 1$.

П.к.д. $(g_{\mathcal{K}}(w, u))'^2 dw^2$ имеет один двойной нуль в кольце $\mathcal{K}$. Легко видеть, что разбиение, порожденное этим к.д., имеет вид, изображенный на рис. 2, т.е.

$$\mathcal{M}^w = l_0{}^2 M_0 + l_1{}^2 M_1 + M(D_u, u).$$

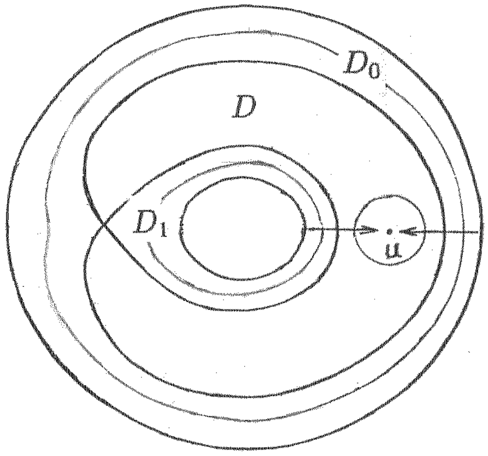

Рис. 2.

В качестве $\sum_0$ можем взять дугу о.т., соединяющую окружность $|w| = R$ и $w = u$, и дугу о.т., соединяющую окружность $|w| = r$ с $w = u$. Система условий тогда примет вид:

$$h_0 + h = x, \quad h_1 + h = x, \quad \Rightarrow h_0 = h_1, \tag{28}$$

где $x = M(D_u, u)$ – приведенный модуль круговой области D_u относительно точки u. Условие для “длин” траекторий имеет вид

$$(l_0, l_1, 1) = c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 0), \tag{29}$$

откуда $l_0 + l_2 = 1$. Пусть $\varphi : \mathcal{K} \to G_{a,b}$, где

$$G_{a,b} = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-b, -1] \cup [1, a]), \quad \varphi(u) = 0, \quad F = \varphi \circ f.$$

Тогда $|F'(0)| \geq 1$. Действительно, пусть $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}}^w \setminus (w : |w| \geq 1, \operatorname{Im} w = 0)$, $M(\mathcal{D}, 0) = -\frac{1}{2\pi} \log 2$, и пусть $\mathcal{D} = F^{-1}(\mathcal{D}) \subset \overline{\mathbb{C}}^z$ – односвязная область, получающаяся при разрезании G по некоторой кривой, соединяющей граничные компоненты. Имеем:

$$M(\mathcal{D}, 0) = M(\mathcal{D}, 0) - \frac{1}{2\pi} \log |F'(0)|,$$

$$M(\mathcal{D}, 0) \leq M(\overline{\mathbb{C}}^z \setminus (z : |z| \geq 1, \operatorname{Im} z = 0)) = M(\mathcal{D}, 0).$$

Поэтому

$$\mathcal{M}^w = \mathcal{M}^z + \frac{1}{2\pi} \log |F'(0)| \geq \mathcal{M}^z$$

Мы покажем, что среди областей $G_{a,b}$ с одинаковым конформным модулем максимальное значение $\mathcal{M}$ достигается в случае $a = b$. Пусть $a = chv$, $b = chu$, $u, v > 0$. Отображение

$$\zeta = \frac{w-t}{1-tw}, \quad t = sh\frac{u-v}{2} \Big/ sh\frac{u+v}{2},$$

переводит $G_{a,b}$ в $G_{k,k}$,

$$k = ch\frac{u+v}{2} \Big/ ch\frac{u-v}{2}, \quad \zeta(0) = -t, \quad \zeta'(0) = 1 - t^2.$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}^w = \mathcal{M}^\zeta(t) - \frac{1}{2\pi}\log(1-t^2).$$

Мы покажем, что

$$\mathcal{M}^\zeta(t) - \frac{1}{2\pi}\log(1-t^2) \leq \mathcal{M}^\zeta(0).$$

Для этого достаточно доказать, что

$$(\mathcal{M}^\zeta)'_t < -\frac{1}{2\pi}\frac{2t}{1-t^2}.$$

Оценим производную $(\mathcal{M}^\zeta(t))'_t$.

Можем написать, указывая более подробно на характер зависимости от t:

$$\mathcal{M}^\zeta(t) = \mathcal{M}^\zeta(L(t), t).$$

Благодаря (28) и (29), имеем: $\langle \nabla_l \mathcal{M}^\zeta, L'_t \rangle = 0$, так что

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}^\zeta(L(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}^\zeta(L(t), t),$$

а чтобы найти последнюю производную, нужно, согласно теореме C, иметь выражение для к.д. $Q_t d\zeta^2$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} Q_t(\zeta) &= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{(1-t^2)(t^2-k^2)(\zeta-C)^2}{(1-C)^2(\zeta^2-1)(\zeta^2-k^2)(\zeta-t)^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(\zeta-t)^2} + \frac{\lambda}{\zeta-t} + \cdots, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2\pi^2}\Big(\frac{1}{C-t} - \frac{t}{k^2-t^2} - \frac{t}{1-t^2}\Big), \tag{31}$$

При $t=0$ будет $C=\infty$, при $t\searrow 1$ нетрудно видеть, что $C\searrow k$. Поэтому для $0<t<1$ имеем: $k<C<\infty$. Используем условие (28): $h_0=h_1$, где

$$h_1=\int\limits_k^C|Q_t|^{\frac12}dx=|A|^{\frac12}\int\limits_k^C\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-k^2)}}\frac{C-x}{x-t}dx,$$

$$h_2=\int\limits_C^{\infty}|Q_t|^{\frac12}dx+\int\limits_{-\infty}^{-k}|Q_t|^{\frac12}dx$$

$$=|A|^{\frac12}\int\limits_C^{\infty}+|A|^{\frac12}\int\limits_k^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-k^2)}}\frac{C+x}{x+t}dx,$$

$$A=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{(1-t^2)(t^2-k^2)}{(1-C)^2}.$$

Имеем:

$$\frac{C+x}{x+t}\geq\frac{C-x}{x-t}\Longleftrightarrow C\leq\frac{k^2}{t}.$$

Поэтому для $C\leq\frac{k^2}{t}$, и тем самым для $C\leq\frac{x^2}{t}$, имеем $h_2>h_1$. Значит, должно быть $C>\frac{k^2}{t}$. Тогда

$$(\mathcal{M}_t)'_t=2\operatorname{Re}(\lambda\pi)=\frac{1}{2\pi}\biggl(-\frac{2t}{1-t^2}+\frac{Ct-k^2}{(C-t)(t^2-k^2)}\biggr)<-\frac{1}{2\pi}\frac{2t}{1-t^2},$$

что и требовалось. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть $G\subset\overline{\mathbb{C}}$– двусвязная область, $0\in G$, γ_1, γ_2 – граничные континуумы области G, причем $-1\in\gamma_1$, $1\in\gamma_2$. Тогда значение $R_G(0)$ внутреннего радиуса области G в начале координат удовлетворяет неравенству*

$$R_G(0)\leq R_{G^*}(0),$$

где

$$G^*=\overline{\mathbb{C}}\setminus([-k,-1]\cup[1,k]),$$

k зависит от конформного модуля области G.

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. 1966.
2. С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения – новые методы и приложения,* 1982.
3. М. Шиффер, *Некоторые новые результаты в теории конформных отображений,* Приложение к кн.: Р. Курант Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М. 1953.
4. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics. I, II,* Ann. Math. **66** (1957), No. 3, 440–453; Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), No. 2, 405–412.
5. J. A. Jenkins, *On mixed problems of extremal decompositions,* Indiana Math. J. **49**, No. 3 (2000), 391–396.
6. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Труды МИАН **139** (1980), 1–240.
7. K. Strebel, *Quadratic differentials,* Springer-Verlag 1984.
8. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы,* Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1992), 3–56.
9. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
10. В. О. Кузнецов, *О свойствах конформного радиуса области,* Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 237–252.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 17 октября 2006 г.