Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

В. Н. Дубинин

О ПРИМЕНЕНИИ ЛЕММЫ ШВАРЦА К НЕРАВЕНСТВАМ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НУЛИ

**Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина**

Введение

В данной заметке рассматриваются приложения леммы Шварца и ее обобщений к неравенствам для целых функций экспоненциального типа, не обращающихся в нуль в верхней полуплоскости, а также для полиномов с нулями в единичном круге.

Пусть функция f регулярна в круге $U := \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f| < 1$ в U. Согласно классической лемме Шварца, для любой точки z из круга U справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Знаки равенства (в первом неравенстве при $z \neq 0$) будут здесь иметь место только в случае, когда $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$ [1, с. 319]. Нам понадобятся следующие обобщения и дополнения выписанных неравенств. Если функция f регулярна в U и $|f| < 1$ в U, то в круге U имеем точную оценку

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1 - |f(z)|^2, \tag{1}$$

причем знак равенства будет только в случае функции $f(z) = c(z + a)/(1 + \overline{a}z)$, $|c| = 1$, $|a| < 1$ (см. [1, с. 319–320]). Выписывая

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-9004.2006.1) и РФФИ (грант No. 05-01-00099).

неравенство (5) из книги [1, с. 320] для функции $f(z)/z$, получаем обобщение леммы Шварца:

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|}, \quad z \in U, \tag{2}$$

справедливое для всех регулярных в круге U функций f, $f(0) = 0$, $|f| < 1$ в U [2]. Если, дополнительно, функция f продолжается по непрерывности в точку b, $|b| = 1$ так, что $|f(b)| = 1$ и существует производная $f'(b)$, то предельным переходом из (2) приходим к граничной лемме Шварца:

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \geq 1 \tag{3}$$

[2, с. 3514–3515]. Равенство в (2) для вещественных положительных z и в левой части неравенства (3) для $b = 1$ достигается в случае функции $f(z) = z(z + a)/(1 + az)$, $0 \leq a \leq 1$. В качестве дополнения к неравенству (3) приведем следующий результат [3, теорема 2]. Пусть функция f регулярна в U, $|f| < 1$ в U, и пусть эта функция и ее производная определены также в граничных точках z_k таких, что точки $f(z_k)$ расположены на единичной окружности под равными углами, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^{m} f'(z_k) \right| \geq 1 \tag{4}$$

с равенством для функции $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Прямое применение неравенств (1)–(4) к специально построенным произведениям Бляшке приводит к новым результатам для некоторых классов целых функций. В первом параграфе рассматриваются целые функции экспоненциального типа с нулями в замкнутой нижней полуплоскости. Для таких функций устанавливаются теоремы искажения, включая двуточечную теорему искажения на вещественной оси. Во втором параграфе доказываются аналогичные теоремы для полиномов с нулями в замкнутом единичном круге. В частности, уточняются классические неравенства Турана и Энкени–Ривлина. Кроме того, доказывается теорема о взаимном расположении нулей и критических точек полинома.

§1. Целые функции экспоненциального типа, не обращающиеся в нуль в верхней полуплоскости

Указанные в заглавии функции представляют значительный интерес. К настоящему времени получено немало интересных результатов для этих функций и их исследования продолжаются до сих пор (см., например, [4–8]). Целыми функциями экспоненциального типа называются целые функции, порядок которых меньше 1, либо равен 1, но тогда тип конечен. Как обычно, через

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r}$$

будем обозначать индикатор роста функции f. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих следующим условиям: $f(z) \neq 0$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и $h_f(\pi/2) = h_f(-\pi/2)$. Заметим, что если целая функция экспоненциального типа $f(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $h_f(\pi/2) = \tau$, $h_f(-\pi/2) = \sigma$ (т.е. $f \in \mathcal{A}_\sigma^\tau$ (см. [9, 8])), то функция $g(z) = f(z)e^{i(\tau-\sigma)z/2}$ принадлежит классу $\mathcal{E}$. Применяя к функции g следующие ниже теоремы, получим соответствующие утверждения для функций класса $\mathcal{A}_\sigma^\tau$. Пусть теперь функция $f \in \mathcal{E}$. Тогда функция $\overline{f(\overline{z})}$ принадлежит известному классу P [4, с. 217]. Из представления функций класса P следует, что функция

$$L(z) := \frac{f(z)}{\overline{f(\overline{z})}} = c \prod_k \frac{1 - z/\alpha_k}{1 - z/\overline{\alpha_k}}, \tag{5}$$

где $|c| = 1$, $\operatorname{Im}\alpha_k \leq 0$ и $\sum\limits_k \left|\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right| < \infty$ [4, с. 219]. Если функция f имеет только вещественные нули, то $L(z) \equiv c$, $|c| = 1$; в общем случае $|L(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$.

Пусть $f \in \mathcal{E}$ и z_0 – фиксированная точка в нижней полуплоскости: $\operatorname{Im} z_0 < 0$. Ввиду (5) суперпозиция

$$B(\zeta) = \zeta L(z(\zeta)), \quad \text{где} \quad z(\zeta) = \frac{z_0 + \zeta\,\overline{z}_0}{1+\zeta},$$

является произведением Бляшке, переводящим круг $|\zeta| < 1$ в себя. Данная функция использовалась в работе [8] для построения конформного и однолистного отображения в соответствии с предложенным в [10] подходом к получению неравенств для многолистных функций. Однако в ряде частных случаев эффективнее непосредственное применение неравенств (1)–(4), например, к функциям $L(z(\zeta))$ и $B(\zeta)$. Таким образом, оба подхода дополняют друг друга. Заметим также, что наряду с функцией $B(\zeta)$ можно рассматривать другое произведение Бляшке

$$\frac{L(z(\zeta)) - L(z_0)}{1 - \overline{L(z_0)}L(z(\zeta))},$$

к которому применены все последующие ниже выкладки для $B(\zeta)$.

Теорема 1. *Если функция $f \in \mathcal{E}$, то для любой точки z, $\operatorname{Im} z < 0$, $f(z) \neq 0$, справедливо неравенство*

$$2|\operatorname{Im} z|\left|\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\overline{f'(\overline{z})}}{\overline{f(\overline{z})}}\right| \le \frac{|f^2(\overline{z})| - |f^2(z)|}{|f(z)f(\overline{z})|}.$$

Равенство достигается в том и только в том случае, когда все нули функции f, за исключением может быть одного, лежат на вещественной оси.

Доказательство. Если $L(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то, применяя неравенство (1) к функции $L(z(\zeta))$ в точке $\zeta = 0$, получаем

$$|L'(z_0)/L(z_0)||2\operatorname{Im} z_0| \le |L(z_0)|^{-1} - |L(z_0)|,$$

что дает требуемое неравенство при $z_0 = z$. Равенство имеет место в том и только том случае, когда

$$L(z(\zeta)) = c\frac{\zeta + a}{1 + \overline{a}\zeta}$$

при некоторых c, $|c| = 1$, и a, $|a| < 1$. Ввиду (5) это соответствует случаю, когда один нуль функции f лежит в нижней полуплоскости, а все остальные нули (если таковые имеются) – на вещественной оси. Если теперь $L(z) \equiv \mathrm{const}$, то необходимо $|L(z)| \equiv 1$, и мы имеем случай равенства, в котором все нули функции f расположены на вещественной оси. Теорема доказана.

Из неравенства (2), примененного к функции $B(\zeta)$, вытекает

Теорема 2. *Если функция $f \in \mathcal{E}$, то для любых точек z и ζ в нижней полуплоскости выполняется неравенство*

$$|z-\overline{\zeta}|\Big(|f(z)f(\overline{\zeta})|-|f(\overline{z})f(\zeta)|\Big) \le |z-\zeta|\Big(|f(\overline{z})f(\overline{\zeta})|-|f(z)f(\zeta)|\Big).$$

Равенство достигается, например, для функций f, все нули которых расположены на вещественной оси.

Заметим, что ввиду (5) для любой функции f класса $\mathcal{E}$ в точках x на вещественной оси имеет место неравенство

$$\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_k \frac{\operatorname{Im}\alpha_k}{|\alpha_k - x|^2} \le 0.$$

Отсюда

$$(\arg f(x))' = \operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} \le 0. \tag{6}$$

Здесь и ниже $(\arg f(x))'$ означает частную производную $\partial \arg f/\partial x$, вычисленную в точке x на вещественной оси. Если дополнительно известны значения функции f в некоторых симметричных точках ζ и $\overline{\zeta}$, то неравенство (6) допускает следующее усиление.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in \mathcal{E}$, x – вещественное и ζ – комплексное число в нижней полуплоскости. Тогда*

$$(\arg f(x))' \le \frac{|f(\overline{\zeta})|-|f(\zeta)|}{|f(\overline{\zeta})|+|f(\zeta)|}\,\frac{\operatorname{Im}\zeta}{|x-\zeta|^2}. \tag{7}$$

Равенство в (7) имеет место для функции f класса $\mathcal{E}$ с нулями на вещественной оси.

Доказательство. Применение неравенства (3) к функции

$$B(\zeta) = \zeta L(z(\zeta)) = L(z_0)\zeta + \dots$$

дает

$$|B'(\zeta)| \ge \frac{2}{1+|L(z_0)|} = 1 + \frac{1-|L(z_0)|}{1+|L(z_0)|}$$

для любых ζ, $|\zeta| = 1$, $\zeta \ne -1$. С другой стороны, в точке ζ, для которой $x = z(\zeta)$, имеем

$$|B'(\zeta)| = 1+\frac{\zeta L'(z(\zeta))z'(\zeta)}{L(z(\zeta))} = 1+\frac{\zeta(z)L'(z(\zeta))}{\zeta'(z)L(z(\zeta))} = 1+\frac{|x-z_0|^2}{\operatorname{Im} z_0}\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)},$$

где $\zeta(z) = (z_0 - z)/(z - \overline{z}_0)$ – функция, обратная $z = z(\zeta)$. Неравенство (7) доказано (при $\zeta = z_0$). В случае, когда все нули функции f расположены на вещественной оси $L(z) \equiv c$, $|c| = 1$ (см. (5)). Поэтому $B(\zeta) \equiv c\zeta$ и в неравенствах (3) и (7) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 3 дают усиления соответственно теорем 5 и 3 работы [8], полученных другим путем. Сочетание неравенства (7) с некоторыми результатами Б. Я. Левина [4] и Т. Г. Генчева [9] для целых функций экспоненциального типа приводит к уточнению классических теорем в разных направлениях (см. применение теоремы 3 в [8, следствия 2–4]).

Теорема 4. *Если функция $f \in \mathcal{E}$, то для любых различных точек x_1 и x_2 на вещественной оси справедливо неравенство*

$$(\arg f(x_1))'(\arg f(x_2))'|x_1 - x_2|^2 \geq \sin^2 \arg(f(x_1)/f(x_2)). \qquad (8)$$

Равенство в (8) достигается для функций f класса $\mathcal{E}$, у которых в нижней полуплоскости имеется только один нуль $z_0 = (x_1+x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$.

Доказательство. Пусть $L(x_1) \neq L(x_2)$ и пусть точки ζ_k таковы, что $x_k = z(\zeta_k)$, $k = 1, 2$. Обозначим через $\Psi(w)$ один из дробно-линейных автоморфизмов круга $|w| < 1$ на себя, переводящих точки $L(x_k)$, $k = 1, 2$, в точки ± 1. Из неравенства (4), примененного к суперпозиции $\Psi(L(z(\zeta)))$, следует

$$|\Psi'(L(x_1))\Psi'(L(x_2))L'(x_1)L'(x_2)z'(\zeta_1)z'(\zeta_2)| \geq 1. \qquad (9)$$

Полагая z_0 в определении функции $z(\zeta)$ равной $(x_1 + x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$ и используя инвариантность известного функционала при дробно-линейных отображениях, заключаем из (9)

$$|L'(x_1)L'(x_2)|\,|x_1 - x_2|^2 \geq |L(x_1) - L(x_2)|^2.$$

Это же неравенство верно при $L(x_1) = L(x_2)$. После несложных вычислений приходим к неравенству (8). Если теперь функция f имеет в нижней полуплоскости только один нуль $z_0 = (x_1+x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$, то ввиду (5)

$$L(z) \equiv c\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \qquad |c| = 1.$$

Таким образом, $L(z(\zeta))$ есть поворот вокруг точки $\zeta = 0$. Непосредственно убеждаемся, что $\zeta_1 = -\zeta_2$ и, следовательно, Ψ также поворот вокруг начала. Отсюда вытекает равенство в (9) и (8). Теорема доказана.

Аналогично доказывается “трехточечная” теорема искажения для функций класса $\mathcal{E}$ и для любых различных точек x_1, x_2 и x_3 на вещественной оси.

В недавней работе [7] установлено замечательное неравенство

$$|f(z)| > \mu \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

справедливое для всех целых функций f экспоненциального типа, отличных от постоянной, не имеющих нулей в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условиям $h_f(\pi/2) = 0$, $|f(x)| \geq \mu > 0$ на вещественной оси. В [7] даны также интересные приложения этого неравенства. Новые приложения можно получить, применяя неравенства (1)–(2) к функции $w = \mu/f(z(\zeta))$, $|\zeta| < 1$, где $z(\zeta)$ определена как и выше, но с $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Например, из неравенства (1) аналогично доказательству теоремы 1, получаем следующий результат

$$|f'(z)| \leq \frac{|f^2(z)| - \mu^2}{2\mu \operatorname{Im} z}, \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

В заключение отметим, что если все нули полинома P степени n лежат в круге $|z| \leq 1$, то функция $f(z) = e^{inz/2}P(e^{-iz})$ принадлежит классу $\mathcal{E}$. Применение к этой функции предыдущих теорем приводит к некоторым утверждениям для полинома P. Однако более сильные результаты получаются, если повторить предыдущие доказательства теорем, но уже применительно к другому произведению Бляшке, построенному по полиному P. Это, в частности, будет показано в следующем параграфе.

§2. Полиномы с нулями в единичном круге

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ класс всех полиномов вида

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k),$$

для которых $c_n \neq 0$ и $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$. Всюду ниже

$$\widetilde{B}(z) = \frac{P(z)}{z^{n-1}\,\overline{P(1/\overline{z})}} = \frac{c_n}{\overline{c}_n}\; z \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha}_k z}.$$

Непосредственно из неравенства (2), примененного к функции $\widetilde{B}(z)$, вытекает

Теорема 5. *Если полином $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$, то для любой точки z из круга U справедливо неравенство*

$$\left|\frac{P(z)}{P(1/\overline{z})}\right| \leq |z|^n \frac{|z||c_n| + |c_0|}{|c_n| + |z||c_0|}.$$

Равенство достигается, например, для полиномов P с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

Пусть теперь полином $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ не имеет нулей в круге U. Тогда полином $Q(z) := z^n P(1/z) = c_0 z^n + \ldots + c_n$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$. Из теоремы 5 следует, что для любой точки z с $|z| > 1$ выполняется неравенство

$$|P(1/\overline{z})| \geq |P(z)| \frac{1}{|z|^n} \; \frac{|z||c_0| + |c_n|}{|c_0| + |z||c_n|}.$$

Предположим дополнительно, что $M(P) := \max\{|P(z)| : |z| = 1\} = 1$. Тогда

$$|P(z)| + |z|^n |P(1/\overline{z})| \leq 1 + |z|^n$$

(см., например, [11, с. 550]). Вместе с предыдущим неравенством это дает следующий результат.

Следствие 1. *Если полином $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$, $n \geq 2$, не имеет нулей в круге U и $M(P) = 1$, то для любого $r > 1$ справедливо неравенство*

$$\max\{|P(z)| : |z| = r\} \leq \frac{(1 + r^n)(|c_0| + r|c_n|)}{(1 + r)(|c_0| + |c_n|)}$$

с равенством для полиномов $P(z) = (\mu + \nu z^n)/2$, $|\mu| = |\nu| = 1$.

Поскольку правая часть последнего неравенства не превосходит $(1+r^n)/2$, то мы имеем уточнение классического неравенства Энкени–Ривлина [12].

Теорема 6. *Для полиномов $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ класса $\mathcal{P}_n$ в каждой точке z окружности $|z| = 1$, где $P(z) \neq 0$, выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{|c_n|}{|c_0| + |c_n|}. \tag{10}$$

Равенство в (10) *имеет место для полиномов P с нулями на единичной окружности $|z| = 1$ для любых z, $|z| = 1$, $P(z) \neq 0$.*

Доказательство. Применение неравенства (3) к функции $\widetilde{B}(z)$ дает

$$|\widetilde{B}'(z)| \geq \frac{2}{1 + |c_0/c_n|}$$

для любых точек z на окружности $|z| = 1$. С другой стороны, для таких точек z при $P(z) \neq 0$ имеем

$$|\widetilde{B}'(z)| = \frac{z\widetilde{B}'(z)}{\widetilde{B}(z)} = 2\mathrm{Re}\,\frac{zP'(z)}{P(z)} - n + 1,$$

что приводит к неравенству (10). Если теперь все нули полинома P расположены на единичной окружности, то $|c_0| = |c_n|$ и $\widetilde{B}(z) \equiv cz$, $|c| = 1$. Поэтому в последнем неравенстве и, следовательно, в неравенстве (10) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Полученное неравенство несколько усиливает неравенство (14) работы [13]. Из неравенства (10) вытекает также следующее усиление классического неравенства Турана [14]:

$$\max\left\{|P'(z)| : |z| = 1\right\} \geq \max\left\{|P(z)| : |z| = 1\right\}\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{|c_n| - |c_0|}{|c_n| + |c_0|}\right].$$

Теорема 7. *Если полином $P \in \mathcal{P}_n$, то для любых различных точек z_1 и z_2 на окружности $|z| = 1$, $P(z_1)P(z_2) \neq 0$, справедливы неравенства*

$$\left(2\mathrm{Re}\,\frac{z_1P'(z_1)}{P(z_1)} - n + 1\right)\left(2\mathrm{Re}\,\frac{z_2P'(z_2)}{P(z_2)} - n + 1\right) \geq$$
$$\geq \left|\frac{z_2^{n-1}P(z_1)\overline{P(z_2)} - z_1^{n-1}P(z_2)\overline{P(z_1)}}{(z_1 - z_2)P(z_1)P(z_2)}\right|^2,$$

$$\left(2\mathrm{Re}\,\frac{z_1P'(z_1)}{P(z_1)} - n\right)\left(2\mathrm{Re}\,\frac{z_2P'(z_2)}{P(z_2)} - n\right) \geq$$
$$\geq \left|\frac{z_2^{n}P(z_1)\overline{P(z_2)} - z_1^{n}P(z_2)\overline{P(z_1)}}{(z_1 - z_2)P(z_1)P(z_2)}\right|^2.$$

Равенство в каждом из неравенств имеет место в случае полиномов P с нулями на единичной окружности.

Доказательство. При доказательстве первого неравенства можно считать, что $\widetilde{B}(z_1) \neq \widetilde{B}(z_2)$. Пусть $\Phi(z)$ – дробно-линейный автоморфизм круга $|z| < 1$ на себя такой, что $\Phi((-1)^k) = z_k$, $k = 1, 2$, а $\Psi(w)$ – дробно-линейный автоморфизм круга $|w| < 1$ на себя, $\Psi(\widetilde{B}(z_k)) = (-1)^k$, $k = 1, 2$. Из неравенства (4), примененного к суперпозиции $\Psi(\widetilde{B}(\Phi(z)))$, следует

$$|\Psi'(\widetilde{B}(z_1))\Psi'(\widetilde{B}(z_2))(\widetilde{B}'(z_1)\widetilde{B}'(z_2)\Phi'(-1)\Phi'(1)| \geq 1.$$

Отсюда

$$|\widetilde{B}'(z_1)\widetilde{B}'(z_2)||z_1 - z_2|^2 \geq |\widetilde{B}(z_1) - \widetilde{B}(z_2)|^2,$$

что равносильно требуемому неравенству. Если теперь все нули полинома P расположены на единичной окружности, то $\widetilde{B}(z) \equiv cz$, $|c| = 1$. Для таких функций $\widetilde{B}(z)$ в последнем неравенстве имеет место знак равенства. Доказательство второго неравенства теоремы 7 аналогично доказательству первого, только вместо функции $\widetilde{B}(z)$ необходимо рассмотреть функцию $\widetilde{B}(z)/z$. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть полином $P \in \mathcal{P}_n$ и пусть точки z_k, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, на окружности $|z| = 1$ таковы, что $P(z_k) \neq 0$ и точки $w_k = P(z_k)/\big(z_k^n \overline{P(z_k)}\big)$ расположены на окружности $|w| = 1$ под равными углами, $k = 1, \dots, m$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{m} \left(2\mathrm{Re}\,\frac{z_k P'(z_k)}{P(z_k)} - n \right) \geq 1.$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = c_n z \prod\limits_{k=1}^{n-1}(z - \alpha_k)$, $|\alpha_k| = 1$, $k = 1, \dots, n-1$.

Доказательство осуществляется применением неравенства (4) к функции $f(z) = \widetilde{B}(z)/z$. Случай равенства проверяется непосредственно.

Теорема 9. *Пусть $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)$, $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, и пусть β_k, $k = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома P. Тогда справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \prod_{k=1}^{n} \alpha_k - n \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k \right| \leq 1 - \left| \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \right| \leq 1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n + c_1 z$, $|c_1| = 1$.

Доказательство. Положим $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$. Прямым вычислением получаем

$$f(z) := \frac{\widetilde{B}(z)}{z} = \frac{P(z)}{z^n \overline{P(1/\overline{z})}} = c_0 + (c_1 - c_0\overline{c}_{n-1})z + \ldots .$$

Неравенство (1) при $z = 0$ дает

$$|c_1 - c_0\overline{c}_{n-1}| \le 1 - |c_0|^2.$$

Осталось воспользоваться формулами Виета

$$c_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad c_1 = (-1)^{n-1} n \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k \quad \text{и} \quad c_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Случай равенства виден из приведенного доказательства. Теорема доказана.

Следствие 2 (ср. [15, с. 4463–4464]). *Если полином* $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)$ *принадлежит классу* $\mathcal{P}_n$ *и* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, *то* $|P'(0)| \le 1 - |P(0)|^2 \le 1$.

Следствие 3. *Если полином* $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)$ *принадлежит классу* $\mathcal{P}_n$ *и если* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, *либо* $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, *то для критических точек этого полинома* β_k, $k = 1, \ldots, n-1$, *выполняется неравенство*

$$\min_{1 \le k \le n-1} |\beta_k| \le (1/n)^{1/(n-1)}.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n - z$.

В работе [16, теорема 3] показано, что если β_k, $k = 1, \ldots, n-1$, критические точки полинома $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$ класса $\mathcal{P}_n$, то

$$\sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} |P(\beta_k)|} \le (n-1)|c_1^2/n^n|^{1/(n-1)}$$

с равенством в случае $P(z) = z^n + c_1 z$, где $|c_1| = 1$. С другой стороны, из теоремы 9 следует $|c_1| \le 1$. Отсюда вытекает

Следствие 4. *Если β_k, $k = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$ класса $\mathcal{P}_n$, то имеют место неравенства*

$$\prod_{k=1}^{n-1} |P(\beta_k)| \le \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}, \qquad \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} \left|\frac{P(\beta_k)}{\beta_k}\right|} \le \frac{n-1}{n}.$$

Равенство в обоих случаях достигается для полинома $P(z) = z^n - z$.

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., М., 1966.
2. R. Osserman, *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, No. 12 (2000), 3513–3517.
3. В. Н. Дубинин, *К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 74–84.
4. B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monographs, AMS **150** (1996).
5. R. Gardner, N. K. Govil, *Functions of exponential type not vanishing in a half–plane*, Analysis **17** (1997), 395–402.
6. N. K. Govil, M. A. Qazi, *On maximum modulus of polynomials and related entire functions with restricted zeros*, Math. Ineq. Appl. **5**, No. 1 (2002), 57–60.
7. N. K. Govil, M. A. Qazi, Q. I. Rahman, *A new property of entire functions of exponential type not vanishing in a half–plane and applications*, Complex Variables **48**, No. 11 (2003), 897–908.
8. А. В. Олесов, *Неравенства для целых функций конечной степени и полиномов*, Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 174–195.
9. Т. Г. Генчев, *Неравенства для асимметрических целых функций эспоненциального типа*, Докл. АН СССР **241**, No. 6 (1978), 1261–1264.
10. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов*, Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
11. A. Aziz, Q. G. Mohammad, *Growth of polynomials with zeros outside a circle*, Proc. Amer. Math. Soc. **81**, No. 4 (1981), 549–553.
12. N. C. Ankeny, T. J. Rivlin, *On a theorem of S. Bernstein*, Pacific J. Math. **5**, No. 2 (1955), 849–852.
13. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности*, Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
14. P. Turan, *Über die Ableitung von Polynomen*, Compositio Math. **7** (1939), 89–95.
15. P. Pawlowski, *On the zeros of a polynomial and its derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. **350**, No. 11 (1998), 4461–4472.
16. В. Н. Дубинин, *Неравенства для критических значений полиномов*, Мат. сб. **197**, No. 8 (2006), 63–72.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 4 мая 2006 г.

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru