Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

В. Н. Дубинин

ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ, ОБОБЩЕНИЯ ЛЕММ ГРЁТША И СИММЕТРИЗАЦИЯ

**Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина**

Введение и основные определения

Огромное влияние на развитие геометрической теории функций комплексного переменного оказали работы Г. М. Голузина, который уделял большое внимание как оригинальным результатам, так и совершенствованию методов этой теории. В частности, представление о методе полос Грётша многие последующие исследователи получили из знаменитой книги [1]. В современном изложении метод полос составляет часть метода экстремальных метрик, а такие его ключевые понятия как модуль четырехугольника, модуль кольца и, далее, модуль семейства кривых тесно связаны с емкостью конденсатора и другими понятиями теории потенциала.

В данной работе продолжаются исследования свойств обобщенных конденсаторов и их приложений [2, 3]. Рассматриваются принципы симметрии и композиции для конформной емкости таких конденсаторов. Обсуждается связь этих принципов с классическими леммами Грётша [1, с. 170–173; 4, с. 38–41] и некоторыми видами симметризации [5, 6]. Даны приложения к оценкам емкостей компактов и к задачам об экстремальном разбиении.

Напомним определение емкости обобщенного конденсатора (в дальнейшем слово "обобщенный" будем опускать). Пусть B – область на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Желая различать граничные точки B, но не усложнять при этом изложения существа вопроса, рассмотрим сначала конечносвязные области. В этом слу-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ДВО РАН (гранты No. 06-III-A-01-013) и No. 06-II-CY-01-001).

чае $\overline{B}$ означает компактификацию B посредством простых концов Каратеодори, граница ∂B – совокупность простых концов. Под окрестностью будем понимать любое открытое в $\overline{B}$ множество. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, будем отождествлять элемент $\overline{B}$, соответствующий внутренней точке B, с самой этой точкой, а носитель достижимой граничной точки и саму эту точку будем обозначать одной и той же буквой. Конденсатором в B назовем тройку $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых в $\overline{B}$ попарно непересекающихся множеств E_k, $k = 1, \ldots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$. Для каждого k, $1 \le k \le n$, множество E_k будем называть пластиной конденсатора C, а число δ_k – уровнем потенциала или, короче, потенциалом пластины E_k.

Емкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле

$$I(v, B) := \iint\limits_B |\nabla v|^2 dxdy$$

по всем *допустимым функциям* $v(z)$ $(z = x + iy)$, т.е. вещественным функциям $v(z)$, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки множества B и равным δ_k в некоторой окрестности пластины E_k, $k = 1, \ldots, n$. Если граница множества $\bigcup\limits_{k=1}^n E_k$ состоит из конечного числа невырожденных связных компонент, а участки границы $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$ кусочногладкие, то существует единственная функция u, непрерывная в $\overline{B}$, гармоническая в $B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$, равная δ_k на E_k, $k = 1, \ldots, n$, и такая, что $\partial u / \partial n = 0$ в точках гладкости на $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$ (здесь и ниже $\partial / \partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе). Указанную функцию будем называть *потенциальной функцией* конденсатора C. Из принципа Дирихле следует, что

$$\operatorname{cap} C = I(u, B).$$

Для бесконечносвязных областей $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ ограничимся случаем, когда конденсатор $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$ и его емкость $\operatorname{cap} C$ определяются как и выше, только одна из пластин необходимо совпадает со всей границей области B, понимаемой в обычном смысле, а другие пластины суть замкнутые попарно непересекающиеся подмножества B. В §1 данной статьи рассматривается простейший принцип симметрии (теорема 1) и вводятся принципы композиции для емкостей конденсаторов (теоремы 2 и 3). Теорема 2 взята из работы [2, с. 41], а теорема 3 является более удобным в приложениях аналогом соответствующего утверждения в [2, с. 42]. Все три теоремы доказываются весьма просто и, в тоже время, имеют существенные приложения в геометрической теории функций. Значимость этих утверждений раскрывается частично во втором параграфе, который носит методический характер. В нем показано, что теоремы 2 и 3 являются далеко идущими обобщениями известных лемм Грётша и совместно с теоремой 1 включают в себя одну из разновидностей кусочно-разделяющей симметризации [6]. С другой стороны, леммы Грётша можно рассматривать также как следствия некоторых принципов симметризации [5]. Знание этих зависимостей позволяет эффективно сочетать методы, основанные на применении емкостей, экстремальных длин и симметризации.

Нам понадобится также асимптотика емкости конденсатора в одном частном случае из работы [2]. Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим через $D(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки определим $D(\infty, r) := \{z : |z| \geq 1/r\}$. Рассмотрим произвольную конечносвязную область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Пусть Γ – непустое замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент; $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек области B; $\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$, и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r$, μ_k, $k = 1, \ldots, n$ – произвольные положительные числа. Обозначим $C(r; B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) := (B, \{\Gamma, D(z_1, \psi_1(r)), \ldots, D(z_n, \psi_n(r))\}, \{0, \delta_1, \ldots, \delta_n\})$. Из теоремы 7 работы [2] вытекает следующая асимптотическая формула:

$$\operatorname{cap} C(r; B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) = 2\pi \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right] \left(-\frac{1}{\log r}\right) -$$

$$-2\pi \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log \frac{r(B, \Gamma, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l g_B(z_k, z_l, \Gamma)\right] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 +$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0. \tag{1}$$

Здесь $g_B(z, z_k, \Gamma) := g_{f(B)}(f(z), f(z_k), f(\Gamma))$, где функция f конформно и однолистно отображает область B на аналитическую жорданову область $f(B)$, а вещественная функция $g_k(w) \equiv g_{f(B)}(w, f(z_k), f(\Gamma))$ определяется следующим образом: $g_k(w)$ непрерывная на $\overline{f(B)} \backslash \{f(z_k)\}$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{f(B)} \backslash (f(\Gamma) \cup \{f(z_k)\})$, гармоническая в $f(B) \backslash \{f(z_k)\}$ и такая, что

$g_k(w) = 0$ при $w \in f(\Gamma)$,

$\partial g_k / \partial n = 0$ при $w \in (\partial f(B)) \backslash f(\Gamma)$,

$g_k(w) + \log |w - f(z_k)|$ – гармоническая функция в окрестности точки $f(z_k)$; $r(B, \Gamma, z_k) := \exp \lim_{z \to z_k} (g_B(z, z_k, \Gamma) + \log |z - z_k|)$, $k = 1, \dots, n$.

Легко видеть, что $g_B(z, z_k, \Gamma)$ и $r(B, \Gamma, z_k)$ не зависят от выбора функции f (см. [2, §2]). Ясно также, как изменятся определения этих понятий, если точка $z_k = \infty$. В случае $\Gamma = \partial B$ конденсатор $C(r; B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi)$ определяется для произвольной области B, имеющей функцию Грина, и для емкости этого конденсатора вновь справедлива формула (1), где $r(B, \Gamma, z_k) = r(B, z_k)$ – внутренние радиусы, а $g_B(z, z_k, \Gamma) = g_B(z, z_k)$ – функции Грина области B, $k = 1, \dots, n$ [7]. Если $B = \overline{\mathbb{C}}$ и $\Gamma = \varnothing$, то при дополнительном условии $\sum_{k=1}^{n} \delta_k = 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\operatorname{cap} C(r; \overline{\mathbb{C}}, \varnothing, Z, \Delta, \Psi) = 2\pi \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right] \left(-\frac{1}{\log r}\right) +$$

$$+2\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\ \delta_k^2\log\mu_k+\sum_{k=1}^{n}\ {\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}}'\delta_k\delta_l\log|z_k-z_l|\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\qquad r\to 0. \tag{2}$$

где штрих у знака суммы означает, что при $z_k=\infty$ ($z_l=\infty$) под соответствующим слагаемым понимается нуль [7]. Применение теорем 1–3 (§1) и других свойств емкостей конденсаторов [2] совместно с формулами (1)–(2) приводит к результатам в различных областях теории функций комплексного переменного [3, 6–7]. В дополнение к этим результатам мы получаем оценки логарифмической, гиперболической и других емкостей компактов (§3), а также неравенства для произведений внутренних радиусов и емкостей Робена попарно неналегающих областей (§4).

§1. Принципы симметрии и композиции

Рассмотрим сначала аналог принципа симметрии метода экстремальных метрик (ср. [8, гл. I, теорема 5], [9, теорема 2.47]). Для произвольного множества $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ введем обозначение $A^+=\{z\in A:\operatorname{Im}z>0\}$. Множество A называется симметричным относительно вещественной оси, если $A=\{z:\overline{z}\in A\}$. Конденсатор $C=(B,\mathcal{E},\Delta)$ назовем симметричным относительно вещественной оси, если область B и пластины совокупности $\mathcal{E}$ обладают указанной симметрией.

Теорема 1. *Если конденсатор $C=(B,\{E_k\}_{k=1}^n,\{\delta_k\}_{k=1}^n)$ симметричен относительно вещественной оси, то*

$$\operatorname{cap}C=2\operatorname{cap}C^+,$$

где $C^+=(B^+,\{\overline{E_k^+}\}_{k=1}^n,\{\delta_k\}_{k=1}^n)$.

Доказательство. Стандартными рассуждениями убеждаемся, что достаточно рассмотреть ситуацию, когда множества B и $\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$ ограничены конечным числом жордановых кривых. Привлекая в случае необходимости конформное отображение, можно считать, что граница ∂B состоит из конечного числа аналитических кривых. В этих условиях обозначим через u потенциальную функцию конденсатора C. В силу единственности $u(z) \equiv u(\overline{z})$, т.е. функция u симметрична относительно вещественной оси. В частности, в точках множества $(\partial B^+) \bigcap B$ на вещественной оси имеем $\partial u/\partial n = 0$. Поэтому функция u является потенциальной для конденсатора C^+. Отсюда

$$\operatorname{cap} C = I(u, B) = 2I(u, B^+) = 2\operatorname{cap} C^+.$$

Теорема доказана.

Ясно как формулируется принцип симметрии в случае произвольной прямой (вместо вещественной оси) и в случае, когда прямая заменяется на окружность.

Следующие две теоремы являются аналогами соответствующих принципов композиции метода экстремальных метрик (см. [8, гл. I, теорема 4]).

Теорема 2. *Пусть B_i, $i = 1, \dots, m$, – попарно непересекающиеся подобласти области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, и пусть для конденсаторов $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{k=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ выполняется условие: любая пластина E_{ij} каждого конденсатора C_i принадлежит объединению пластин конденсатора C, имеющих тот же потенциал, что и E_{ij}. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i \le \operatorname{cap} C.$$

Доказательство приводится в работе [2, с. 41–42]. О связи этой теоремы с другими утверждениями метода экстремальных метрик сказано также в [2, с. 42].

Теорема 3. *Предположим, что конденсаторы $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\overline{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i$;
2) *если некоторая точка принадлежит множеству $\overline{B}_i \bigcap \overline{B}_{i'}$, $i \ne i'$ $(i, i' = 1, \dots, m)$, то она принадлежит также пластинам конденсаторов C_i и $C_{i'}$ с равными потенциалами;*
3) *любая пластина E_k конденсатора C принадлежит объединению пластин конденсаторов C_i, имеющих тот же потенциал, что и E_k.*

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i \geq \operatorname{cap} C.$$

Доказательство. Пусть v_i – произвольная допустимая функция для конденсатора C_i, $i = 1, \ldots, m$. На множестве $\overline{B}$ определим функцию $v(z)$, равную $v_i(z)$, если точка z принадлежит множеству $\overline{B}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Ввиду условия 2) функция v однозначна, а в силу условий 1)–3) и определения функций v_i она допустима для конденсатора C. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} I(v_i, B_i) = I(v, B) \geq \operatorname{cap} C.$$

Осталось перейти к инфимумам по всевозможным допустимым функциям $v_i, i = 1, \ldots, m$. Теорема доказана.

§2. Леммы Грётша и принципы симметризации

Покажем сначала, что теоремы 2, 3 обобщают леммы Грётша для модулей четырехугольников и колец. Несколько отклоняясь от классических определений (см., например, [4]), мы ограничиваемся определениями модуля четырехугольника и модуля двусвязной области лишь для одного семейства кривых, что достаточно для наших целей. Именно, модулем mP четырехугольника P относительно заданных сторон назовем модуль семейства кривых, лежащих в P и соединяющих указанные стороны. Модуль mQ двусвязной области Q определяем как модуль семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты. Следующие два утверждения лежат в основе "метода полос" и их принято называть леммами Грётша.

Утверждение 1. *Пусть P_i, $i = 1, \ldots, m$, – попарно непересекающиеся четырехугольники, лежащие в кольце $Q = \{z : r < |z| < R\}$ так, что каждый из них имеет пару противоположных сторон, принадлежащих соответственно окружностям $|z| = r$ и $|z| = R$. Тогда для модулей mP_i этих четырехугольников относительно указанных сторон справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} mP_i \leq 2\pi / \log(R/r).$$

Доказательство. Рассмотрим конденсаторы $C_i = (P_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^2, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^2)$, где E_{ij}, $j = 1, 2$, – стороны четырехугольника P_i, лежащие на окружностях $|z| = r$ $(j = 1)$, $|z| = R$ $(j = 2)$, а $\delta_{ij} = j-1$, $j = 1, 2$, и рассмотрим конденсатор $C = (Q, \{\{z : |z| = r\}, \{z : |z| = R\}\}, \{0, 1\})$. Известно, что $\operatorname{cap} C_i = mP_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\operatorname{cap} C = 1/mQ = 2\pi/\log(R/r)$ [4,8]. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Утверждение 2. *Пусть Q_i, $i = 1, \ldots, m$, – попарно непересекающиеся двусвязные области, лежащие в кольце $Q = \{z : r < |z| < R\}$ и разделяющие граничные компоненты Q. Тогда*

$$\sum_{i=1}^m mQ_i \le mQ = \frac{1}{2\pi} \log(R/r).$$

Доказательство. Ввиду монотонности модуля можно считать, что $\overline{Q} = \bigcup\limits_{i=1}^m \overline{Q}_i$. Перенумеруем, если это необходимо, области Q_i в порядке их следования от окружности $|z| = r$ до окружности $|z| = R$, и рассмотрим конденсаторы $C_i = (Q_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^2, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^2)$, , $i = 1, \ldots, m$, и конденсатор C из доказательства утверждения 1. Здесь $E_{11} = \{z : |z| = r\}$, $E_{i2} = E_{i+1\,1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, $E_{m2} = \{z : |z| = R\}$; $\delta_{11} = 0$, $\delta_{i2} = \delta_{i+1\,1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, $\delta_{i2} - \delta_{i1} = mQ_i / \sum\limits_{i=1}^m mQ_i$, , $i = 1, \ldots, m$, так что $\delta_{m2} = 1$. Понятно, что $\operatorname{cap} C_i = (\delta_{i2} - \delta_{i1})^2 / mQ_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\operatorname{cap} C = 1/mQ$. По теореме 3,

$$\frac{1}{mQ} \le \sum_{i=1}^m \frac{(\delta_{i2} - \delta_{i1})^2}{mQ_i} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m mQ_i}.$$

Утверждение доказано.

Теоремы 1–3 содержат также основное неравенство для разделяющего преобразования конденсаторов. Напомним необходимые определения из [6], заменив в них мнимую ось на вещественную. Пусть D_i, $i = 1, \ldots, m$, – односвязные попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченные конечным числом кусочно-аналитических кривых, и пусть $\{p_i\}_{i=1}^m$ – некоторое семейство функций $\zeta = p_i(z)$, конформно и однолистно отображающих соответственно области D_i на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. Для произвольного множества $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ обозначим через $A^{(i)}$ объединение множества $p_i(A \bigcap \overline{D}_i)$ с его отражением относительно вещественной оси. Пусть теперь $C = (\overline{\mathbb{C}}, \{E_1, E_2\}, \{0, 1\})$ – произвольный конденсатор, удовлетворяющий условию: $E_j \bigcap \overline{D}_i \neq \varnothing$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, m$. Семейство конденсаторов $C_i = (\overline{\mathbb{C}}, \{E_1^{(i)}, E_2^{(i)}\}, \{0, 1\})$, $i = 1, \dots, m$, называется результатом разделяющего преобразования конденсатора C относительно семейства функций $\{p_i\}_{i=1}^m$. Разделяющее преобразование является простейшим примером кусочно-разделяющей симметризации [6].

Утверждение 3. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{cap}\, C \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{cap}\, C_i.$$

Доказательство. Введем обозначения $\widetilde{C}_i = (D_i, \{E_j \bigcap \overline{D}_i\}_{j=1}^2, \{0, 1\})$, $i = 1, \dots, m$. По теореме 2,

$$\mathrm{cap}\, C \geq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{cap}\, \widetilde{C}_i.$$

Из конформной инвариантности емкости и теоремы 1 следует

$$\mathrm{cap}\, \widetilde{C}_i = \frac{1}{2}\, \mathrm{cap}\, C_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что леммы Грётша естественным образом вытекают из следующих принципов симметризации. Пусть Q – произвольная двусвязная область плоскости $\mathbb{C}$, и пусть E – ограниченная компонента дополнения Q. Результатом симметризации области Q относительно точки $z = 0$ называется круговое кольцо $Q^* = \{z : r(E) < |z| < r(E \bigcup G)\}$, где $\pi r^2(A)$ означает меру Лебега множества $A \subset \mathbb{C}$.

Утверждение 4 (Карлеман [5, с. 270])**.** *В указанных обозначениях имеет место неравенство*

$$mQ \leq mQ^*. \tag{3}$$

Впоследствии неравенство (3) стали называть принципом симметризации Шварца. Пусть теперь P – произвольный четырехугольник, лежащий в полосе $x_1 < x < x_2$ и имеющий пару противоположных сторон, принадлежащих соответственно прямым $x = x_1$ и $x = x_2$, а mP – модуль P относительно этих сторон. Результатом симметризации четырехугольника P назовем прямоугольник $P^* = \{z : x_1 < x < x_2, 0 < y < h\}$, где $(x_2 - x_1)h$ – мера Лебега четырехугольника P.

Утверждение 5 ([5, с. 245]). *Справедливо неравенство*

$$mP \le mP^*.$$

Этот результат как и предыдущее неравенство (3) можно получить с помощью одного приема, использованного в работах Фабера (1923) и Крана (1924) и нашедшего в дальнейшем многочисленные приложения и обобщения в теории симметризации (см., например, [5, с. 97, 273, 279]).

Утверждение 2 вытекает из принципа симметризации (3) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} mQ_i \le \sum_{i=1}^{m} mQ_i^* \le \frac{1}{2\pi}\log(R/r).$$

Последнее неравенство выполняется ввиду того, что концентрические кольца $Q_i^*, i = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются и лежат в кольце Q.

Для доказательства утверждения 1 разрежем кольцо Q вдоль одной из сторон четырехугольника P_1, получив односвязную область B. Регулярная ветвь функции $w = \log z$ отображает четырехугольники P_i на некоторые четырехугольники Π_i, лежащие в полосе $\log r < \mathrm{Re}\, w < \log R$. Ввиду конформной инвариантности модуля и утверждения 5 имеем

$$\sum_{i=1}^{m} mP_i = \sum_{i=1}^{m} m\Pi_i \le \sum_{i=1}^{m} m\Pi_i^* \le 2\pi/\log(R/r).$$

Последнее неравенство следует из того факта, что прямоугольники Π_i^*, $i = 1, \dots, m$, имеют суммарную меру, не превосходящую $2\pi/\log(R/r)$.

Указанные отношения знаменитых лемм Грётша к принципам симметризации автор отмечал в 2002 году на конференции в г. Халле, посвященной памяти Грётша.

§3. Неравенства для емкостей компактов

Метрические свойства замкнутых множеств представляют известный интерес в геометрической теории функций [1, гл. YII; 10]. Докажем сначала теорему об оценке гиперболической емкости $\mathrm{cap}_h\, E$ множества E, связанной с пересечениями множества E наперед заданными кривыми специального вида. Определим эти кривые следующим образом. При фиксированном натуральном $m \geq 1$ разобъем плоскость $\mathbb{C}$ лучами $\arg z^m = \pi$ на m симметричных открытых углов B_k, $k = 1, \ldots, m$. В каждом из таких углов B_k рассмотрим семейство кривых $\Gamma_k = \{\gamma_k(c) : 0 < c < \infty\}$, заданных уравнениями $\gamma_k(c)$: $\mathrm{Re}\, z^{m/2} = c > 0$, $z \in B_k$, $k = 1, \ldots, m$. Легко видеть, что при $m = 1$ семейство Γ_1 состоит из парабол, при $m = 2$ семейства Γ_1 и Γ_2 есть семейства параллельных прямых, а при $m = 4$ семейства Γ_k, $1 \leq k \leq 4$, состоят из ветвей гипербол. Заметим также, что расстояние от кривой $\gamma_k(c)$ до начала координат равно $c^{2/m}$.

Теорема 4. *Пусть E – произвольное замкнутое подмножество единичного круга $U := \{z : |z| < 1\}$, и пусть $L_k(E)$ означает линейную меру множества всех c, при которых $\gamma_k(c) \bigcap E \neq \varnothing$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда*

$$\mathrm{cap}_h\, E \geq \exp\left[-\frac{\pi}{2m}\, \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2}\ )}{\mathbf{K}(\tau)}\right], \tag{4}$$

где $\mathbf{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл первого рода и $\tau^{-1/2} - \tau^{1/2} = \sqrt[m]{\prod\limits_{k=1}^{m}\left[L_k^{-1}(E) - L_k(E)\right]}$, $0 \leq \tau < 1$. Равенство в (4) достигается для симметричных множеств

$$E_m^*(t) = \{z : |z| \leq t,\ \arg z^m = 0\}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие конденсаторы
$C = (\mathbb{C}_z, \{E, \mathbb{C}_z \backslash U\}, \{0, 1\})$;
$C_k = (B_k, \{E \bigcap \overline{B}_k,\ (\mathbb{C}_z \backslash U) \bigcap \overline{B}_k\}, \{0, 1\})$;
$C_k^* = (\mathbb{C}_\zeta, \{E_k, \mathbb{C}_\zeta \backslash U_\zeta\}, \{0, 1\})$,
где E_k – объединение образа множества $E \bigcap \overline{B}_k$ при отображении функцией $\zeta = iz^{m/2}$ $(z \in B_k, \mathrm{Im}\zeta > 0)$ с его отражением относительно вещественной оси, а индекс ζ означает, что соответствующее множество лежит в ζ-плоскости;

SC_k^* – результат последовательного применения к конденсатору C_k^* сначала симметризации Штейнера относительно мнимой оси, а затем симметризации Штейнера относительно вещественной оси;

$C_k' = (\mathbb{C}_\zeta, \{\{\zeta : \operatorname{Re}\zeta = 0,\, |\zeta| \le L_k(E)\}, \mathbb{C}_\zeta \setminus U_\zeta\}, \{0,1\})$;

$C_k'' = \big(\mathbb{C}_w, \{\{w : \operatorname{Re} w = 0,\, |w| \ge L_k^{-1}(E) - L_k(E)\}, [-2,2]\}, \{0,1\}\big)$;

$C^* = \big(\mathbb{C}_w, \{\{w : \operatorname{Re} w = 0,\, |w| \ge t^{-m/2} - t^{m/2}\}, [-2,2]\}\, \{0,1\}\big)$,

где $t^m = \tau$ из формулировки теоремы 4 и всюду выше индекс k изменяется от 1 до m.

Согласно теореме 2,

$$\operatorname{cap} C \ge \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} C_k.$$

Из конформной инвариантности емкости и принципа симметрии следует

$$\operatorname{cap} C_k = \frac{1}{2}\operatorname{cap} C_k^*, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Теорема Полиа–Сеге дает

$$\operatorname{cap} C_k^* \ge \operatorname{cap} SC_k^*, \qquad k = 1, \dots, m$$

(см. [5, 6]). Из монотонности емкости и вновь конформной инвариантности (используется отображение $w = \zeta + 1/\zeta$) имеем

$$\operatorname{cap} SC_k^* \ge \operatorname{cap} C_k' = \operatorname{cap} C_k'', \qquad k = 1, \dots, m.$$

В заключение применяем радиально-усредняющее преобразование Маркуса (см. [6, §5]):

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} C_k'' \ge m \operatorname{cap} C^* \ .$$

Заметим, что в случае $E = E_m^*(t)$ и, следовательно, $C = C_m^* := (\mathbb{C}_z, \{\{E_m^*(t),\ \mathbb{C}_z \setminus U\}, \{0,1\})$ все выписанные выше неравенства превращаются в равенства. Суммируя указанные соотношения, получаем

$$\operatorname{cap} C \ge (m/2)\operatorname{cap} C^* = \operatorname{cap} C_m^*.$$

Отсюда

$$\operatorname{cap}_h E \ge \operatorname{cap}_h E_m^*(t).$$

Для вычисления гиперболической емкости симметричного множества проще всего воспользоваться равенством

$$\operatorname{cap}_h E_m^*(t) = \left(\operatorname{cap}_h E_1^*(t^m)\right)^{1/m},$$

что сводит расчеты к известному отображению кругового кольца на кольцо Грётша. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что теорему 4 можно интерпретировать как теорему покрытия. Именно, для любого замкнутого подмножества E круга U выполняется неравенство

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m}\left[L_k^{-1}(E) - L_k(E)\right]} \geq \tau^{-1/2} - \tau^{1/2}, \tag{5}$$

где τ – решение уравнения

$$\operatorname{cap}_h E = \exp\left[-\frac{\pi}{2m}\,\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2}\,)}{\mathbf{K}(\tau)}\right]. \tag{6}$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 4 справедливо неравенство*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E)} \leq \sqrt{\tau},$$

где τ – решение уравнения (6). *Равенство достигается для множеств $E_m^*(t)$, $0 \leq t < 1$.*

Доказательство. Можно считать, что $\prod_{k=1}^{m} L_k(E) \neq 0$. Введем обозначения $x_k = \log\left[L_k^{-1}(E) - L_k(E)\right]$, $k = 1, \ldots, m$ и $x_0 = \log(\tau^{-1/2} - \tau^{1/2})$. Функция

$$\Psi(x) = \log\left\{\frac{1}{2}\left[e^x + \sqrt{e^{2x}+4}\,\right]\right\}$$

является возрастающей и выпуклой вниз на вещественной оси. Поэтому, с учетом (5),

$$\Psi(x_0) \leq \Psi\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k\right) \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\Psi(x_k).$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим требуемое неравенство. Следствие доказано.

При $m = 2$ следствие 1 можно получить из дискретной версии гиперболической емкости, установленной Цудзи, а также из симметризации Штейнера (см. [6, с. 11, 19]).

Следствие 2. *Если континуум $E \subset U$ соединяет точку $z \in U$ с радиусом $[0, -z/|z|]$, то*

$$|z| \leq \tau,$$

где τ – решение уравнения (6) с $m = 1$. Если z_k, $k = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$, – произвольные точки континуума $E \subset U$, лежащие соответственно на m лучах, исходящих из точки $z = 0$ под равными углами, то

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} |z_k|} \leq \tau^{1/m},$$

где τ удовлетворяет (6). Равенство имеет место для континуумов E, состоящих из m прямолинейных отрезков одинаковой длины, исходящих из точки $z = 0$ под равными углами и соединяющих начало координат с точками z_k, $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Можно считать, что точки z_k, $k = 1, \ldots, m$, расположены на лучах $\arg z^m = 0$, где в первом случае полагаем $z_1 = z$. Осталось заметить, что $|z_k|^{m/2} \leq L_k(E)$, $k = 1, \ldots, m$.

При $m = 2$ выписанный результат восходит к Кубо [11].

Предельным переходом из неравенств для гиперболической емкости вытекают неравенства для логарифмической емкости $\operatorname{cap} E$ компакта E. Рассмотрим этот переход подробнее. Пусть E – произвольный компакт ненулевой емкости, B – связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \backslash E$, содержащая бесконечно удаленную точку, и пусть для достаточно малого $r > 0, E(r) = \{z : z/r \in E\}$. Конденсаторы $C(r) = (B, \{\partial B, D(\infty, r)\}, \{0, 1\})$ и $\widetilde{C}(r) = (\mathbb{C}, \{E(r), D(\infty, 1)\}, \{0, 1\})$, имеют одинаковую емкость. Учитывая формулу (1), получаем

$$-\frac{1}{2\pi} \log \operatorname{cap}_h E(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r - \frac{1}{2\pi} \log \operatorname{cap} E + o(1), \qquad r \to 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{cap}_h E(r) = r \operatorname{cap} E + o(r), \qquad r \to 0. \tag{7}$$

Следствие 1 дает

$$r^{m/2}\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E)} = \sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E(r))} \leq \sqrt{\tau},$$

где τ – решение уравнения (6) с заменой левой части на $\operatorname{cap}_h E(r)$. Ввиду (7),

$$(r\operatorname{cap} E + o(r))^{m/2} = \exp\left[-\frac{\pi}{4}\ \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2}\ )}{\mathbf{K}(\tau)}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\,(1+o(1)).$$

Окончательно приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} E \geq \sqrt[m]{\frac{1}{4}\prod_{k=1}^{m} L_k^{2/m}(E)}.$$

При $m = 2$ данный результат восходит к Полиа [1, с. 294]. Привлекая дополнительно теорему Фекете [1, с. 290], из следствия 3 получаем

Следствие 4. *Пусть $P(z) = z^n + \dots$ – полином степени $n \geq 1$, и пусть $E(P) = \{z : P(z) \in [0, 1]\}$. Тогда*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} L_k(E(P))}\ \leq 2^{1-m/n}.$$

Равенство имеет место в случае целого n/m и

$$P(z) = \frac{1}{2}\left[T_{n/m}(2^{2m/n-1}z^m - 1) + 1\right] = z^n + \dots,$$

где $T_{n/m}(\zeta)$ – полином Чебышева.

Следствие 5 [6, с. 44]**.** *Если z_k, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, – произвольные точки ограниченного континуума E, лежащие соответственно на m лучах, исходящих из точки $z = 0$ под равными углами, то*

$$\operatorname{cap} E \geq \sqrt[m]{\frac{1}{4}\prod_{k=1}^{m} |z_k|}$$

со случаем равенства, описанным в следствии 2.

Данное утверждение вытекает из следствия 3 и включает в себя ряд известных ранее результатов о покрытии отрезков и площадей (см. [6, с. 56–57]).

Неравенства для логарифмической емкости можно получить непосредственно из теорем 1–3 и формулы 1 (без рассмотрения гиперболической емкости). Покажем это на примере одного результата, анонсированного в работе [6, теорема 2.9] и ошибочно принятого за утверждение Клейна [12] в недавном обзоре (см. [10, с. 257]).

Теорема 5. *Пусть E – замкнутое подмножество единичной окружности $|z|=1$, и пусть l_k – линейная мера пересечения E с углом $B_k=\{z=re^{i\theta}:0<r<\infty,\ |\theta-2\pi k/m|<\pi/m\}$, $k=1,\dots,m$. Тогда*

$$\operatorname{cap} E \geq \prod_{k=1}^{m}\left[\sin(ml_k/4)\right]^{2/m^2}.$$

Равенство имеет место в случае четного m и множества E, состоящего из $m/2$ равных дуг с центрами в точках $\exp(i(\pi/m+4\pi k/m))$, $k=1,\dots,m/2$.

Доказательство. Можно считать, что множества E и $E\bigcap\overline{B}_k$ состоят из конечного числа невырожденных дуг окружности $|z|=1$, $k=1,\dots,m$. Для достаточно малого $r>0$ рассмотрим конденсаторы

$C(r)=(\mathbb{C}_z\setminus E,\{E,D(\infty,r)\},\{0,1\})$;

$C_k(r)=(B_k,\{E\bigcap\overline{B}_k,D(\infty,r)\bigcap\overline{B}_k\},\{0,1\})$;

$C_k^*(r)=(\mathbb{C}_\zeta,\{E_k,D(\infty,r^{m/2})\},\{0,1\})$,

где E_k – объединение образа множества $E\bigcap\overline{B}_k$ при отображении функцией $\zeta=iz^{m/2}$ ($z\in B_k$, $\operatorname{Im}\zeta>0$) с его отражением относительно вещественной оси;

$SC_k^*(r)$ – результат круговой симметризации конденсатора $C_k^*(r)$ относительно вещественной положительной полуоси. Всюду выше индекс k изменяется от 1 до m.

По формуле (1),

$$\operatorname{cap} C(r)=-\frac{2\pi}{\log r}+2\pi\log\operatorname{cap} E\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\quad r\to 0.$$

Из теоремы 2 следует

$$\operatorname{cap} C(r) \geq \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap} C_k(r).$$

Ввиду конформной инвариантности емкости и теоремы 1 имеем

$$\operatorname{cap} C_k(r) = \frac{1}{2} \operatorname{cap} C_k^*(r), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Согласно теореме Полиа–Сеге о круговой симметризации [5],

$$\operatorname{cap} C_k^*(r) \geq \operatorname{cap} SC_k^*(r), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Вновь по формуле (1)

$$\operatorname{cap} SC_k^*(r) =$$

$$= -\frac{4\pi}{m \log r} + \frac{8\pi}{m^2} \left[\log \sin(ml_k/4)\right] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\Big(\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2\Big), \quad r \to 0.$$

Мы воспользовались тем фактом, что логарифмическая емкость дуги длины l равна $\sin(l/4)$. Суммируя выписанные соотношения и переходя к пределу при $r \to 0$, получаем требуемое неравенство. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Остается нерешенной задача, поставленная в работе [6, задача 7.2]: в условиях теоремы 5 найти точную оценку снизу логарифмической емкости $\operatorname{cap} E$ при нечетных m.

Рассматриваемый подход позволяет установить аналогичные оценки, а также оценки сверху для логарифмической емкости, гиперболической емкости, емкости Робена и гиперболической емкости Робена [13, 14]. В качестве простого примера приведем следующий результат, инициированный работой [15].

Теорема 6. *Пусть* $0 < r_1 < r_2 < 1$, E *– объединение* m *замкнутых дуг окружности* $|z| = r_2$ *суммарной длины* l *и* $E_m^* = \{z : |z| = r_2, |\arg z^m| \leq l/(2r_2)\}$ *– симметричное множество той же длины. Пусть* $\delta(E)$ *– емкость Робена множества* E *относительно области* $\Omega(E) = \{z : |z| > r_1, z \notin E\}$ *и* $\delta_h(E)$ *– гиперболическая емкость Робена множества* E *относительно* $\Omega(E) \bigcap U$. *Тогда справедливы неравенства:*

$$1) \qquad \delta(E) \leq \delta(E_m^*),$$

$$2) \qquad \delta_h(E) \leq \delta_h(E_m^*).$$

Доказательство. Аналогичные неравенства для логарифмической и гиперболической емкостей доказаны Халисте [15] методом диссимметризации [6]. Этот же прием приводит к доказательству неравенств 1) и 2). Действительно, все виды рассматриваемых емкостей множеств связаны с емкостями соответствующих конденсаторов и, в частности, для множества E и конденсаторов $C(r,E) = (\Omega(E), \{E, D(\infty, r)\}, \{0,1\})$ и $C(E) = (\Omega(E) \bigcap U, \{E, \{z : |z| = 1\}\}, \{0,1\})$ имеем

$$\operatorname{cap} C(r,E) = \\ = -\frac{2\pi}{\log r} + 2\pi \log \delta(E) \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0, \qquad (8)$$

$(\operatorname{cap} C(E))^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \log \delta_h(E)$ (см. [14] и формулу (1)). Следовательно, доказательство неравенств 1) и 2) сводится к доказательству неравенств между емкостями конденсаторов. Последнее проводится единым образом для обоих случаев и, поэтому, достаточно рассмотреть неравенство 1). Пусть u^* – потенциальная функция конденсатора $C(r, E_m^*)$, т.е. функция u^* непрерывна в $\overline{\Omega(E)}$, гармоническая в $\Omega(E) \backslash D(\infty, r)$, равна нулю на E, единице на $D(\infty, r)$, и $\partial u^* / \partial n = 0$ на окружности $|z| = r_1$. Тогда результат подходящей диссимметризации функции u^*, т.е функция $v = \operatorname{Dis} u^*$ (см. [6, лемма 1.5; 15], является допустимой для конденсатора $C(r,E)$, причем $I(u^*, \Omega(E_m^*)) = I(v, \Omega(E))$. Отсюда

$$\operatorname{cap} C(r, E_m^*) \geq \operatorname{cap} C(r, E),$$

и завершает доказательство применение асимптотической формулы (8). Теорема доказана.

Краткость приведенного доказательства не означает тривиальность рассматриваемой задачи. Например, методы доказательства, использующие значения экстремальных емкостей, встречают здесь существенные трудности. В случае логарифмической емкости имеем простую формулу $\operatorname{cap} E_m^* = (\sin(l/4))^{1/m}$. Однако уже для гиперболической емкости вычисление величины $\operatorname{cap}_h E_m^*$ (или, что то же самое, емкости конденсатора, пластины которого суть дуги концентрических окружностей) весьма громоздко [16]. Еще более сложным является вычисление величин $\delta(E_m^*)$ и $\delta_h(E_m^*)$. Напомним, что даже в случае логарифмической емкости задача об оценке емкости сверху долгое время оставалось нерешенной (см. [15]).

§4. Задачи об экстремальном разбиении

Указанные в заглавии задачи более или менее непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций [17]. Значительные результаты в решении такого рода задач получены в работах представителей петербуржской математической школы: Г. М. Голузина, Н. А. Лебедева, Ю. Е. Аленицына, Г. В. Кузьминой и других математиков. Исследования в данном направлении продолжаются до сих пор [17–19]. Некоторые успехи в решении задач об экстремальном разбиении достигнуты также с помощью разделяющего преобразования конденсаторов [6] (или, как показано в §2, с помощью принципов симметрии и композиции). Из последних приложений разделяющего преобразования отметим часть работ А. К. Бахтина [20–23]. В данном параграфе обсуждаются новые аспекты приложений емкостей конденсаторов к указанным задачам. К числу классических вопросов теории функций относится задача о максимуме произведения

$$\prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_k}(D_k, a_k) \tag{9}$$

по всевозможным попарно нерересекающимся односвязным областям D_k, содержащим заданные точки $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$. Наряду с известными обобщениями этой задачи [17] представляется интересным рассмотреть также задачи с новыми ограничениями на "свободные полюсы" a_k, $k = 1, \dots, m$; задачи о произведении степеней внутренних радиусов с некоторыми весами; задачи, где в произведении (9) внутренние радиусы $r(D_k, a_k)$ заменяются на величины $r(D_k, \Gamma_k, a_k)$, $k = 1, \dots, m$; задачи аналогичного типа, учитывающие последующие члены в асимптотическом разложении функции Грина. Сказанное в заключении требует подробного пояснения. Напомним, что для произвольной области D, имеющей функцию Грина $g_D(z, \zeta)$, выполняется $\log r(D, a) = h_D(a, a)$, где $h_D(z, \zeta) = g_D(z, \zeta) + \log|z - \zeta|$ – регулярная часть функции Грина. Таким образом, задача о максимуме произведения (9) равносильна задаче о максимуме

суммы
$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k h_{D_k}(a_k, a_k).$$

Желая рассмотреть характеристику, учитывающую в разложении функции Грина бесконечно малые более высокого порядка, введем симметричную разность
$$H(D, z, \zeta) = h_D(z, z) + h_D(\zeta, \zeta) - 2h_D(z, \zeta).$$

Можно показать, что для любой точки $z_0 \in D$ и для любого вещественного числа φ существует предел (см. [24])
$$\lim_{\rho \to 0} H(D, z_0 - \rho e^{i\varphi}, z_0 + \rho e^{i\varphi})/\rho^2 := -4\pi K(D, z_0, \varphi),$$

причем
$$K(D, z_0, \varphi) = K(z_0, \overline{z}_0) - \operatorname{Re}[e^{2\varphi i} l(z_0, z_0)],$$

где $K(z, \overline{\zeta})$ и $L(z, \zeta) = 1/[\pi(z-\zeta)^2] - l(z, \zeta)$ – известные в теории функций ядра, построенные по функции Грина $g(z, \zeta) \equiv g_D(z, \zeta)$:
$$K(z, \overline{\zeta}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \overline{\zeta}}, \qquad L(z, \zeta) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta}$$

(см. [25]) (в отличие от [24] мы несколько изменили обозначение величины $K(D, z_0, \varphi)$). Величина $K(D, z_0, \varphi)$ неотрицательная и не возрастает при расширении области D. Естественно рассмотреть задачу о минимуме суммы
$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k K(D_k, a_k, \varphi_k)$$

по всевозможным попарно непересекающимся областям D_k и при некоторых ограничениях на α_k, a_k и φ_k, $k = 1, \ldots, m$.

Приведем примеры решения указанных выше задач в конкретных постановках. Ранее с помощью разделяющего преобразования конденсаторов было показано, что для любых различных точек a_k, $k = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$, окружности $|z| = 1$ и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $k = 1, \ldots, m$, справедливо неравенство
$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{m}\right)^m \tag{10}$$

с равенством в случае $a_k = \exp(2\pi ik/m)$ и $D_k = \{z : |\arg z - 2\pi k/m| < \pi/m\}$, $k = 1, \dots, m$ (см. [6, теорема 2.17]). Привлекая дробно-линейное отображение $z = (1 - i\zeta)/(1 + i\zeta)$, переходящее вещественную ось в окружность $|z| = 1$, получаем отсюда следующее утверждение: для любых различных точек a_k на вещественной оси и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}_\zeta$, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, выполняется точная оценка

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{r(D_k, a_k)}{1 + a_k^2} \leq \left(\frac{2}{m}\right)^m .$$

Полагая здесь λa_k вместо a_k, где λ – любое положительное число, легко приходим к точному неравенству для произведения внутренних радиусов неналегающих областей в случае, когда точки a_k принадлежат заданному отрезку. Сказанное выше дополняет

Теорема 7. *Пусть точки a_k, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 1$, принадлежат интервалу $(-1, 1)$; области D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются, и пусть дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k$ содержит некоторый континуум, соединяющий точки -1 и 1. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{r(D_k, a_k)}{\sqrt{1 - a_k^2}} \leq \left(\frac{2}{m}\right)^m .$$

Равенство имеет место в случае, когда $a_k = \cos[\pi(2k - 1)/(2m)]$, $k = 1, \dots, m$, и области D_k ограничены кривыми $\{z = (\zeta + 1/\zeta)/2 : \zeta^{2m} \in [0, 1]\}$.

Доказательство. Желая упростить выкладки, воспользуемся неравенством (10) (без повторного привлечения емкостей конденсаторов). Можно считать, что дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k$ содержит жорданову кривую γ, соединяющую точки -1 и 1. Обозначим через f_1 и f_2 различные ветви функции, обратной функции Жуковского $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$ в односвязной области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Так как области $f_j(\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma)$, $j = 1, 2$, не пересекаются, то области $f_j(D_k)$, $j = 1, 2$, $k = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются, причем

$$r(f_j(D_k), f_j(a_k)) = r(D_k, a_k)/\sqrt{1 - a_k^2}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, m.$$

Применяя неравенство (10), получаем

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{r^2(D_k, a_k)}{1-a_k^2} = \prod_{j=1}^{2} \prod_{k=1}^{m} r\Big(f_j(D_k),\, f_j(a_k)\Big) \le \left(\frac{4}{2m}\right)^{2m}.$$

Случай равенства вытекает из равенства в (10). Теорема доказана.

Заметим, что если области D_k, $k = 1, \dots, m$, односвязные, попарно непересекающиеся и несодержащие точек -1, 1, то они удовлетворяют условиям теоремы 7.

Следствие 6. *Для любых различных точек a_k, $k = 1, \dots, m$, $m \ge 1$, на вещественной положительной полуоси, и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \dots, m$, для которых дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k$ содержит некоторый континуум, соединяющий точки 0 и ∞, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{r(D_k, a_k)}{(1+a_k)\sqrt{a_k}} \le \left(\frac{2}{m}\right)^{m}.$$

Равенство достигается для точек $a_k = \operatorname{ctg}^2[\pi(2k-1)/(4m)]$, $k = 1, \dots, m$, и областей D_k, ограниченных кривыми $\{z = -(\zeta+1)^2(\zeta-1)^{-2} : \zeta^{2m} \in [0,1]\}$.

Доказательство вытекает из теоремы 7 с привлечением дробно-линейного отображения $z = (\zeta-1)/(\zeta+1)$, переводящего вещественную положительную полуось в интервал $(-1, 1)$.

Нерешенная задача: найти максимум произведения (9) при $\alpha_k = 1$, $k = 1, \dots, m$, по всевозможным неналегающим областям $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, и точкам $a_k \in D_k \cap [-1, 1]$, $k = 1, \dots, m$, $m > 4$.

Теорема 8. *Пусть точки a_k, $k = 1, \dots, m$, $m \ge 2$, принадлежат окружности $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$; области D_k, $a_k \in D_k \subset U$, $k = 1, \dots, m$, односвязные и попарно непересекающиеся; и пусть замкнутые множества $\Gamma_k, \Gamma_k \subset \partial D_k$, $k = 1, \dots, m$, такие, что для каждого k множество $(\partial D_k)\setminus\Gamma_k$ либо пусто, либо представляет собой дугу окружности $|z| = 1$, $k = 1, \dots, m$. Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, \Gamma_k, a_k) \le \prod_{k=1}^{m} r(D_k^*, \Gamma_k^*, a_k^*) = \left(\frac{4\rho}{m}\ \frac{1+\rho^m}{1-\rho^m}\right)^{m}, \tag{11}$$

где

$$a_k^* = \rho \exp(2\pi i k/m), \quad D_k^* = \{z \in U : |\arg z - 2\pi k/m| < \pi/m\},$$

и $\Gamma_k^* = \{z : z^m \in [-1, 0]$, $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. При достаточно малых $r > 0$ введем конденсаторы $C_k^*(r) = \big(D_k^*, \{\Gamma_k^*, D(a_k^*, r)\}, \{0, 1\}\big)$, емкость которых по формуле (1) равна

$$\operatorname{cap} C_k^*(r) =$$

$$= -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi \left[\log r(D_k^*, \Gamma_k^*, a_k^*)\right] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0,$$

$k = 1, \ldots, m.$ Обозначим через u^* непрерывную функцию в $U \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} D(a_k^*, r)$, симметричную относительно лучей $\arg z^{2m} = 0$, гармоническую в $D_k^* \backslash D(a_k^*, r)$, равную единице на отрезках $[0, (\rho - r)a_k^*/|a_k^*|]$, нулю на отрезках $[(\rho + r)a_k^*/|a_k^*|,\ a_k^*/|a_k^*|]$ и на окружности $|z| = 1$ и такую, что $\partial u^*/\partial n = 0$ на $\partial D(a_k^*, r)$ и во внутренних точках Γ_k^*, $k = 1, \ldots, m$. Легко видеть, что

$$I\big(u^*, D_k^* \backslash D(a_k^*, r)\big) = 4/\operatorname{cap} C_k^*(r), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Пусть $v = \operatorname{Dis} u^*$ – результат диссимметризации функции u^*, переводящей точки a_k^* в точки a_k, $k = 1, \ldots, m$ [6]. Тогда

$$I\Big(u^*, U \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D(a_k^*, r)\Big) =$$

$$= I\Big(v, U \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D(a_k, r)\Big) \geq \sum_{k=1}^{m} I\big(v, D_k \backslash D(a_k, r)\big).$$

Отобразим область D_k посредством функции g_k конформно и однолистно на круг U_w так, чтобы $g_k(a_k) = 0$, $g_k'(a_k) > 0$. Пусть $r_k = r_k(r)$ вещественная функция, удовлетворяющая условиям $D(0, r_k(r)) \supset g_k(D(a_k, r))$, $r_k(r) \sim g_k'(a_k) r$, $r \to 0$; и пусть v_k^* – результат круговой симметризации функции $v_k(w) = v(g_k^{-1}(w))$ в кольце $r_k(r) \leq |w| \leq 1$ относительно вещественной положительной полуоси [6]. Из конформной инвариантности интеграла Дирихле, свойств круговой симметризации и принципа Дирихле последовательно имеем

$$I\big(v, D_k \backslash D(a_k, r)\big) = I\big(v_k, \{w : r_k(r) < |w| < 1\}\big) \geq$$

$$\geq I\big(v_k^*, \{w : r_k(r) < |w| < 1\}\big) \geq I\big(u_k, \{w : r_k(r) < |w| < 1\}\big) = \\ = 4/\operatorname{cap} C_k(r),$$

где функция u_k непрерывна в $r_k(r) \leq |w| \leq 1$, гармоническая в $r_k(r) < |w| < 1$, равная единице на отрезке $[r_k(r), 1]$, нулю на отрезке $[-1, -r_k(r)]$ и на дуге окружности $|w| = 1$ с центром в точке $z = -1$ и длины, равной длине дуги $g_k((\partial D_k)\backslash\Gamma_k)$ (при некоторых k такая дуга может вырождаться в точку), $\partial u_k/\partial n = 0$ на оставшейся части окружности $|w| = 1$ и на окружности $|w| = r_k(r)$; $C_k(r) = \big(U_w, \{g_k(\Gamma_k), D(0, r_k(r))\},\ \{0,1\}\big)$, $k = 1, \dots, m$. Вновь по формуле (1)

$$\operatorname{cap} C_k(r) = -\frac{2\pi}{\log r_k(r)} - 2\pi\left[\log r(U_w, g_k(\Gamma_k), 0)\right]\left(\frac{1}{\log r_k(r)}\right)^2 + \\ + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Суммируя выписанные соотношения и учитывая тот факт, что

$$r(D_k, \Gamma_k, a_k)\, g_k'(a_k) = r(U_w, g_k(\Gamma_k), 0), \quad k = 1, \dots, m,$$

получаем неравенство в (11). Для проверки равенства в правой части (11) отобразим сектор D_k^* функцией

$$\zeta = \zeta(z) = \frac{z^m}{(1 + z^m)^2}$$

конформно и однолистно на ζ-плоскость с разрезами по вещественной оси вдоль лучей $[-\infty, 0]$ и $[1/4, +\infty]$. Тогда

$$r(D_k^*, \Gamma_k^*, a_k^*)|\zeta'(a_k^*)| = r(\overline{\mathbb{C}}_\zeta\backslash[-\infty, 0], \rho^m(1+\rho^m)^{-2}) = 4\rho^m(1+\rho^m)^{-2},$$

что приводит к требуемому равенству. Теорема доказана.

Способ доказательства теоремы 8 позволяет распростанить ее на случай попарно непересекающихся областей в круговом кольце.

Следующее утверждение восходит к более общему результату Ю. Е. Аленицына [26]. Приведем альтернативное доказательство этого частного случая с применением емкостей конденсаторов (ср. [26, с. 5–7]).

Утверждение 6. *Для любых попарно непересекающихся областей* D_k, *точек* a_k, $a_k \in D_k$, *положительных чисел* α_k *и вещественных чисел* φ_k, $k = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k K(D_k, a_k, \varphi_k) \geq \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m} \frac{\sqrt{\alpha_k \alpha_l}\ e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(a_k - a_l)^2}.$$

Доказательство. Можно считать, что каждая область D_k имеет классическую функцию Грина $k = 1, \ldots, m$. При достаточно малых $r > 0$ и $\rho > 0$ рассмотрим конденсатор $C(r,\rho) = (\overline{\mathbb{C}}, \{D(a_1 - \rho e^{i\varphi_1}, r), \ldots, D(a_m - \rho e^{i\varphi_m}, r), D(a_1 + \rho e^{i\varphi_1}, r), \ldots, D(a_m + \rho e^{i\varphi_m}, r)\}, \{-\sqrt{\alpha_1}, \ldots, -\sqrt{\alpha_m}, \sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_m}\})$ и конденсаторы $C_k(r,\rho) = (D_k, \{\partial D_k, D(a_k - \rho e^{i\varphi_k}, r), D(a_k + \rho e^{i\varphi_k}, r)\}, \{0, -\sqrt{\alpha_k}, \sqrt{\alpha_k}\})$, $k = 1, \ldots, m$. Если области D_k расширить так, чтобы они по-прежнему не пересекались и $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{D}_k = \overline{\mathbb{C}}$, то емкости конденсаторов $C_k(r,\rho)$ разве лишь уменьшатся и из теоремы 3 следует

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{cap}\, C_k(r,\rho) \geq \mathrm{cap}\, C(r,\rho). \tag{12}$$

Формула (1) дает

$$\mathrm{cap}\, C_k(r,\rho) = 4\pi\alpha_k \left(-\frac{1}{\log r}\right) - 2\pi\alpha_k [2\log(2\rho) + H(D_k, a_k - \rho e^{i\varphi_k},$$

$$a_k + \rho e^{i\varphi_k})] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Привлекая формулу (2), получаем

$$\mathrm{cap}\, C(r,\rho) = 4\pi \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right] \left(-\frac{1}{\log r}\right) - 2\pi \left\{ \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right] 2\log(2\rho) - \right.$$

$$\left. - 4\mathrm{Re} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m} \frac{\sqrt{\alpha_k \alpha_l}\, e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(a_k - a_l)^2}\ \rho^2 + o(\rho^2) \right\} \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),$$

$$r \to 0, \quad \rho \to 0.$$

После подстановки этих асимптотических разложений емкостей в (12) и предельных переходов последовательно при $r \to 0$ и затем $\rho \to 0$ приходим к требуемому неравенству. Утверждение доказано.

Следствие 7 ([26]). *В условиях утверждения 6 для любых комплексных чисел β_k, $k = 1, \dots, m$, справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 l(a_k, a_k) + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m} \frac{\beta_k \beta_l}{(a_k - a_l)^2} \right| \le \sum_{k=1}^{m} \beta_k \overline{\beta}_k K(a_k, \overline{a}_k),$$

где $K(z, \overline{a}_k)$, $l(z, a_k)$ – ядра Бергмана первого и второго рода области D_k относительно класса всех функций, регулярных и с интегрируемым квадратом модуля в ней, $k = 1, \dots, m$.

Доказательство вытекает из утверждения 6, где необходимо положить $\alpha_k = |\beta_k|^2$, $\varphi_k = \arg \beta_k + \theta$, $k = 1, \dots, m$, и воспользоваться произвольностью θ.

В заключение отметим следующие факты, касающиеся задач об экстремальном разбиении со "свободными полюсами" и вытекающие из свойств емкостей конденсаторов. Из теоремы 5 работы [27] следует, что для любых различных точек a_k, $k = 1, \dots, m$, $m \ge 2$, окружности $|z| = 1$ и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \dots, m$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} K(D_k, a_k, \arg a_k) \ge \frac{1}{24\pi}\, m(m^2 + 2)$$

с равенством как в случае (10). Привлекая дробно-линейное отображение и формулы преобразования ядер Бергмана П 2.44 и П 2.45 из работы [25], приходим к неравенству

$$\sum_{k=1}^{m} (1 + a_k^2)^2 K\left(D_k, a_k, \frac{\pi}{2}\right) \ge \frac{1}{3\pi} m(m^2 + 2) 2^{2m-3},$$

справедливому для любых точек a_k на вещественной оси и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \dots, m$, $m \ge 2$. Можно показать также, что для величин $K(D_k, a_k, \pi/2)$ имеет место утверждение, аналогичное теореме 7 для внутренних радиусов $r(D_k, a_k)$, причем без условия существования континуума, соединяющего точки -1 и 1 и лежащего в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k$.

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд. М, 1966.
2. В. Н. Дубинин, *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 38–51.
3. В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, *Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 52–75.
4. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
5. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, М., 1962.
6. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
7. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций*, Изд-во Дальневост. ун-та, Владивосток, 2003.
8. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, М., 1969.
9. M. Ohtsuka, *Dirichlet problem, extremal length, and prime ends*, Van Nostrand, New York, 1970.
10. S. Kirsch, *Transfinite diameter, Chebyshev constant and capacity*, Handbook of complex analysis: Geometric function theory. Vol. **2**, 243–308, Elsevier, Amsterdam, 2005.
11. T. Kubo, *Some theorems on analytic functions in an annulus*, Jap. J. Math. **29** (1959), 43–47.
12. M. Klein, *Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping*, Pacific. J. Math. **22** No. 2 (1967), 267–279.
13. P. Duren, *Robin capacity*, Computational methods and function theory 1997 (Nicosia), 177–190, Ser. Approx. Decompos., **11** World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999.
14. P. Duren, J. Pfaltzgraff, *Hyperbolic capacity and its distortion under conformal mapping*, J. Anal. Math. **78** (1999), 205–218.
15. K. Haliste, *On an extremal configuration for capacity*, Arkiv for Mat. **27** (1989), 97–104.
16. D. Karp, *Capacity of the condenser whose plates are circular arcs*, Complex Variables **50**, No. 2 (2005), 103–122.
17. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций*, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 5 (1997), 1–50.
18. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы*, I, II, III, Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275; **286** (2002), 126–147; **314** (2004), 124–141.
19. Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 52–67.

20. А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский, *Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах*, Допов. НАН України **7** (2004), 7–13.
21. А. К. Бахтин, *Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах*, Допов. НАН України **12** (2004), 7–13.
22. А. К. Бахтин, *Оценки некоторых функционалов для открытых множеств*, Нелінійні коливання **8**, No. 2 (2005), 147–153.
23. А. К. Бахтин, *Экстремальные задачи со свободными полюсами на окружности*, Допов. НАН України **5** (2005), 7–10.
24. В. Н. Дубинин, *Симметризация, функция Грина и конформные отображения*, Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 80–92.
25. М. Шиффер, *Некоторые новые результаты в теории конформных отображений*. Приложение к кн.: Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М, 1953, 234–301.
26. Ю. Е. Аленицын, *Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **94** (1968), 4–18.
27. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения*, Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 23 марта 2005 г.