Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Н. Ю. Додонов, В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина

Работа состоит из двух параграфов.

В §1 для двумерного случая получены новые аппроксимативные характеристики для функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности для пространств L_p периодических (по каждой переменной) функций.

Примером установленных здесь предложений может служить следующее утверждение.

Пусть C – пространство непрерывных 2π-периодических (по каждой переменной) функций двух переменных с равномерной нормой,

$$\omega(f,u,v) = \sup_{|t|\leqslant u, |h|\leqslant v} \|f(x+t,y+h) - f(x,y)\|$$

– модуль непрерывности функции f,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

– ядро Фейера,

$$\sigma^*_{n,m}(f,x,y) = 4\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi f(x+u,y+v)\Phi_n(u)\Phi_m(v)du\,dv.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 05-01-00742.

Тогда выполнение совокупности соотношений

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\pi n}{2\ln n} \varlimsup_{m\to\infty} \|f-\sigma^*_{n,m}(f)\| \leqslant K,$$
$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{\pi m}{2\ln m} \varlimsup_{n\to\infty} \|f-\sigma^*_{n,m}(f)\| \leqslant L$$

равносильно выполнению неравенства

$$\omega(f,u,v) \leqslant Ku + Lv \quad (u,v\in\mathbb{R}_+).$$

Ранее аналогичные результаты для одномерного случая были установлены в работе [1], содержащейся в данном сборнике.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, L_p – пространство 2π-периодических функций с естественной нормой. Для величины

$$\beta_n(f)_p = \|f - \int\limits_{\pi}^{\pi} f(\cdot+t)\Phi_n(t)dt\|_p$$

(т.е. для отклонений интеграла Фейера от приближаемой функции) получены (см., например, [2, с. 261, 262, 266]) двусторонние оценки в терминах модулей непрерывности, совпадающие с точностью до числовых множителей. Что касается величины

$$\alpha_n(f)_p = \|f - \int\limits_{0}^{\pi} f(\cdot+t)2\Phi_n(t)dt\|_p,$$

возникающей при описании функций класса Липшица первого порядка в пространстве L_p, то она еще подлежит изучению. В §2 для случая пространства L_2 получены двусторонние оценки для величины $\alpha_n(f)_2$ в терминах наилучших приближений и дано их сравнение с аналогичными результатами для $\beta_n(f)_2$. В ситуации, когда $p \neq 2$, авторам не удалось получить существенного продвижения и она в работе не рассматривается.

§1. Аппроксимативные характеристики функций, входящих в классы насыщения модулей непрерывности

1. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел, $Q = [-\pi,\pi]$. Если A – некоторое множество, то $A^m = A\times A\times\cdots\times A$

(m раз). Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Запись $k = \overline{a,b}$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. По определению,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k + d_{-k}).$$

Через $C_k(\cdot)$ обозначаем положительные конечные постоянные, зависящие только от тех аргументов, которые будут выписаны. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. При $1 \leqslant p < \infty$ через $L_p(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_{p,E} = \left(\int\limits_E |f|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_\infty(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_{\infty,E} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in E} |f(x)| < \infty.$$

Если $E = Q^n$, то функции, входящие в $L_p(Q^n)$, считаются 2π-периодическими по каждой переменной; $C(Q^n)$ – пространство непрерывных, 2π – периодических по каждой переменной функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{Q^n} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда $K(A)$ – множество функций $\psi \in L_\infty(A)$ таких, что $\psi(t) \geqslant 0$ при $t \in A$, $\int\limits_A \psi = 1$. Для $\psi \in K(A)$ при $r \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\alpha_r(\psi) = |\int\limits_A t^r \psi(t) dt|, \quad \beta_r(\psi) = \int\limits_A |t|^r \psi(t) dt.$$

Пусть $f \in L_1(Q^2)$; $k, l \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\!\!\int\limits_{Q^2} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx\, dy$$

– коэффициенты Фурье функции f;

$$\sigma_{n,m}(f,x,y)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\left(1-\frac{|l|}{m}\right)c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}$$

– суммы Фейера функции f;

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

– ядро Фейера. Суммы Фейера $\sigma_{n,m}(f)$ могут быть записаны в виде

$$\sigma_{n,m}(f,x,y)=\iint\limits_{Q^2} f(x+u,y+v)\Phi_n(u)\Phi_m(v)du\,dv.$$

Условимся в дальнейшем в тех случаях, когда нет опасности недоразумений, писать обозначения в сокращенной форме. Так, например, в упомянутых случаях вместо $\sigma_{n,m}(f,x,y)$ может быть написано $\sigma(x,y)$ и т.д.

2. Нам понадобится следующая известная теорема.

Теорема A (см., например, [3, с. 52, 53])**.** . *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L_p(Q^2)$ *при* $1\leqslant p<\infty$, $f\in C(Q^2)$ *при* $p=\infty$. *Тогда*

$$\lim_{\min\{n,m\}\to+\infty}\|f-\sigma_{n,m}(f)\|_{p,Q^2}=0.$$

Теорема 1. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$, $E_1=[a,b]$, $E_2=[c,d]$; $\varphi_n\in K(E_1)$, $\psi_m\in K(E_2)$ *при* $n,m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1(\varphi_n)\neq 0$, $\alpha_1(\psi_m)\neq 0$ *при* $n,m\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_2(\varphi_n)}{\alpha_1(\varphi_n)}=\lim_{m\to\infty}\frac{\beta_2(\varphi_m)}{\alpha_1(\varphi_m)}=0;$$

$$U_{n,m}(f,x,y)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x+u,y+v)\varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv,$$

$f\in L_p(Q^2)$. *Тогда при любых* $r,s\in\mathbb{N}$

$$\|(\sigma_{r,s}(f,x,y))'_x\|_{p,Q^2}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(\alpha_1(\varphi_n))^{-1}\varliminf_{m\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_{p,Q^2},$$

$$\|(\sigma_{r,s}(f,x,y))'_y\|_{p,Q^2} \leqslant \varliminf_{m\to\infty} (\alpha_1(\psi_m))^{-1} \varliminf_{n\to\infty} \|f-U_{n,m}(f)\|_{p,Q^2}.$$

Доказательство. Так как для любой $f\in L_p(Q^2)$

$$\|\sigma_{r,s}(f)\|_{p,Q^2} \leqslant \|f\|_{p,Q^2},$$

то при $r,s\in\mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned}\|\sigma_{r,s}(f)-U_{n,m}(\sigma_{r,s}(f))\|_p &= \|\sigma_{r,s}(f)-\sigma_{r,s}(U_{n,m}(f))\|_p\\ &= \|\sigma_{r,s}(f-U_{n,m}(f))\|_p \leqslant \|f-U_{n,m}(f)\|_p. \qquad (1)\end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и неравенство $\|g\|_{p,Q^2}\leqslant(2\pi)^{2/p}\|g\|_{\infty,Q^2}$, справедливое для любой функции $g\in L_\infty(Q^2)$, нетрудно понять, что

$$\sigma_{r,s}(f,x+u,y+v)-\sigma(x,y)-\sigma'_x(x,y)u-\sigma'_y(x,y)v = t_{r,s}(x,y,u,v),$$

где

$$\begin{aligned}\|t_{r,s}(x,y,u,v)\|_{p,Q^2} \leqslant (2\pi)^{2/p}\Bigg\{&\frac{\|\sigma''_{x^2}(f)\|_\infty}{2}u^2\\ &+\|\sigma''_{xy}(f)\|_\infty|u|\,|v|+\frac{\|\sigma''_{y^2}(f)\|_\infty}{2}v^2\Bigg\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\sigma_{r,s}(f)-U_{n,m}(\sigma_{r,s}(f))\|_p &\geqslant \|\sigma'_x(\cdot)\alpha_1(\varphi_n)+\sigma'_y(\cdot)\alpha_1(\psi_m)\|_p\\ &-\frac{(2\pi)^{2/p}}{2}\{\|\sigma''_{x^2}\|_\infty\beta_2(\varphi_n)+2\|\sigma''_{xy}\|_\infty\beta_1(\varphi_n)\beta_1(\psi_m)\\ &+\|\sigma''_{y^2}\|_\infty\beta_2(\psi_m)\}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Сопоставляя (1) и (2) и учитывая, что

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_1(\psi_m)=\lim_{m\to\infty}\beta_1(\psi_m)=\lim_{m\to\infty}\beta_2(\psi_m)=0,$$

находим

$$\varliminf_{m\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_p \geqslant \|\sigma'_x\|_p\alpha_1(\varphi_n)-\frac{(2\pi)^{2/p}}{2}\|\sigma''_{x^2}\|_\infty\beta_2(\varphi_n).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to\infty}(\alpha_1(\varphi_n))^{-1}\varliminf_{m\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_p\\ \geqslant &\varliminf_{n\to\infty}\left\{\|\sigma'_x\|_p-\frac{(2\pi)^{2/p}}{2}\|\sigma''_{x^2}\|_\infty\frac{\beta_2(\varphi_n)}{\alpha_1(\varphi_n)}\right\}=\|\sigma'_x\|_p.\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varliminf_{m\to\infty}(\alpha_1(\psi_m))^{-1}\varliminf_{n\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_p\geqslant\|\sigma'_y\|_p.$$

Для $f\in L_p(Q^2)$ полагаем

$$\omega_1(f,u,v)_p=\sup_{|t|\leqslant u,|h|\leqslant v}\|f(x+t,y+h)-f(x,y)\|_{p,Q^2}.$$

Величина $\omega_1(f)_p$ называется модулем непрерывности первого порядка функции f в пространстве $L_p(Q^2)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $f\in C(Q^2)$ при $p=\infty$. Тогда соотношения*

$$\|U_{n,m}(f)-f\|_{p,Q^2}\leqslant K\beta_1(\varphi_n)+L\beta_1(\psi_m)\quad(n,m\in\mathbb{N}),\tag{3}$$

$$\omega_1(f,u,v)_p\leqslant Ku+Lv\quad(u,v\in\mathbb{R}_+)\tag{4}$$

равносильны, т.е. выполнение одного из соотношений (3) (при всех $n,m\in\mathbb{N}$ и фиксированных $K,L\in\mathbb{R}_+$) или (4) (при всех $u,v\in\mathbb{R}_+$ и фиксированных $K,L\in\mathbb{R}_+$) влечет выполнение другого.

Доказательство. Из (3) сразу следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_1(\varphi_n)}\varliminf_{m\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_p\leqslant K,\tag{5}$$

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{\alpha_1(\psi_m)}\varliminf_{n\to\infty}\|f-U_{n,m}(f)\|_p\leqslant L.\tag{6}$$

Поэтому на основании теоремы 1 при любых $r,s\in\mathbb{N}$ будет

$$\|(\sigma_{r,s}(f))'_x\|_p\leqslant K,\quad\|(\sigma_{r,s}(f))'_y\|_p\leqslant L.$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\omega_1(f,u,0)_p\leqslant\omega_1(f-\sigma_{r,s}(f),u,0)_p+\omega_1(\sigma_{r,s}(f),u,0)_p\\ &\leqslant 2\|f-\sigma_{r,s}(f)\|_p+\|(\sigma_{r,s}(f))'_x\|_p u\leqslant 2\|f-\sigma_{r,s}(f)\|_p+Ku.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему A, находим, что

$$\omega_1(f,u,0)_p \leqslant Ku \quad (u \in \mathbb{R}_+).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\omega_1(f,0,v)_p \leqslant Lv \quad (v \in \mathbb{R}_+).$$

Теперь, принимая во внимание неравенство

$$\omega_1(f,u,v)_p \leqslant \omega_1(f,u,0)_p + \omega_1(f,0,v)_p,$$

приходим к (4).

Пусть теперь выполнено соотношение (4). Тогда

$$\|f - U_{n,m}(f)\|_p \leqslant \int\limits_a^b \int\limits_c^d \|f(x+u,y+v) - f(x,y)\|_p \varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \int\limits_c^d (Ku+Lv)\varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv = K\beta_1(\varphi_n) + L\beta_1(\psi_m).$$

Тем самым выполнение (3) доказано.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 ясно, что в ее условиях соотношение (3) равносильно выполнению совокупности двух неравенств (5) и (6).

Следствие 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(Q^2)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C(Q^2)$ *при* $p = \infty$,

$$\sigma^*_{n,m}(f,x,y) = 4\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi f(x+u,y+v)\Phi_n(u)\Phi_m(v)du\,dv.$$

Тогда выполнение совокупности соотношений

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\pi n}{2\ln n} \varliminf_{m\to\infty} \|f - \sigma^*_{n,m}(f)\|_{p,Q^2} \leqslant K, \tag{7}$$

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\pi m}{2\ln m} \varliminf_{n\to\infty} \|f - \sigma^*_{n,m}(f)\|_{p,Q^2} \leqslant L \tag{8}$$

равносильно выполнению неравенства

$$\omega_1(f,u,v)_p \leqslant Ku + Lv \quad (u,v \in \mathbb{R}_+). \tag{9}$$

Доказательство следствия 1 получается из сопоставления теоремы 2 (при этом надо учесть замечание 1) с известными (см., например, [2, с. 305]) соотношениями

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\ln n} \int\limits_0^\pi t\Phi_n(t)dt = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\ln n} \int\limits_0^\pi t^2\Phi_n(t)dt = 0.$$

Следствие 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(Q^2)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C(Q^2)$ *при* $p = \infty$; $K, L \in \mathbb{R}_+$. *Тогда выполнение соотношения*

$$\Big\| \int\limits_a^\pi \int\limits_b^\pi \frac{f(x+u,y+v)-f(x,y)}{u^2v^2} du\,dv \Big\|_{p,Q^2} \leqslant K\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\pi}\right)\ln\frac{\pi}{a} + L\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\pi}\right)\ln\frac{\pi}{b} \tag{10}$$

при всех $a, b \in (0, \pi]$ *равносильно выполнению неравенства*

$$\omega_1(f,u,v)_p \leqslant Ku + Lv \tag{11}$$

при всех $u, v \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сначала установим, что (11) влечет (10). Имеем

$$\Big\| \int\limits_a^\pi \int\limits_b^\pi \frac{f(x+u,y+v)-f(x,y)}{u^2v^2} du\,dv \Big\|_p \leqslant \int\limits_a^\pi \int\limits_b^\pi \frac{\|f(x+u,y+v)-f(x,y)\|_p}{u^2v^2} du\,dv$$

$$\leqslant \int\limits_a^\pi \int\limits_b^\pi \frac{\omega_1(f,u,v)_p}{u^2v^2} du\,dv \leqslant \int\limits_a^\pi \int\limits_b^\pi \frac{Ku+Lv}{u^2v^2} du\,dv$$

$$= K\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\pi}\right)\ln\frac{\pi}{a} + L\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\pi}\right)\ln\frac{\pi}{b}.$$

Пусть теперь выполнено соотношение (10). Положим

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0, a], \\ \frac{1}{C(a)t^2} & \text{при} \quad t \in (a, \pi], \end{cases}$$

$$\psi_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0, b], \\ \frac{1}{C(b)t^2} & \text{при} \quad t \in (b, \pi], \end{cases}$$

где

$$C(a) = \int_a^\pi \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\pi}.$$

Ясно, что функции φ_a и ψ_b принадлежат классу $K([0, \pi])$. Так как

$$\alpha_1(\varphi_a) = \frac{1}{C(a)} \int_a^\pi \frac{du}{u} = \frac{1}{C(a)} \ln \frac{\pi}{a},$$

$$\beta_2(\varphi_a) = \frac{1}{C(a)} \int_a^\pi du = \frac{\pi - a}{C(a)},$$

то

$$\lim_{a \to 0+} \frac{\beta_2(\varphi_a)}{\alpha_1(\varphi_a)} = \lim_{b \to 0+} \frac{\beta_2(\psi_b)}{\alpha_1(\psi_b)} = 0.$$

Тогда по теореме 2 соотношение

$$\Big\| \int_0^\pi \int_0^\pi (f(x+u, y+v) - f(x,y))\varphi_a(u)\psi_b(v)du\,dv \Big\|_p \leqslant K\alpha_1(\varphi_a) + L\alpha_1(\psi_b) \tag{12}$$

влечет неравенство (11). Осталось заметить, что (12) можно переписать в виде неравенства (10).

3. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $x, y, t, h \in \mathbb{R}$. По определению полагаем

$$\delta^2_{t,h}(f, x, y) = f(x+t, y+h) + f(x+t, y-h) + f(x-t, y+h) + f(x-t, y-h) - 4f(x,y).$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(Q^2)$. Величина

$$\omega_2(f, u, v)_p = \sup_{|t| \leqslant u, |h| \leqslant v} \|\delta^2_{t,h}(f)\|_p$$

называется модулем непрерывности второго порядка функции f в пространстве $L_p(Q^2)$.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(Q^2)$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, $E_1 = [a, b]$, $E_2 = [c, d]$; $\varphi_n \in K(E_1)$, $\psi_m \in K(E_2)$ *при* $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_3(\varphi_n)}{\beta_2(\varphi_n)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\beta_3(\psi_m)}{\beta_2(\psi_m)} = 0,$$

$$R_{n,m}(f, x, y) = \int_a^b \int_c^d \delta^2_{u,v}(f, x, y)\varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv.$$

Тогда при любых $r, s \in \mathbb{N}$

$$2\|(\sigma_{r,s}(f, x, y))''_{x^2}\|_{p,Q^2} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (\beta_2(\varphi_n))^{-1} \varliminf_{m\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_{p,Q^2},$$

$$2\|(\sigma_{r,s}(f, x, y))''_{y^2}\|_{p,Q^2} \leqslant \varliminf_{m\to\infty} (\beta_2(\psi_m))^{-1} \varliminf_{n\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_{p,Q^2}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3 близко к доказательству теоремы 1. При $r, s \in \mathbb{N}$

$$\|R_{n,m}(\sigma_{r,s}(f))\|_p = \|\sigma_{r,s}(R_{n,m}(f))\|_p \leqslant \|R_{n,m}(f)\|_p. \tag{13}$$

Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, находим, что

$$\delta^2_{u,v}(\sigma_{r,s}(f), x, y) = 2(\sigma''_{x^2}(x, y)u^2 + \sigma''_{y^2}(x, y)v^2) + t_{r,s}(x, y, u, v),$$

где

$$\|t_{r,s}(x, y, u, v)\|_{p,Q^2} \leqslant \frac{(2\pi)^{2/p}4}{3!}(\|\sigma'''_{x^3}\|_\infty |u|^3 + 3\|\sigma'''_{x^2y}\|_\infty \times u^2|v| + 3\|\sigma'''_{xy^2}\|_\infty |u|v^2 + \|\sigma'''_{y^3}\|_\infty |v|^3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|R_{n,m}(\sigma_{r,s}(f))\|_p &\geqslant 2\|\sigma''_{x^2}(\cdot)\beta_2(\varphi_n) + \sigma''_{y^2}(\cdot)\beta_2(\psi_m)\|_p \\ &- \frac{(2\pi)^{2/p}4}{3!}\{\|\sigma'''_{x^3}\|_\infty \beta_3(\varphi_n) + 3\|\sigma'''_{x^2y}\|_\infty \beta_2(\varphi_n)\beta_1(\psi_m) \\ &+ 3\|\sigma'''_{xy^2}\|_\infty \beta_1(\varphi_n)\beta_2(\psi_m) + \|\sigma'''_{y^3}\|_\infty \beta_3(\psi_m)\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Сопоставляя (13) и (14) и учитывая, что

$$\lim_{m\to\infty} \beta_1(\psi_m) = \lim_{m\to\infty} \beta_2(\psi_m) = \lim_{m\to\infty} \beta_3(\psi_m) = 0,$$

получаем

$$\varliminf_{m\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_p \geqslant 2\|\sigma''_{x^2}\|_p \beta_2(\varphi_n) - \frac{(2\pi)^{2/p}4}{3!}\|\sigma'''_{x^3}\|_\infty \beta_3(\varphi_n).$$

Отсюда вытекает, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_2(\varphi_n)} \varliminf_{m\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_p \geqslant 2\|\sigma''_{x^2}\|_p.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{\beta_2(\psi_m)} \varliminf_{n\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_p \geqslant 2\|\sigma''_{y^2}\|_p.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, $f \in C(Q^2)$ при $p = \infty$. Тогда соотношения*

$$\|R_{n,m}(f)\|_{p,Q_2} \leqslant K\beta_2(\varphi_n) + L\beta_2(\psi_m) \quad (n, m \in \mathbb{N}), \tag{15}$$

$$\omega_2(f, u, v)_p \leqslant Ku^2 + Lv^2 \quad (u, v \in \mathbb{R}_+) \tag{16}$$

равносильны, т.е. выполнение одного из соотношений (15) (при всех $n, m \in \mathbb{N}$ и фиксированных $K, L \in \mathbb{R}_+$) или (16) (при всех $u, v \in \mathbb{R}_+$ и фиксированных $K, L \in \mathbb{R}_+$) влечет выполнение другого.

Доказательство. Из (15) сразу следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_2(\varphi_n)} \varliminf_{m\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_p \leqslant K, \tag{17}$$

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{\beta_2(\psi_m)} \varliminf_{n\to\infty} \|R_{n,m}(f)\|_p \leqslant L. \tag{18}$$

Поэтому в силу теоремы 3 при любых $r, s \in \mathbb{N}$ будет

$$\|(\sigma_{r,s}(f))''_{x^2}\| \leqslant \frac{K}{2}, \quad \|(\sigma_{r,s}(f))''_{y^2}\| \leqslant \frac{L}{2}.$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}\delta^2_{u,v}(f, x, y) = \{f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) - 2f(x+u, y)\} \\ +\{f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) - 2f(x-u, y)\} + 2\{f(x+u, y)+ \\ +f(x-u, y) - 2f(x, y)\} = \alpha(f, x, y, u, v) \\ +\beta(f, x, y, u, v) + 2\gamma(f, x, y, u, v).\end{gathered}$$

Далее,

$$\|\alpha(f,x,y,u,v)\|_{p,Q^2} \leqslant \|\alpha(f-\sigma_{r,s}(f)),x,y,u,v)\|_p$$
$$+\|\alpha(\sigma_{r,s}(f),x,y,u,v)\|_p \leqslant 4\|f-\sigma_{r,s}(f)\|_p + \|\sigma''_{y^2}(f)\|_p v^2$$
$$\leqslant 4\|f-\sigma_{r,s}(f)\|_p + \frac{L}{2}v^2.$$

Отсюда, применяя теорему A, находим, что

$$\|\alpha(f,x,y,u,v)\|_{p,Q^2} \leqslant \frac{L}{2}v^2.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\|\beta(f,x,y,u,v)\|_{p,Q^2} \leqslant \frac{L}{2}v^2,$$
$$\|\gamma(f,x,y,u,v)\|_{p,Q^2} \leqslant \frac{K}{2}u^2.$$

Следовательно,

$$\|\delta^2_{u,v}(f,x,y)\|_p \leqslant Ku^2 + Lv^2$$

и

$$\omega_2(f,u,v)_p \leqslant Ku^2 + Lv^2.$$

Тем самым утверждение, что (15) влечет (16), доказано.

Пусть теперь выполнено соотношение (16). Тогда

$$\|R_{n,m}(f)\|_p \leqslant \int_a^b \int_c^d \|\delta^2_{u,v}(f)\|_p \varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv$$
$$\leqslant \int_a^b \int_c^d \omega_2(f,|u|,|v|)_p \varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv$$
$$\leqslant \int_a^b \int_c^d (Ku^2+Lv^2)\varphi_n(u)\psi_m(v)du\,dv = K\beta_2(\varphi_n) + L\beta_2(\psi_m).$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 4 ясно, что в ее условиях соотношение (16) равносильно выполнению совокупности двух неравенств (17) и (18).

Следствие 3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(Q^2)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C(Q^2)$ *при* $p = \infty$. *Тогда выполнение соотношения*

$$\Big\| \int_a^\pi \int_b^\pi \frac{\delta^2_{u,v}(f,x,y)}{u^3 v^3} du\, dv \Big\|_{p,Q^2} \leqslant \frac{K}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\pi^2}\right) \ln\frac{\pi}{a}$$

$$+\frac{L}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\pi^2}\right) \ln\frac{\pi}{b}$$

при всех $a, b \in (0,\pi]$ $(K, L \in \mathbb{R}_+$ *– фиксированные постоянные) равносильно выполнению неравенства*

$$\omega_2(f,u,v)_p \leqslant K u^2 + L v^2$$

при всех $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство следствия 3 аналогично доказательству следствия 2, но здесь вместо теоремы 2 используется теорема 4.

§2. Об одной модификации интеграла Фейера

1. В этом пункте мы введем ряд обозначений и, чтобы сделать более понятными результаты, излагаемые в пункте 2, приведем ряд хорошо известных фактов, частью без ссылок на литературу, где их можно найти.

В дальнейшем L_p при $1 \leqslant p < \infty$ – пространство 2π-периодических измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_Q |f|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

$L(\mathbb{R})$ – множество вещественных функций, заданных и суммируемых на $\mathbb{R}$. Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_Q f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_Q f(t)\sin kt\, dt,$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_Q f(t) e^{-ikt} dt$$

– ее коэффициенты Фурье. Если $f \in L(\mathbb{R})$, то

$$a(f,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\cos zt\,dt, \quad b(f,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\sin zt\,dt$$

суть, соответственно, косинус и синус преобразования Фурье функции f. При $a > 0$ полагаем

$$\psi_a(t) = \frac{2}{\pi a}\left(\frac{\sin^2\frac{at}{2}}{t^2}\right).$$

Имеют место формулы (см., например, [4, с. 28, 77])

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi_a(t)\cos zt\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\frac{z}{a}), & \text{если} \quad 0 \leqslant z < a, \\ 0, & \text{если} \quad z \geqslant a; \end{cases} \tag{1}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi_a(t)\sin zt\,dt = \frac{1}{2\pi a}\{(z+a)\ln|z+a| + (z-a)\ln|z-a| - 2z\ln z\} \tag{2}$$

при $z > 0$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_1$, $\rho_k(f) = \sqrt{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}$. Через $\sigma_n(f)$ обозначаем суммы Фейера функции f:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\psi_n(t)dt = \int\limits_{Q} f(x+t)\Phi_n(t)dt.$$

Теорема А (см., например, [5, с. 258]). *Пусть $f \in L_2$, функция $\Phi \in L(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(t)e^{ikt}dt\right)e^{ikx}.$$

Лемма А. *Пусть $f \in L_2$, функция $\Phi \in L(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и такова, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi = 1$,*

$$U(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\Phi(t)dt.$$

Тогда

$$\|f-U(f)\|_2^2=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\{(a(\Phi,k)-1)^2+b^2(\Phi,k)\}\rho_k^2(f).$$

Доказательство леммы A получается непосредственными вычислениями. При этом используется теорема A и равенство Парсеваля.

Пусть $f\in L_2$. Через

$$E_n(f)=E_n(f)_2=\left(\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}$$

обозначаем наилучшее приближение функции f в пространстве L_2 тригонометрическими полиномами порядка не выше n;

$$\omega(f,h)=\omega(f,h)_2=\sup_{|t|\leqslant h}\|f(\cdot+t)-f\|_2$$

– модуль непрерывности функции f в пространстве L_2.

Лемма B. *Пусть $f\in L_2$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f-\sigma_n(f)\|_2^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)E_k^2(f). \tag{3}$$

Доказательство. Применяя лемму A к интегралу

$$\sigma_n(f,x)=\int_{\mathbb{R}}f(x+t)\psi_n(t)dt$$

и принимая во внимание формулу (1), имеем

$$\|f-\sigma_n(f)\|_2^2=\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}.$$

Отсюда, произведя преобразование Абеля, находим

$$\begin{aligned}\|f-\sigma_n(f)\|_2^2&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(E_{k-1}^2(f)-E_k^2(f))+E_n^2(f)\\&=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2E_k^2(f)-\sum_{k=1}^{n}k^2E_k^2(f)\right)+E_n^2(f)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)E_k^2(f).\end{aligned}$$

Известно, что если $f \in L_2$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\omega(f, \frac{\pi}{n}) \leqslant C_1 \|f - \sigma_n(f)\|_2 \leqslant C_2 \omega(f, \frac{\pi}{n}). \qquad (4)$$

2. Вопрос описания порядка приближения функции ее суммами Фейера в терминах модулей непрерывности к настоящему времени полностью решен (см., например, [2, с. 261, 262]).

Введем в рассмотрение метод приближения

$$\sigma_a^*(f, x) = 2 \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x+t)\psi_a(t)dt \quad (a > 0) \qquad (5)$$

и поставим задачу изучения порядка убывания величины $\|f - \sigma_a^*(f)\|_p$ при $a \to +\infty$ в зависимости от структурных свойств функции f. При этом желательно иметь такие же законченные результаты, как и в случае приближения суммами Фейера. Поскольку для произвольного пространства L_p пока даже не ясно в каких терминах, описывающих структурные свойства функций, надо производить изучение, мы ограничились рассмотрением пространства L_2 и получением соотношений, аналогичных (3).

Положим

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + \frac{1}{\pi^2}((t-1)\ln(1-t) + (t+1)\ln(1+t) - 2t\ln t)^2 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 + \frac{1}{\pi^2}((t-1)\ln(t-1) + (t+1)\ln(1+t) - 2t\ln t)^2 \quad \text{при} \quad t \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)^2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$C_3 \leqslant \inf_{t \geqslant 0} \left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right) \leqslant C_4.$$

Доказательство. Функции g и γ непрерывны на $\mathbb{R}_+$. Легко проверить, что

$$\lim_{t \to 0+} \frac{g(t)}{\gamma(t)} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Следовательно, функция

$$m(t)=\frac{g(t)}{\gamma(t)}$$

непрерывна на $\mathbb{R}_+$. При $t>1$ имеем

$$m'(t)=\frac{2}{\pi^2}\{(t-1)\ln(t-1)+(t+1)\ln(t+1)-2t\ln t\}\ln(1-\frac{1}{t^2}).$$

Выражение в фигурных скобках – центральная разность второго порядка в точке t с шагом 1 выпуклой вниз на $(0,+\infty)$ функции $t\ln t$. Следовательно, оно неотрицательно. Значит, $m'(t)\leqslant 0$ при $t>1$ и $m(t)$ убывает при $t\geqslant 1$. Поэтому

$$\inf_{t\geqslant 1}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)=\lim_{t\to+\infty}m(t)=1,\quad \sup_{t\geqslant 1}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)=\lim_{t\to 1}m(t)=1+(\frac{2}{\pi}\ln 2)^2. \tag{6}$$

На отрезке $[0,1]$ функция $m(t)$ непрерывна и строго положительна. Последнее следует из того, что $g(t)=0$ только когда $t=0$, а $m(0)=\frac{4}{\pi^2}$. Значит,

$$0<\inf_{0\leqslant t<1}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)<+\infty. \tag{7}$$

Осталось сопоставить (6) и (7).

Замечание 1. Вычисления, произведенные с помощью вычислительной техники (см. табл. 1), позволяют высказать предположение, что

$$0,4<\inf_{t\geqslant 0}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)<0,41,$$
$$1,2<\sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{g(t)}{\gamma(t)}\right)<1,21.$$

Таблица 1. Значения функции $g(t)/\gamma(t)$ при $0 \leqslant t < 1$

t	g/γ	t	g/γ	t	g/γ	t	g/γ
0,00	0,405285	0,25	0,962186	0,50	1,093034	0,75	1,175319
0,01	0,634671	0,26	0,968929	0,51	1,097082	0,76	1,177800
0,02	0,676402	0,27	0,975496	0,52	1,101062	0,77	1,180212
0,03	0,706321	0,28	0,981896	0,53	1,104974	0,78	1,182554
0,04	0,730501	0,29	0,988140	0,54	1,108820	0,79	1,184821
0,05	0,751148	0,30	0,994235	0,55	1,112601	0,80	1,187013
0,06	0,769351	0,31	1,000189	0,56	1,116317	0,81	1,189125
0,07	0,785738	0,32	1,006008	0,57	1,119971	0,82	1,191153
0,08	0,800711	0,33	1,011699	0,58	1,123561	0,83	1,193095
0,09	0,814543	0,34	1,017268	0,59	1,127090	0,84	1,194944
0,10	0,827431	0,35	1,022719	0,60	1,130558	0,85	1,196695
0,11	0,839522	0,36	1,028058	0,61	1,133965	0,86	1,198341
0,12	0,850928	0,37	1,033290	0,62	1,137312	0,87	1,199874
0,13	0,861738	0,38	1,038418	0,63	1,140599	0,88	1,201286
0,14	0,872024	0,39	1,043446	0,64	1,143825	0,89	1,202564
0,15	0,881843	0,40	1,048378	0,65	1,146993	0,90	1,203695
0,16	0,891245	0,41	1,053217	0,66	1,150100	0,91	1,204662
0,17	0,900269	0,42	1,057966	0,67	1,153148	0,92	1,205442
0,18	0,908950	0,43	1,062629	0,68	1,156136	0,93	1,206009
0,19	0,917319	0,44	1,067207	0,69	1,159063	0,94	1,206325
0,20	0,925400	0,45	1,071703	0,70	1,161929	0,95	1,206339
0,21	0,933215	0,46	1,076120	0,71	1,164734	0,96	1,205976
0,22	0,940785	0,47	1,080460	0,72	1,167476	0,97	1,205121
0,23	0,948127	0,48	1,084724	0,73	1,170155	0,98	1,203566
0,24	0,955256	0,49	1,088915	0,74	1,172770	0,99	1,200860

Лемма 2. *Пусть $f \in L_2$, $a > 0$. Тогда*

$$\|\sigma_a^*(f) - f\|_2^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{a}\right)\rho_k^2(f).$$

Доказательство леммы 2 получается применением леммы А к интегралу (5). При этом учитываются формулы (1) и (2).

Лемма 3. *Пусть* $f \in L_2$, $a > 0$,

$$\tau_a(f,x) = 2\int_{-\infty}^{0} f(x+t)\psi_a(t)dt = 2\int_{\mathbb{R}_+} f(x-t)\psi_a(t)dt.$$

Тогда

$$\|\tau_a(f) - f\|_2 = \|\sigma_a^*(f) - f\|_2.$$

Доказательство леммы 3 получается непосредственным вычислением величины $\|\tau_a(f) - f\|_2^2$ (с помощью леммы A и формул (1) и (2)) и сравнением полученного результата с аналогичным значением для $\|\sigma_a^*(f) - f\|_2^2$, даваемым леммой 2.

Следствие 1. *Пусть* $f \in L_2$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_2 \leqslant \|\sigma_n^*(f) - f\|_2.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_2 &= \|\int_{\mathbb{R}_+} f(x+t)\Phi_n(t)dt - \frac{1}{2}f(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \frac{1}{2}f(x)\|_2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\sigma_n^*(f) - f\|_2 + \frac{1}{2}\|\tau_n(f) - f\|_2 = \|\sigma_n^*(f) - f\|_2.\end{aligned}$$

Положим для $f \in L_2$ при $a > 0$

$$r_a^2(f) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \gamma\left(\frac{k}{a}\right)\rho_k^2(f).$$

Лемма 4. *Пусть* $f \in L_2$, $a > 0$. *Тогда*

$$r_a^2(f) = \gamma\left(\frac{1}{a}\right)E_0^2(f) + \sum_{k=1}^{[a]}\left(\gamma\left(\frac{k+1}{a}\right) - \gamma\left(\frac{k}{a}\right)\right)E_k^2(f). \tag{8}$$

Доказательство. Можно считать, что $a \geqslant 1$ (в противном случае доказываемое утверждение очевидно). Так как $\gamma(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, то

$$r_a^2(f) = \pi \sum_{k=1}^{[a]} \gamma\left(\frac{k}{a}\right)\rho_k^2(f) + E_{[a]}^2(f). \tag{9}$$

К сумме, стоящей в правой части (9), применим преобразование Абеля. Имеем

$$\begin{aligned}\pi \sum_{k=1}^{[a]} \gamma \left(\frac{k}{a}\right) \rho_k^2(f) &= \sum_{k=1}^{[a]} \gamma \left(\frac{k}{a}\right) \left(E_{k-1}^2(f) - E_k^2(f)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{[a]} \gamma \left(\frac{k}{a}\right) E_{k-1}^2(f) - \sum_{k=1}^{[a]} \gamma \left(\frac{k}{a}\right) E_k^2(f) \\ = \sum_{k=0}^{[a]-1} \gamma \left(\frac{k+1}{a}\right) E_k^2(f) &- \sum_{k=1}^{[a]} \gamma \left(\frac{k}{a}\right) E_k^2(f) = \gamma \left(\frac{1}{a}\right) E_0^2(f) \\ &+ \sum_{k=1}^{[a-1]} \left(\gamma \left(\frac{k+1}{a}\right) - \gamma \left(\frac{k}{a}\right)\right) E_k^2(f) - \gamma \left(\frac{[a]}{a}\right) E_{[a]}^2(f).\end{aligned}$$

Подставив последнее выражение в (9) и приняв во внимание, что $\gamma\left(\frac{[a]+1}{a}\right) = 1$, приходим к равенству (8).

Следствие 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_2$. Тогда*

$$r_n^2(f) = \left(\frac{\ln n}{n-1}\right)^2 E_0^2(f) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} E_k^2(f) \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{t(t-1-\ln t)\ln t}{(t-1)^3} dt. \tag{10}$$

Доказательство. Так как

$$\gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) - \gamma(1) = 0,$$

то из равенства (8) следует, что

$$r_n^2(f) = \gamma\left(\frac{1}{n}\right) E_0^2(f) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\gamma\left(\frac{k+1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right) E_k^2(f). \tag{11}$$

При $t \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\gamma'(t) = 2\frac{t(t-1-\ln t)\ln t}{(t-1)^3}. \tag{12}$$

Так как

$$\ln t = (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + \dots,$$

то $\gamma'(t) = t + o((1-t))$ при $t \to 1-0$. Значит, $\lim\limits_{t\to 1-0} \gamma'(t) = 1$. В силу сказанного, для каждого отрезка $[\frac{k}{n}, \frac{(k+1)}{n}]$ $(k = \overline{1, n-1})$ справедливо равенство

$$\gamma\left(\frac{k+1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} \gamma'(t)dt. \tag{13}$$

Осталось сопоставить соотношения (11)–(13).

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_2$,

$$r_n(f) =$$
$$\left\{ \left(\frac{\ln n}{n-1}\right)^2 E_0^2(f) + 2\sum_{k=1}^{n-1} E_k^2(f) \int\limits_{k}^{(k+1)/n} \frac{t(t-1-\ln t)\ln t}{(t-1)^3} dt \right\}^{1/2}.$$

Тогда

$$C_5 r_n(f) \leqslant \|\sigma_n^*(f) - f\|_2 \leqslant C_6 r_n(f), \tag{14}$$

$$\omega(f, \frac{\pi}{n}) \leqslant C_1 \|\sigma_n^*(f) - f\|_2. \tag{15}$$

Доказательство. Для доказательства (14) достаточно сопоставить леммы 1, 2 и следствие 2. Неравенство (15) получается сопоставлением левого из соотношений (4) с леммой 3.

Отметим ряд фактов, относящихся к сравнению порядков убывания величин $\|f - \sigma_n(f)\|_2$ и $\|f - \sigma_n^*(f)\|_2$ для функций, принадлежащих некоторым важным классам. Они легко устанавливаются с помощью соотношений (3) и (14).

Пусть $f \in L_2$ такова, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_7}{(n+1)^\alpha}.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$ и $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f - \sigma_n(f)\|_2 \leqslant \frac{C_7 C_8(\alpha)}{(n+1)^\alpha}, \quad \|f - \sigma_n^*(f)\|_2 \leqslant \frac{C_7 C_9(\alpha)}{(n+1)^\alpha};$$

при $\alpha = 1$ и $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f - \sigma_n(f)\|_2 \leqslant \frac{C_7 C_{10} \sqrt{\ln(n+3)}}{n+1}, \quad \|f - \sigma_n^*(f)\|_2 \leqslant \frac{C_7 C_{11} \ln^{3/2}(n+3)}{n+1}.$$

С другой стороны, если $f \in L_2$ такова, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \geqslant \frac{C_{12}}{n+1},$$

то

$$\|f - \sigma_n(f)\|_2 \geqslant \frac{C_{12} C_{13} \sqrt{\ln(n+3)}}{n+1}, \quad \|f - \sigma_n^*(f)\|_2 \geqslant \frac{C_{12} C_{14} \ln^{3/2}(n+3)}{n+1}.$$

Далее, обозначим через $\mathrm{Lip}^* 1$ множество функций, удовлетворяющих при некотором $M \in \mathbb{R}_+$ и всех $h \geqslant 0$ неравенству

$$\omega(f, h) \leqslant Mh.$$

Тогда из соотношений (3) следует, что необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f \in L_2$ к классу $\mathrm{Lip}^* 1$ является выполнение соотношения

$$\varlimsup_{n \to \infty} n\|f - \sigma_n(f)\|_2 < +\infty.$$

С другой стороны, условие

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{\ln n} \|f - \sigma_n^*(f)\|_2 < +\infty$$

также является необходимым и достаточным для того, чтобы $f \in \mathrm{Lip}^* 1$.

Литература

1. А. С. Жук, В. В. Жук, *О приближении периодических функций линейными методами аппроксимации*, Настоящий сборник, с. 51–72.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*. Л., 1982.
3. В. В. Жук, *Сильная аппроксимация периодических функций*. Л., 1989.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, Т. 1, М., 1969.
5. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. Т. 1, М., 1965.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: dodonov@unitel.spb.ru
zhuk@math.spbu.ru

Поступило 17 августа 2006 г.