Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

А. С. Гуляев, В. А. Шлык

О КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НА КРУГОВЫЕ ОБЛАСТИ С РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

**Посвящается
100-летию со дня рождения
Геннадия Михайловича Голузина**

§1. Введение

Пусть D – бесконечносвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с одной отмеченной граничной компонентой l (с двумя отмеченными граничными компонентами l_0 и l_1) и z_0 – фиксированная точка области D; $\mathcal{F}(z_0, l, D)$ – класс регулярных, однолистных функций $w = f(z)$, для которых $f(z_0) = 0$; $f(l)$ – внешняя граничная компонента области $f(D)$ ($\mathcal{F}(l_0, l_1, D)$ – класс регулярных однолистных функций $w = f(z)$, для которых $f(l_1)$ – внешняя граничная компонента области $f(D)$, а $f(l_0)$ – граничная компонента области $f(D)$, которая отделяет $w = 0$ от $f(l_1)$).

В вопросе существования экстремальных свойств ситуация с каноническим отображением области D на круговую область с круговыми разрезами и на круговую область с радиальными разрезами сложилась по разному.

Для областей первого типа затронутый вопрос решился положительно в самых общих предположениях на область D (см. [1]). Относительно областей второго типа отметим результат Рейха и Варшавского [1]. А именно, решая задачу о $\min |f'(z_0)|$, $f(z) \in \mathcal{F}(z_0, l, D)$, $f(l) = \{w : |w| = 1\}$, для области D с изолированной невырожденной граничной компонентой l, они установили, что экстремальная функция $w = f_0(z)$ отображает область D на круговую область $|w| < 1$ с радиальными разрезами, при этом $f_0(l) = \{w : |w| = 1\}$. С другой стороны, Штребель [2], Рейх [3],

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–9004.2006.1) и РФФИ (грант NC 05-01-000 99).

решая ту же задачу в общем случае, показали, что $f_0(D)$ – круговая область $|w|<1$ с радиальными разрезами. При этом, вообще говоря, $f_0(l)=\{w:|w|=1\}\cup e$, где e состоит из радиальных разрезов $\{w:0<r\le|w|<1,\arg w=\mathrm{const}\}$ и 2-модуль семейства спрямляемых кривых, соединяющих e с $\{z:|z|\le\varepsilon\}\subset f_0(D)$, $\varepsilon>0$, равен 0. Другими словами, $f_0(z)$ не принадлежит рассматриваемому классу функций.

Ниже вводятся так называемые 2-нормальные кольцевые, круговые области с радиальными разрезами и устанавливаются их геометрические, функциональные свойства. Способ рассуждений, основанный на равенстве модуля и ёмкости конденсатора (см. [4]), методе экстремальных метрик по Фюгледе [5], даёт возможность распространить эти свойства на случай пространственных p-нормальных кольцевых, шаровых областей с радиальными разрезами. Кроме того, это позволяет упростить доказательство упомянутых результатов Штребеля, Рейха и, используя расширенную постановку соответствующих экстремальных задач, придать им завершённый вид.

§2. Нормальные кольцевые и круговые области с радиальными разрезами

Для множества $F\subset\mathbb{C}$ обозначим через $\overline{F}$ его замыкание в $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Под кривой будем понимать образ числового невырожденного интервала при непрерывном отображении в $\mathbb{C}$. Если Γ – семейство локально спрямляемых кривых γ, $\gamma\subset D$, то через $\mathrm{adm}\Gamma$ обозначим семейство всех борелевских функций $\rho:D\to[0,+\infty]$, для которых $\int\limits_\gamma\rho(z)|dz|\ge 1$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Величину

$$m_2(\Gamma)=\inf_{\rho\in\mathrm{adm}\Gamma}\iint\rho^2(z)\,dxdy$$

назовём 2-модулем семейства Γ. Борелевскую функцию $\rho_0=\rho_0(z,\Gamma):D\to[0,+\infty]$ назовём обобщённой экстремальной метрикой для Γ, если $\iint\limits_D\rho_0^2(z)\,dxdy=m(\Gamma)$ и существует семейство $\Gamma_0\subset\Gamma$ такое, что $m_2(\Gamma_0)=0$ и $\int\limits_\gamma\rho_0(z)\,ds\ge 1$ для всех $\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_0$. Множество $e\subset\overline{D}$ назовём 2-исключительным множеством относительно D, если 2-модуль семейства $\Gamma(e,D)$ всех локально спрямляемых кривых γ, $\gamma\subset D$, соединяющих e с точками D, равен 0.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для 2-почти всех кривых γ из семейства Γ, если оно справедливо для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m_2(\Gamma_0) = 0$.

Отметим, что $m_2(\Gamma^\infty) = 0$ для семейства Γ^∞ всех неспрямляемых кривых в $\mathbb{C}$ (см. [6]).

Как обычно, $\mathcal{L}_n(\cdot)$ – n-мерная мера Лебега, $C^\infty(D)$ $\big(C_0^\infty(D)\big)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций в D (подкласс функций из $C^\infty(D)$ с компактным носителем в D); $L_2^1(D)$ – пространство функций $u : D \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в D, имеющих обобщенные частные производные, суммируемые в D со степенью 2, и полунормой $\|u\| = \Big(\iint\limits_D |\nabla u|^2\, dxdy\Big)^{1/2} < +\infty$. Под конденсатором будем понимать тройку (F_0, F_1, D), где $F_0, F_1 \subset \overline{D}$ – непустые без общих точек компакты. Определим 2-ёмкость конденсатора (F_0, F_1, D) как величину

$$C_2(F_0, F_1, D) = \inf \iint\limits_D |\nabla u|^2\, dxdy,$$

где inf берётся по всем вещественнозначным функциям u таким, что $u\Big|_D \in C^\infty(D) \cap L_2^1(D)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j для $j = 0, 1$. Класс таких функций обозначим через $\mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$. Если $u_0 = u(z, F_0, F_1, D) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(z)$ в $L_2^1(D)$, где $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$, $0 \le u_k \le 1$ в D, $\iint\limits_D |\nabla u_0|^2\, dxdy = C_2(F_0, F_1, D)$, то u_0 назовём экстремальной функцией для $C_2(F_0, F_1, D)$. Если $v = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L_2^1(D)$, $u_k \in C^\infty(D) \cap L_2^1(D)$ и $u_k = 0$ в некоторой окрестности компакта $F_0 \cup F_1$, то v назовём пробной функцией (для $C_2(F_0, F_1, D)$).

Нам понадобится следующий критерий экстремальности функции u для $C_2(F_0, F_1, D)$ (см., например, [7]): функция u, $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L_2^1(D)$, $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, D)$, экстремальна для $C_2(F_0, F_1, D)$ тогда и только тогда, когда

$$\iint\limits_D (\nabla u, \nabla v)\, dxdy = 0 \tag{1}$$

для любой пробной функции v.

Семейство всех локально спрямляемых кривых γ, $\gamma \subset D$, соединяющих F_0 и F_1, обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, D)$, его 2-модуль – через $\rho_0(z, F_0, F_1, D)$.

Известно (см. [4]), что

$$C_2(F_0, F_1, D) = m_2(F_0, F_1, D) \tag{2}$$

и

$$\rho_0(z, F_0, F_1, D) = |\nabla u(z, F_0, F_1, D)|. \tag{3}$$

Положим $C(r) = \{z : |z| = r\}$ для $r > 0$,

$$K(R) = \{z : |z| < R\}, \qquad K(r, R) = \{z : r < |z| < R\}.$$

Пусть E – компакт в $\mathbb{C}$ такой, что для множества $E(r, R) = E \cap K(r, R)$ каждая его компонента связности не соединяет $C(r)$ и $C(R)$; $G(r, R) = K(r, R) \setminus E(r, R)$ – область в $\mathbb{C}$. Через $\varkappa_1$ обозначим внешнюю граничную компоненту области $G(r, R)$; через $\varkappa_0$ – граничную компоненту этой области, которая отделяет $z = 0$ от $\varkappa_1$.

Определение 1. *Область $G(r, R)$ назовём нормальной кольцевой областью с радиальными разрезами, если*

1) $\rho_0(z) = \rho_0\big(z, C(r), C(R), K(r, R)\big) = \Big(|z| \cdot \log \frac{R}{r}\Big)^{-1}$ – *обобщённая экстремальная метрика для* $\Gamma\big(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r, R)\big)$*;*

2) $m_2\big(C(r), C(R), K(r, R)\big) = m_2\big(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r, R)\big)$.

Определение 2. *Если для всех положительных, достаточно малых r множество $G(r, R)$ – нормальная кольцевая область с радиальными разрезами, то $G(R) = K(R) \setminus E$ назовём нормальной круговой областью с радиальными разрезами.*

Следующая теорема характеризует геометрию множеств, порождающих определённые выше нормальные области.

Теорема 1. *Если область $G(r, R)$ – нормальная кольцевая область с радиальными разрезами, то*

1) $\mathcal{L}_2\big(E(r, R)\big) = 0$,

2) $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$ – 2-*исключительное множество относительно* $G(r, R)$*;*

3) *каждая невырожденная компонента связности τ множества $E(r,R)$ является сегментом или полусегментом на луче l_τ, исходящим из точки $z{=}0$.*

Доказательство. Поскольку

$$m_2\big(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R)\big)=\iint\limits_{G(r,R)}\Big(|z|\ln\frac{R}{r}\Big)^{-2}dxdy=$$
$$=\iint\limits_{K(r,R)}\Big(|z|\ln\frac{R}{r}\Big)^{-2}dxdy=m_2\big(C(r),C(R),K(r,R)\big),$$

то $\mathcal{L}_2\big(G(r,R)\big)=\mathcal{L}_2\big(K(r,R)\big)$, значит, $\mathcal{L}_2\big(E(r,R)\big)=0$. Более того, ни одна из компонент связности множества $E(r,R)$ не ограничивает область в $K(r,R)$. Установим теперь свойство 2). В силу (1), (2) и определения экстремальной функции (см. [8, ц. 179]):

$$u_0=\frac{\ln|z|-\ln r}{\ln R-\ln r}\quad\text{для}\quad C_2\big(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R)\big),$$

найдутся $u_k\in\operatorname{Adm}\big(\varkappa_0,\varkappa_1,G(r,R)\big)$, $0\le u_k\le 1$ в $G(r,R)$, и постоянная c_k такие, что (см. [5, теорема 14]) при $k\to\infty$

$$\begin{gathered}\iint\limits_{G(r,R)}|\nabla u_k-\nabla u_0|^2\,dxdy\to 0,\\ u_k+c_k\to u_0\quad\text{в}\quad G(r,R)\setminus e_0\end{gathered}\tag{4}$$

где e_0 – 2-исключительное множество в $G(r,R)$,

$$\int\limits_\gamma|\nabla u_k-\nabla u_0|\,ds\to 0\tag{5}$$

для 2-почти всех спрямляемых кривых $\gamma\subset G(r,R)$. Пусть для такой кривой γ точка a – её начало, b – её конец. Из (5) сразу следует, что

$$\begin{aligned}u_k(b)-u_k(a)&=\int\limits_\gamma\frac{\partial u_k}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u_k}{\partial y}\,dy\to u_0(b)-u_0(a)=\\&=\int\limits_\gamma\frac{\partial u_0}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u_0}{\partial y}\,dy\end{aligned}\tag{6}$$

при $k \to \infty$. Если теперь для спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ один из её концов a, b принадлежит $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$, то

$$|u_k(b) - u_k(a)| = 1, \quad |u_0(b) - u_0(a)| < 1$$

и, следовательно, (6) и, значит, (5) для этой кривой γ не выполняется. Другими словами, 2-почти все кривые $\gamma \in \Gamma(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ соединяют $C(r)$ и $C(R)$ в $G(r,R)$. Это влечёт существование спрямляемой кривой $\gamma \subset G(r,R)$, соединяющей точку $b \in G(r,R) \setminus e_0$ с точкой $a \in C(r)$ и удовлетворяющей условию (6). Тогда при $k \to \infty$

$$u_k(b) - u_k(a) = u_k(b) \to u_0(b) - u_0(a) = u_0(b).$$

Это позволяет считать все c_k в (4) равными 0. Пусть теперь спрямляемая кривая $\gamma \subset G(r,R)$ соединяет точку $a \in G(r,R) \setminus e_0$ с точкой $b \in (\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$. Ясно, что $u_k(a) \to u_0(a)$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(b)$ равен 0 или 1, $0 < u_0(b) < 1$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \big(u_k(b) - u_k(a)\big) \neq u_0(b) - u_0(a)$, следовательно, условия (5), (6) не выполняются. Тогда семейство всех таких спрямляемых кривых является 2-исключительным относительно $G(r,R)$.

Пусть теперь τ – компонента связности множества $E(r,R)$, радиальная проекция которой на окружность $|z| = r$ есть невырожденная дуга λ. Пусть z_0 – точка τ, которая проектируется в середину дуги λ. Положим $\tilde\rho = 0$ в достаточно малой окрестности U точки z_0 и равной $\rho_0 = \Big(|z| \cdot \log\frac{R}{r}\Big)^{-1}$ в $K(r,R) \setminus U$. Известным приёмом (см. [9]) получим, что $\tilde\rho_0 \in \operatorname{adm}\big(C(r), C(R), K(r,R) \setminus \tau\big)$. Тогда

$$\begin{aligned} m_2\big(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)\big) &= m_2\big(C(r), C(R), G(r,R)\big) \le \\ &\le m_2\big(C(r), C(R), K(r,R) \setminus \tau\big) < m\big(C(r), C(R), K(r,R)\big). \end{aligned}$$

Это противоречит определению 1 для $G(r,R)$. Следовательно, τ является радиальным разрезом, замкнутым или полузамкнутым в $G(r,R)$.

Приведём теперь функциональную характеристику нормальной кольцевой области с радиальными разрезами. Положим $l(\varphi) = \{z : \arg z = \varphi\}$.

Теорема 2. *Пусть для области $G(r,R)$ компоненты связности множества $E(r,R)$ суть радиальные разрезы, возможно, вырожденные, $\mathcal{L}_2\big(E(r,R)\big) = 0$, $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$ – 2-исключительное множество относительно $G(r,R)$. $G(r,R)$ – нормальная кольцевая область с радиальными разрезами тогда и только тогда, когда любую функцию $f \in L_2^1\big(G(r,R)\big)$ можно продолжить до абсолютно непрерывной функции на $l(\varphi) \cap K(r,R)$ для почти всех (в смысле $\mathcal{L}_1$-меры) $\varphi \in [0,2\pi]$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G(r,R)$ – нормальная кольцевая область с радиальными разрезами. Тогда

$$u_0 = u_0(z, C(r), C(R), K(r,R)) = \frac{\ln|z| - \ln r}{\ln R - \ln r}$$

– экстремальная функция для $C_2(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$. Положим для $z = x+iy$: $|z| = \rho$, $\arg z = \varphi \in [0,2\pi]$, и пусть $T_1 = \{(\rho,\varphi) : z = \rho e^{i\varphi} \in K(r,R) \setminus (\varkappa_0 \cup \varkappa_1 \cup l(0))\}$, $T_2 = \{(\rho,\varphi) : z = \rho e^{i\varphi} \in G(r,R) \setminus l(0)$. Пусть f – некоторая функция из $L_2^1(G(r,R))$ и $w \in C_0^\infty(K(r,R) \setminus (\varkappa_0 \cup \varkappa_1 \cup l(0)))$. Применяя вариационное условие (1) и запись градиента функции в полярных координатах, получаем

$$\int\limits_{G(r,R)} (\nabla u_0, \nabla(f.w))\, dxdy = 0$$

или

$$\iint\limits_{G(r,R)} \frac{\partial u_0}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial (f\cdot w)}{\partial \rho}\, dxdy = \iint\limits_{T_2} \frac{\partial (f\cdot w)}{\partial \rho}\, d\rho d\varphi = 0. \tag{7}$$

Положим $f_1 = f$ на $G(r,R)$ и $f_1 = 0$ на $E(r,R)$; $v = \frac{\partial f}{\partial \rho}$ на $G(r,R)$ и $v = 0$ на $E(r,R)$. Из (7) и условия $\mathcal{L}_2(E(r,R)) = 0$ сразу следует

$$\iint\limits_{T_1} wv\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{T_2} w\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\, d\rho d\varphi = -\iint\limits_{T_2} \frac{\partial w}{\partial \rho} f_1\, d\rho d\varphi = \iint\limits_{T_1} f_1 \frac{\partial w}{\partial \rho}\, d\rho d\varphi.$$

В силу произвола в выборе w функция v – обобщённая производная по ρ функции f_1 в $K(r,R) \setminus \big(\varkappa_0 \cup \varkappa_1 \cup l(0)\big)$, суммируемая там со степенью 2. Тогда (см. [8]) f_1 и, следовательно, f продолжается до абсолютно непрерывной функции на $l(\varphi) \cap K(r,R)$ для почти всех φ из $[0,2\pi]$.

Достаточность. Поскольку $\mathcal{L}_2(E(r,R)) = 0$, $(\varkappa_0 \setminus C(r)) \cup (\varkappa_1 \setminus C(R))$ – 2-исключительное множество относительно $G(r,R)$, то $C(r) \subset \varkappa_0$, $C(R) \subset \varkappa_1$ и

$$m_2(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)) = m_2(C(r), C(R), G(r,R)) \leq \\ \leq m_2(C(r), C(R), K(r,R)). \quad (8)$$

Убедимся теперь в справедливости неравенства противоположного (8). Положим $\Gamma_1(r,R) = \{l(\varphi) \cap K(r,R) : \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Очевидно (см., например, [10]), $m_2(\Gamma_1(r,R)) = m_2(C(r), C(R), K(r,R))$. С другой стороны, пусть для $u_0 = u_0(z, \varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$ $\{u_k\}$ – последовательность функций $u_k \in \mathrm{Adm}(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R))$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_k = u_0$ в $L_2^1(G(r,R))$. Рассуждение из доказательства теоремы 1 и указанная абсолютная непрерывность функций u_k, u_0 приводят к оценке

$$1 = \int\limits_r^R \frac{\partial u_k(\rho e^{i\varphi})}{\partial \rho}\, d\rho = \int\limits_r^R \frac{\partial u_0(\rho e^{i\varphi})}{\partial \rho}\, d\rho \leq \int\limits_r^R |\mathrm{grad} u_0(\rho e^{i\varphi})|\, d\rho$$

для почти всех φ из $[0, 2\pi)$. Следовательно, $|\mathrm{grad} u_0| \in \mathrm{adm}(\Gamma_1(r,R) \setminus \tilde{\Gamma}_1)$, где $m_2(\tilde{\Gamma}_1) = 0$. Отсюда

$$m_2(\Gamma_1) \leq \iint\limits_{G(r,R)} |\nabla u_0|^2\, dxdy = m_2(\varkappa_0, \varkappa_1, G(r,R)).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Замечание 2. Заменим в определениях модуля $m_2(\Gamma)$ и ёмкости $C_2(F_0, F_1, D)$ показатель суммируемости 2 в интегралах на $p \in (1, +\infty)$, $\mathbb{C}$ – на евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и заметим, что доказательства теорем 1, 2 не используют технику конформных отображений. Данное обстоятельство позволяет распространить указанные теоремы на p-нормальные сферические области с радиальными разрезами.

§3. Теоремы существования

Рассмотрим бесконечносвязную область $D \subset \mathbb{C}$ с двумя отмеченными граничными компонентами l_0, l_1, для которой $m_2(l_0, l_1, D) = \frac{2\pi}{\ln R} > 0$.

Пусть $\{D_n\}$ – исчерпание области D изнутри областями D_n, где D_n ограничена конечным числом замкнутых спрямляемых кривых Жордана, $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n\geq 1} D_n = D$; l_{0n} – граничная компонента области D_n, отделяющая точки области D_n от l_0, l_{1n} – граничная компонента области D_n, отделяющая точки D от l_1. Пусть $f_n \in \mathcal{F}(l_{0n}, l_{1n}, D)$ – каноническое отображение области D_n на конечносвязную нормальную область $G(1, R_n)$ с радиальными разрезами (см., например, [8, стр. 124]). Ясно, что $1 \leq |f_n(z)| \leq R_n \leq R$ в D_n и для фиксированной замкнутой простой гладкой кривой γ, отделяющей l_{0n} от l_{1n} в D_n, $n \geq 1$, справедливо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = 1.$$

Следовательно, $f_n(z) \to f_0(z) \in \mathcal{F}(l_0, l_1, D)$ равномерно внутри D.

Теорема 3. *Функция $w = f_0(z)$ отображает область D на нормальную кольцевую область вида $G(1, R)$ с радиальными разрезами. Если $w = \tilde{f}_0(z) \in \mathcal{F}(l_0, l_1, D)$ – ещё одна такая же функция, то $\tilde{f}_0(z) = e^{i\alpha} f_0(z)$ для некоторого $\alpha \in [0, 2\pi)$.*

Доказательство. Из определения функции $w = f_n(z)$ следует, что

$$\rho_{0n}(z) = \rho_0(z, l_{0n}, l_{1n}, D) = \left(\left|\frac{f_n(z)}{f_n'(z)}\right| \log R_n\right)^{-1}$$

– экстремальная метрика для $\Gamma(l_{0n}, l_{1n}, D_n)$. Положим $\rho_{0n}(z) = 0$ вне D_n. Поскольку

$$\frac{\rho_{0n}(z) + \rho_{0m}(z)}{2} \in \mathrm{adm}\Gamma(l_{0n}, l_{1n}, D_n)$$

для $n \geq m$, то в силу неравенства Кларксона (см. [11])

$$\iint\limits_{D_n}\left|\frac{\rho_{0n}(z)+\rho_{0m}(z)}{2}\right|^2 dxdy + \iint\limits_{D_n}\left|\frac{\rho_{0n}(z)-\rho_{0m}(z)}{2}\right|^2 dxdy \leq \frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_n}\rho_{0n}^2\,dxdy + \iint\limits_{D_m}\rho_{0m}^2\,dxdy\right).$$

Это влечёт фундаментальность $\{\rho_{0n}\}$ и, значит, её сходимость в среднем к функции ρ_0 такой, что $\iint\limits_D \rho_0^2\,dxdy = m_2(l_0, l_1, D)$. С другой стороны,

$$\rho_{0n} = \frac{|f_n'|}{|f_n|\cdot\ln R_n} \to \frac{|f_0'|}{|f_0|\cdot\ln R} \quad \text{в } D.$$

Поэтому $\rho_0 = \frac{|f_0'|}{|f_0|\cdot\ln R}$ – обобщённая экстремальная метрика для $\Gamma(l_0, l_1, D)$. Ввиду конформной инвариантности 2-модуля, в области $f_0(D)$ выполняются соотношения

$$\rho_0\big(w, f_0(l_0), f_0(l_1), f_0(D)\big) = \big(|w|\log R\big)^{-1},$$
$$m_2\big(C(r), C(R), K(1,R)\big) = m_2\big(f_0(l_0), f_0(l_1), f_0(D)\big).$$

Другими словами, $f_0(D)$ – нормальная кольцевая область $G(1,R)$ с радиальными разрезами. Если $\tilde f_0(z) \in \mathcal{F}(l_0, l_1, D)$ также отображает область D на нормальную кольцевую область $\tilde G(1,\tilde R)$ с радиальными разрезами, то, очевидно, $R = \tilde R$ и

$$\operatorname{Re}\left(\ln\left(\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}\right)\right) = \ln\left(\frac{|f_0'(z)|}{|f_0(z)|}\right) = \operatorname{Re}\left(\ln\left(\frac{\tilde f_0'(z)}{\tilde f_0(z)}\right)\right)$$

в силу единственности обобщённой экстремальной метрики $\rho_0\big(z, l_0, l_1, D\big)$.

Отсюда $\tilde f_0(z) = e^{i\alpha} f_0(z)$ для некоторого $\alpha \in [0, 2\pi)$, что завершает доказательство теоремы 3.

Перейдём теперь к рассмотрению существования конформного и однолистного отображения бесконечносвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с отмеченной граничной компонентой l и фиксированной точкой $z_0 \in D$ на нормальную круговую область с радиальными разрезами. Пусть для области D найдётся круг $U(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, такой, что $\overline{U}(z_0, \varepsilon) \subset D$ и

$$m_2\big(C(\varepsilon), l, D \setminus \overline{U}(z_0, \varepsilon)\big) > 0. \tag{9}$$

Пусть $\{Q_n\}$ – исчерпание области D изнутри областями $Q_n \ni z_0$, где Q_n ограничена конечным числом замкнутых спрямляемых кривых Жордана, $\overline{Q}_n \subset Q_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n\geq 1} Q_n = D$, $\overline{U}(z_0, \varepsilon) \subset Q_n$; l_n – граничная компонента области Q_n, отделяющая z_0 от l; $g_n \in \mathcal{F}(z_0, l_n, Q_n)$ – каноническое отображение области Q_n на нормальную круговую область $K(R_n)$ с радиальными разрезами, $g_n'(z_0) = 1$ (см. [10]). Положим $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R_0$. Заметим, что $R_0 < +\infty$.

Действительно, последовательность $\{g_n(z)\}$ компактна на $U(z_0, \varepsilon)$ ($\varepsilon \cdot g_n\bigl(\frac{z_0+z}{\varepsilon}\bigr)$ принадлежит известному классу S однолистных функций в единичном круге) и по обобщенному признаку компактности (см. [12]), применённому для $\{g_n(z)\}$ в области $D \setminus \{z_0\}$, можно считать, что $g_n(z) \to g_0(z) \in \mathcal{F}(z_0, l, D)$ равномерно внутри D.

Пусть $M = \sup\limits_n |g_n(z)|$ на $C(\varepsilon)$. Тогда для достаточно больших n

$$m_2\bigl(C(\varepsilon), l, D\bigr) \le m_2\bigl(C(\varepsilon), l_n, D\bigr) \le m_2\bigl(C(M), C(R_n), g(D_n)\bigr). \quad (10)$$

Сравнивая (9), (10) и учитывая определение 2 для $G(R_n) = g_n(D_n)$, получаем указанное условие из оценки

$$2\pi\Bigl(\ln\frac{R_n}{M}\Bigr)^{-1} \ge m_2\bigl(C(\varepsilon), l, D\bigr) > 0.$$

Покажем теперь, как из теорем 1, 2 можно установить классический результат Штребеля [2], Рейха [3].

Теорема 4. *Функция $g_0(z)$ отображает область D на нормальную круговую область с радиальными разрезами. Если $g \in \mathcal{F}(z_0, l, D)$, $g'(z_0) = 1$ и $g(D)$ – нормальная круговая область с радиальными разрезами, то $g(z) = g_0(z)$ в D.*

Доказательство. По построению, $g_0(D) \subset K(R_0)$. Выбор r подчиним условию $\overline{U}(0, r) \subset g_0(D)$, $g_n(D_n)$, $n \ge 1$.

Покажем, согласно определению 2, что $K(r, R) \cap g_0(D) = G(r, R_0)$ – нормальная круговая область с радиальными разрезами. Положим $g_0^{-1}\bigl(\overline{U}(0, r)\bigr) = U$, $g_n^{-1}\bigl(\overline{U}(0, r)\bigr) = U_n$, $\Omega = D \setminus U$, $\Omega_n = D_n \setminus U$, $\tilde{\Omega}_n = D_n \setminus U_n$, $g_0^{-1}\bigl(C(r)\bigr) = l_0$, $g_n^{-1}\bigl(C(r)\bigr) = \tilde{l}_{0n}$; $m_n = \inf|w|$, $M_n = \sup|w|$ на $g_n(\tilde{l}_{0n})$. Ясно, что $m_n = r + o(1)$, $M_n = r + o(1)$. Поэтому в силу непрерывности модуля конденсатора [4]

$$\begin{aligned} m_2(l_0, l_n, \Omega_n) &= m_2(l_0, l, \Omega) + o(1), \\ m_2(\tilde{l}_{0n}, l_n, \tilde{\Omega}_n) &= m_2(l_0, l, \Omega) + o(1). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \dfrac{|f_n'(z)|}{|f_n(z)|}\Bigl(\ln\dfrac{R_n}{M_n}\Bigr)^{-1}, & z \in \Omega_n, \\ 0, & z \notin \Omega_n. \end{cases}$$

Тогда $\rho_n \in \mathrm{adm}\Gamma(l_0, l, \Omega)$ и

$$\iint\limits_{\Omega} \rho_n^2 \, dxdy = m_2\big(C(r), C(R_n), g_n(\tilde{Q}_n)\big) + o(1). \tag{12}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 с учётом (11), (12), установим, что

$$\rho_n(z) \to \rho_0(z) = \rho_0(z, l_0, l, \Omega) = \frac{|g_0'(z)|}{|g_0(z)|}\Big(\ln \frac{R_0}{r}\Big)^{-1}$$

в среднем по области Ω и

$$\iint\limits_{\Omega} \rho_0^2 \, dxdy = m_2(l_0, l, \Omega) = 2\pi\Big(\ln \frac{R_0}{r}\Big)^{-1}.$$

В силу конформной инвариантности 2-модуля $g_0(\Omega) = G(r, R_0)$ – требуемая область, а функция $g_0(z) : D \to \mathbb{C}$ осуществляет заданное отображение.

Пусть теперь для $g(z) \in \mathcal{F}(z_0, l, D)$, $g'(z_0) = 1$, $g(D) = G(\tilde{R}_0)$ – нормальная круговая область с радиальными разрезами. Положим $m(r) = \inf |w|$, $M(r) = \sup |w|$ на $g(l_0)$. В силу нормировки $g_0(z)$, $g(z)$ для малых r кривая $g(l_0)$ выпукла (см. [12, стр. 167]) и справедливы равенства

$$m(r) = r + o(r), \quad M(r) = r + o(r). \tag{13}$$

Используя изложенное выше, отсюда заменой $g_n(z)$ на $g(z)$ сразу получаем

$$m_2(l_0, l, \Omega) = 2\pi\Big(\ln \frac{R_0}{r}\Big)^{-1} = 2\pi \ln \frac{\tilde{R}_0}{r}\big(1 + o(1)\big),$$

что влечёт $R_0 = \tilde{R}_0$. Покажем равенство $g = g_0$ в D. Введём обозначение $g(\Omega) = B$, $B(r)$ – двусвязная область, ограниченная $g(l_0)$ и окружностью $C(R)$, $\varphi(w) = g_0\big(g^{-1}(w)\big) : g(D) \to g_0(D)$, $\Gamma(r) = \{l(\psi) \cap B(r) : 0 \le \psi \le 2\pi\}$. По построению, $u_0(w) = \dfrac{\ln|\varphi(w)| - \ln r}{\ln R_0 - \ln r}$ – экстремальная функция для $C_2\big(g(l_0), C(R_0), B\big)$, $|\mathrm{grad} u_0(w)| = \frac{|\varphi'(w)|}{|\varphi(w)|}\Big(\ln \frac{R_0}{r}\Big)^{-1}$ в B.

Согласно теореме 2, функция $\varphi(w)$ абсолютно непрерывна на 2-почти всех γ из $\Gamma(r)$. Более того, рассуждения из доказательства теоремы 2 (заменой $\Gamma(r, R)$ на $\Gamma(r)$) показывают, что для

2-почти всех кривых γ кривая $\varphi(\gamma)$ соединяет точку $a_\gamma \in C(r)$ с точкой $b_\gamma \in C(R_0)$. Следовательно, для таких кривых γ

$$\int\limits_\gamma \frac{\partial u_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial u_0}{\partial v}\,dv = 1 \qquad (w = u + iv)$$

и, тем более, $\int\limits_\gamma |\mathrm{grad} u_0|\,|dw| \geq 1$ или $\int\limits_\gamma \left|\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}\right| |dw| \geq \ln R_0 - \ln r$. Если теперь функция $\varphi(w)$ не отображает радиусы, исходящие из $w = 0$, в самих себя, то

$$\int\limits_{\gamma\cap K\left(M(r), R_0\right)} \left|\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}\right| |dw| \geq \ln R_0 - \ln r + k + o(1),$$

где ψ в определении $\gamma = l(\psi) \cap B(r)$ берётся из множества $e \subset [0, 2\pi)$, $\mathcal{L}_1(e) > 0$, постоянная $k > 0$ и не зависит от выбора $\psi \in e$, $r \to 0$.

Применяя известную лемму об избытке "площади над модулем" (см. [10, стр. 37]), устанавливаем противоречие

$$2\pi\Big(\ln\frac{R_0}{r}\Big)^{-1} \geq \iint\limits_{B\cap K(M(r), R_0)} \left(\frac{|\varphi(w)|}{|\varphi'(w)|}\ln\frac{R}{r}\right)^{-2} dudv \geq$$

$$\geq 2\pi\Big(\ln\frac{R_0}{r}\Big)^{-1}\big(1 + k + o(1)\big).$$

Следовательно, функция $\varphi(w)$ должна отображать радиусы в себя (хотя бы в малой окрестности точки $w = 0$). С учётом нормировки и известных условий Коши–Римана в полярных координатах это реализует равенство $\varphi(w) = w$. Отсюда $g_0(z) = g(z)$ в D, что завершает доказательство теоремы 4.

§4. Экстремальные задачи для $f \in \mathcal{F}(l_0, l_1, D)$, $\mathcal{F}(z_0, l, D)$

Пусть $w = f(z)$ регулярна и однолистна в D, l – некоторая граничная компонента области D. Для f существует величина

$$m(f, l) = \operatorname*{ess\,inf}_{w\in f(l)} |w|,$$

понимаемая как наибольшее среди чисел m, обладающих тем свойством, что множество всех $w \in f(l)$, для которых $|w| <$

m, является 2-исключительным множеством относительно $f(D)$. Аналогично определим $M(f,l) = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in f(l)} |w|$.

Далее обобщаются на случай бесконечносвязных областей с естественными ограничениями результаты (см. [1–3, 10]), описывающие экстремальные свойства канонических отображений на круговые, кольцевые области с радиальными разрезами.

Теорема 5. *Если $f \in \mathcal{F}(l_0, l_1, D)$, $m_2(l_0, l_1, D) = 2\pi(\ln R)^{-1}$ и $M(f, l_0) = 1$, то $m(f, l_1) \le R$. Равенство достигается только для $f(z) = e^{i\alpha} f_0(z)$, где $\alpha \in [0, 2\pi]$ и $f_0(z)$ из теоремы 3.*

Доказательство. Предположим, что $m = m(f, l_1) > R$. Отсюда

$$m_2(l_0, l_1, D) = m_2\bigl(f(l_0), f(l_1), f(D)\bigr) \le \\ \le m_2\bigl(C(1), C(m), K(1,m)\bigr) < m_2\bigl(C(1), R, K(1,R)\bigr). \quad (14)$$

Соотношение (14) противоречиво, значит, $m \le R$. Равенство в (14) достигается, если

$$f(D) \subset K(1,R), \quad \mathcal{L}_2\bigl(K(1,R) \setminus f(D)\bigr) = 0$$

и $\rho_0(w) = \bigl(|w| \ln R\bigr)^{-1}$ – обобщённая экстремальная метрика для $\Gamma\bigl(f(l_0), f(l_1), f(D)\bigr)$. Другими словами, $f(D) = G(1,R)$ – нормальная кольцевая область с радиальными разрезами. По теореме 3 $f(z) = e^{i\alpha} f_0(z)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Если $f \in \mathcal{F}(z_0, l, D)$, $f'(z_0) = 1$, $m_2\bigl(C(\varepsilon), l, D\bigr) > 0$ для $\overline{U}(z_0, \varepsilon) \subset D$, то*

$$m(f,l) \le R_0.$$

Равенство здесь достигается только для $f(z) = g_0(z)$, где R_0, $g_0(z)$ из теоремы 4.

Доказательство. Предположим, что $m = m(f,l) > R_0$. Пусть $f^{-1}\bigl(C(r)\bigr) = l_0$ и $m(r) = \min |w|$, $M(r) = \max |w|$ на $g_0(l_0)$ для малых r. Из рассуждений в доказательстве теоремы 4 и общих свойств модуля $m_2(\Gamma)$ следует

$$m_2(l_0, l_1, D) \le m_2\bigl(C(r), C(m), K(r,m)\bigr) < \\ < m_2\bigl(C(r), C(R_0), K(r, R_0)\bigr) = \\ = m_2\bigl(g_0(l_0), C(R_0), g_0(D)\bigr)\bigl(1 + o(1)\bigr). \quad (15)$$

Поскольку (15) противоречиво, то $m \le R_0$. Пусть теперь $m = R_0$. Ввиду (15) это возможно только при выполнении условий

$$f(D) \subset K(R_0), \quad \mathcal{L}_2\big(K(R_0) \setminus f(D)\big) = 0$$

$$\rho_0 = \Big(|w| \cdot \ln \frac{R_0}{r}\Big)^{-1} \in \operatorname{adm}\big(\Gamma\big(C(r), C(R_0), f(D)\big) \setminus \Gamma_0\big),$$

где $m_2(\Gamma_0) = 0$.

Предположим, что $f(D) \cap K(r, R_0)$ не является нормальной областью для всех достаточно малых r. Возьмём малое r': $0 < r < r'$. Тогда из тех же соображений и из-за нормальности $g_0(D)$ имеем

$$m_2^{-1}\big(C(r), C(r'), f(D))\big) + m_2^{-1}\big(C(r'), C(R_0), f(D))\big) \le$$

$$\le m_2^{-1}\big(C(r), C(R_0), f(D))\big) = \Big(m_2\big(C(r), C(R_0), g_0(D)\big)(1+o(1))\Big)^{-1} =$$

$$= m_2^{-1}\big(C(r), C(r'), g_0(D))\big) + m_2^{-1}\big(C(r'), C(R_0), g_0(D))\big)(1+o(1)). \quad (16)$$

Фиксируя r' и устремляя r к нулю, из (16) снова получим противоречие.

Таким образом, $f(D)$ – нормальная круговая область с радиальными разрезами. По теореме 4 это осуществляется только для $f(z) = g_0(z)$ в D, что завершает доказательство теоремы 6.

Литература

1. E. Reich, S. E. Warschawski, *On canonicl conformal maps of region of arbitrary connectivity*, Pacif. J. Math. **10**, No. 3 (1960), 965–989.
2. K. Strebel, *Die extremale Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I, **179** (1955), 1–22.
3. E. Reich, *On radial slit mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A. I. **296** (1961), 1–12.
4. И. Н. Дёмшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств*, Зап. науч. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
5. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
6. А. В. Сычёв, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск, 1983.
7. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity*, Trans. Amer. Math. Soc. 126, No. 3 (1967), 460–473.
8. В. Н. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, М., 1983.

9. И. П. Митюк, *Обобщённый приведённый модуль и некоторые его применения*, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, No. 2 (1964), 110–119.
10. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
11. С. Н. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., 1977.
12. Г.М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-ое изд., М., 1966.

Дальневосточный государственный
университет, Владивосток

Поступило 10 июля 2006 г.

E-mail: yurakl@imcs.dvgu.ru