Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{f(z_1),\dots,f(z_n)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ. III

**Посвящается 100-летию
со дня рождения моего отца**

Введение

К числу известных классов функций, рассматриваемых в геометрической теории функций, относится класс T функций, регулярных и типично вещественных в круге $U=\{z:|z|<1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} f(z)\cdot\operatorname{Im} z>0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z\neq 0.$$

Пусть S – класс функций вида

$$f(z)=z+c_2z^2+\dots, \tag{1}$$

регулярных и однолистных в круге U. Класс T содержит подкласс S_R функций из S с вещественными коэффициентами $c_2,c_3,\dots$: класс T представляет собой замкнутую выпуклую оболочку класса S_R.

Класс T обладает более простыми экстремальными свойствами по сравнению с классом S_R. Одной из причин этого факта является интегральное представление класса T, полученное М. Робертсоном [1] и Г. М. Голузиным [2]:

$$f(z)\in T \Leftrightarrow f(z)=\int\limits_{-1}^{1} s(z,t)d\alpha(t), \quad \alpha(t)\in M_1, \tag{2}$$

где $s(z,t)=z(1-2tz+z^2)^{-1}$, M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1,1]$, таких, что $\int_{-1}^{1}d\alpha(t)=1$.

Из этого результата непосредственно следует, что множество значений $f(z_0)$ в классе T, ранее найденное Рогозинским

[3], представляет собой, в случае $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, круговой сегмент, ограниченный дугой Γ окружности, проходящей через точки $0, K(z_0), -K(-z_0)$, и отрезком $[K(z_0), -K(-z_0)]$, где $K(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ – функция Кёбе. Задача о множестве значений величины $f(z_0)$ в классе S_R является значительно более сложной. Тогда как $\max|f(z_0)|$ в классе S_R реализуется точками дуги Γ, среди функций реализующих $\min|f(z_0)|$ в классе S_R, имеются функции весьма трансцендентной природы. Множество значений $f(z_0)$ в классе S_R с описанием всех граничных функций этого множества определено в детальном исследовании С. И. Федорова [4].

С помощью интегрального представления класса T удается получить результаты общего характера в задаче о множестве значений на классе T системы вида $\{f(z_j)\}$, где z_j, $j = 1, 2, \dots, M$, – различные точки круга U.

Пусть $\{z_j\}_{j=1}^{m+n}$ – заданные различные точки круга U, удовлетворяющие условию:

$\operatorname{Im} z_j \neq 0$ при $j = 1, 2, \dots, m$,

$\operatorname{Im} z_j = 0$ при $j = m+1, m+2, \dots, m+n$,

$m + n \geqslant 1$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$.

Данная работа завершает серию статей автора в "Зап. научн. семин. ПОМИ," посвященных определению в классе T множества значений системы вида

$$I_{m,n}(f) = \{f(z_j)\}_{j=1}^{m+n}. \qquad (3)$$

Представление (2) позволяет свести задачу определения множества значений системы (3) на классе T к обобщенной проблеме моментов и использовать известные критерии разрешимости проблемы моментов. Такой способ был применен для класса T впервые в работе автора [5] при характеристике множества значений системы

$$\{f(z_1), f'(z_1), \dots, f^{(m_1)}(z_1), \dots, f(z_n), f'(z_n), \dots, f^{(m_n)}(z_n)\}.$$

$z_j \in U$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Ранее аналогичная задача была решена [6] для C-функций Каратеодори с использованием интегрального представления класса C.

Множество значений системы $I_{m,n}(f)$ найдено автором в [7] при $m \geqslant 1$, $n = 0$, в [8] при $m \geqslant 1$, $n = 1$. Частные случаи этой задачи рассмотрены в [9] $(m = n = 1)$, в [10] $(m = 2, n = 0)$, в

[11] ($m+n=3$). В качестве приложений в работах [7, 8, 10, 11] найдено множество значений $f(z_1)$ в подклассе функций из T с фиксированными значениями $\{f(z_j)\}_{j=2}^{m+n}$.

В настоящей работе получено логическое завершение указанных результатов: исследован случай $n>1$, $m\geqslant 1$. Дана алгебраическая характеристика множества значений системы (3) в виде требования неотрицательности некоторых эрмитовых форм и найдены все граничные функции. В случае $\operatorname{Im} z_j = 0$, $j=2,3,4$, найдено множество значений $f(z_1)$ при фиксированных значениях $f(z_j)$, $j=2,3,4$.

1. Обозначения и формулировки результатов

1. Пусть $\{z_j\}_{j=1}^m$ и $\{r_j\}_{j=1}^n$ – заданные различные точки круга U, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j=1,2,\ldots,m$, $0<r_j<1$, $j=1,2,\ldots,n$, и $n>1$.

Обозначим через $D_{m,n}(T)$ множество значений системы

$$I(f)=\{f(z_1),f(z_2),\ldots,f(z_m),f(r_1),f(r_2),\ldots,f(r_n)\}$$

на классе T.

Пусть

$$\zeta_j = z_j+\frac{1}{z_j},\quad w_j=x_j+iy_j=f(z_j),\quad x_j,y_j\in\mathbb{R},\quad j=1,2,\ldots,m;$$

$$\rho_j=r_j+\frac{1}{r_j},\quad x'_j=x_{m+j}=f(r_j),\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Введем следующие обозначения. В случае $n=2N$ положим

$$g_j=\prod_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{n}(\rho_{j'}-\rho_j)^{-1},\quad h_j=\left(1-\frac{\rho_j^2}{4}\right)g_j,\quad j=1,2,\ldots,n;$$

$$c_j=\prod_{j'=1}^{n}(\rho_{j'}-\zeta_j)^{-1},\quad d_j=\left(1-\frac{\zeta_j^2}{4}\right)c_j,\quad j=1,2,\ldots,m;$$

$$a_{kl}=\sum_{j=1}^{n}g_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l}x'_j\quad\text{при}\quad k,l=0,1,\ldots,N,\quad k+l\neq 2N;$$

$$a_{NN}=\sum_{j=1}^{n}g_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{2N}x'_j+\left(\frac{1}{2}\right)^{2N};$$

$$a_{kl}=\sum_{j=1}^{n} g_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k \frac{x'_j}{\zeta_{l-N}-\rho_j}+c_{l-N}\left(\frac{\zeta_{l-N}}{2}\right)^k w_{l-N}$$

при $k=0,1,\ldots,N$ и $l=N+1,N+2,\ldots,N+m$;

$$a_{kl}=\sum_{j=1}^{n} g_j \frac{x'_j}{(\overline{\zeta}_{k-N}-\rho_j)(\zeta_{l-N}-\rho_j)}+\frac{c_{l-N}w_{l-N}-\overline{c}_{k-N}\overline{w}_{k-N}}{\overline{\zeta}_{k-N}-\zeta_{l-N}}$$

при $k,l=N+1,N+2,\ldots,N+m$ и $k\leqslant l$;

$$a_{lk}=\overline{a}_{kl};$$

$$b_{kl}=\sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l} x'_j \quad \text{при} \quad k,l=0,1,\ldots,N-1, k+l\neq 2N-2;$$

$$b_{(N-1)(N-1)}=\sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{2N-2} x'_j-(\frac{1}{2})^{2N};$$

$$b_{kl}=\sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k \frac{x'_j}{\zeta_{l-N+1}-\rho_j}+d_{l-N+1}\left(\frac{\zeta_{l-N+1}}{2}\right)^k w_{l-N+1}$$

при $k=0,1,\ldots,N-1$ и $l=N,N+1,\ldots,N+m-1$;

$$b_{kl}=\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{x'_j}{(\overline{\zeta}_{k-N+1}-\rho_j)(\zeta_{l-N+1}-\rho_j)}$$
$$+\frac{d_{l-N+1}w_{l-N+1}-\overline{d}_{k-N+1}\overline{w}_{k-N+1}}{\overline{\zeta}_{k-N+1}-\zeta_{l-N+1}}$$

при $k,l=N,N+1,\ldots,N+m-1,\quad k\leqslant l$;

$$b_{lk}=\overline{b}_{kl}.$$

В случае $n=2N+1$ положим $\varepsilon=\pm1$,

$$h_j^{(\varepsilon)}=\left(1+\frac{\varepsilon\rho_j}{2}\right)\prod_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{n}(\rho_{j'}-\rho_j)^{-1},\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$d_j^{(\varepsilon)}=\left(1+\frac{\varepsilon\zeta_j}{2}\right)\prod_{j'=1}^{n}(\rho_{j'}-\zeta_j)^{-1},\quad j=1,2,\ldots,m;$$

$$a_{kl}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l} x_j' \quad \text{при} \quad k, l = 0, 1, \ldots, N, k+l \neq 2N;$$

$$a_{NN}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \left(\frac{p_j}{2}\right)^{2N} x_j' - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

$$a_{kl}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k} \frac{x_j'}{\zeta_{l-N} - \rho_j} + d_{l-N}^{(\varepsilon)} \left(\frac{\zeta_{l-N}}{2}\right)^{k} w_{l-N}$$

$$\text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, N \quad \text{и} \quad l = N+1, N+2, \ldots, N+m;$$

$$a_{kl}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_j'}{(\overline{\zeta}_{k-N} - \rho_j)(\zeta_{l-N} - \rho_j)} + \frac{d_{l-N}^{(\varepsilon)} w_{l-N} - \overline{d_{k-N}^{(\varepsilon)}}\, \overline{w}_{k-N}}{\overline{\zeta}_{k-N} - \zeta_{l-N}}$$

$$\text{при} \quad k, l = N+1, N+2, \ldots, N+m \quad \text{и} \quad k \leqslant l;$$

$$a_{lk}^{(\varepsilon)} = \overline{a_{kl}^{(\varepsilon)}}.$$

При введенных выше обозначениях имеет место

Теорема 1. 1. *Множество $D_{m,n}(T)$ $(m \geqslant 1, n > 1)$ значений системы $I_{m,n}(f)$ на классе T есть множество всех точек*

$$X = X(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^{2m+n},$$

в которых неотрицательны все главные миноры матриц A и B, где

$$A = (a_{kl})_0^{m+N}, \quad B = (b_{kl})_0^{m+N-1}, \quad \text{если} \quad n = 2N,$$

$$A = (a_{kl}^{(1)})_0^{m+N}, \quad B = (a_{kl}^{(-1)})_0^{m+N}, \quad \text{если} \quad n = 2N+1.$$

2. *Для того, чтобы некоторая точка*

$$X = X(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^{2m+n}$$

была внутренней точкой множества $D_{m,n}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\det(a_{kl})_0^{s} > 0, \quad \det(b_{kl})_0^{s'} > 0, \quad s = 0, 1, \ldots, m+N,$$
$$s' = 0, 1, \ldots, m+N-1, \quad \text{если} \quad n = 2N,$$

и

$$\det(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^s > 0, s = 0, 1, \ldots, m+N, \varepsilon = \pm 1, \quad \textit{если} \quad n = 2N+1.$$

3. *Каждой точке* $X \in \partial D_{m,n}(T)$ *соответствует только одна функция класса* T *и она имеет вид*

$$f_X(z) = \sum_{k=1}^{m+N+1} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2},$$

где $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m+N+1} \lambda_k = 1$, $t_j \neq t_k$ *при* $j \neq k$, *и*
при $n = 2N$
либо $-1 < t_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m+N+1$,
либо $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $-1 < t_k < 1$, $k = 3, 4, \ldots, m+N+1$,
а при $n = 2N+1$
$t_1 = 1$ *либо* $-1, -1 < t_k < 1$, $k = 2, 3, \ldots, m+N+1$.

2. Представим матрицы A и B в виде блочных матриц:

$$A = (a_{kl})_0^{m+N} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}N+1 \\ \}m \end{array} \\ \underbrace{\quad\quad}_{N+1} \quad \underbrace{\quad\quad}_{m} \quad\quad\quad \end{array},$$

$$B = (b_{kl})_0^{m+N-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}N \\ \}m \end{array} \\ \underbrace{\quad\quad}_{N} \quad \underbrace{\quad\quad}_{m} \quad\quad \end{array},$$

$$A \equiv A^{(1)} = (a_{kl}^{(1)})_0^{m+N} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}N+1 \\ \}m \end{array} \\ \underbrace{\quad\quad}_{N+1} \quad \underbrace{\quad\quad}_{m} \quad\quad\quad \end{array},$$

$$B \equiv A^{(-1)} = (a_{kl}^{(-1)})_0^{m+N} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11}^{(-1)} & A_{12}^{(-1)} \\ A_{21}^{(-1)} & A_{22}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}N+1 \\ \}m \end{array} \\ \underbrace{\quad\quad}_{N+1} \quad \underbrace{\quad\quad}_{m} \quad\quad\quad \end{array},$$

Тогда в случае $m = 1$ имеем

$$A_{11} = \left(a_{kl}\right)_0^N = \left(\sum_{j=1}^{n} g_j \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l} x_j' + g_0\right)_{k,l=0,1,\ldots,N},$$

где $g_0 = 0$ при $k+l \neq 2N$ и $g_0 = (\frac{1}{4})^N$ при $k+l = 2N$,

$$A_{12} = (a_{kl})_{\substack{k=0,1,\dots,N \\ l=N+1}} = \left(\sum_{j=1}^{n} g_j \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k \frac{x'_j}{\zeta_1 - \rho_j} + c_1 \left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^k w_1 \right)_{k=0}^{N},$$

$$A_{21} = (a_{kl})_{\substack{k=N+1 \\ l=0,1,\dots,N}},$$

$$A_{22} = \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{x'_j}{|\zeta_1 - \rho_j|^2} - \frac{\operatorname{Im}(c_1 w_1)}{\operatorname{Im}\zeta_1};$$

$$B_{11} = (b_{kl})_0^{N-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l} x'_j + h_0 \right)_{k,l=0}^{N-1},$$

где $h_0 = 0$ при $k+l \neq 2N-2$ и $h_0 = -(\frac{1}{4})^N$ при $k+l = 2N-2$,

$$B_{12} = (b_{kl})_{\substack{k=0,1,\dots,N-1 \\ l=N}} = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k \frac{x'_j}{\zeta_1 - \rho_j} + d_1 \left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^k w_1 \right)_{k=0}^{N-1},$$

$$B_{21} = (b_{kl})_{\substack{k=N \\ l=0,1,\dots,N-1}},$$

$$B_{22} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{x'_j}{|\zeta_1 - \rho_j|^2} - \frac{\operatorname{Im}(d_1 w_1)}{\operatorname{Im}\zeta_1};$$

$$A_{11}^{(\varepsilon)} = (a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^N = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l} x'_j + h_0^{(\varepsilon)} \right)_{k,l=0}^{N},$$

где $h_0^{(\varepsilon)} = 0$ при $k+l \neq 2N$ и $h_0^{(\varepsilon)} = -\frac{\varepsilon}{4^N}$ при $k+l = 2N$,

$$A_{12}^{(\varepsilon)} = (a_{kl}^{(\varepsilon)})_{\substack{k=0,1,\dots,N \\ l=N+1}} = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x'_j}{\zeta_1 - \rho_j} \left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k + d_1^{(\varepsilon)} \left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^k w_1 \right)_{k=0}^{N}$$

$$A_{21}^{(\varepsilon)} = (a_{kl}^{(\varepsilon)})_{\substack{k=N+1 \\ l=0,1,\dots,N}},$$

$$A_{22}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x'_j}{|\zeta_1 - \rho_j|^2} - \frac{\operatorname{Im}(d_1^{(\varepsilon)} w_1)}{\operatorname{Im}\zeta_1},$$

$\varepsilon = \pm 1$.

В случае $m = 1$, $n = 3$ $(N = 1)$ имеем

$$A^{(\varepsilon)} \equiv A^{(\varepsilon)}(w_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= \begin{pmatrix} a_{00}^{(\varepsilon)} & a_{01}^{(\varepsilon)} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_j'}{\zeta_1 - \rho_j} + d_1^{(\varepsilon)} w_1 \\ \overline{a_{01}^{(\varepsilon)}} & a_{11}^{(\varepsilon)} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} \frac{\rho_j}{2} \frac{x_j'}{\zeta_1 - \rho_j} + d_1^{(\varepsilon)} \frac{\zeta_1}{2} w_1 \\ \overline{a_{02}^{(\varepsilon)}} & \overline{a_{12}^{(\varepsilon)}} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_j'}{|\zeta_1 - \rho_j|^2} - \frac{\operatorname{Im}(d_1^{(\varepsilon)} w_1)}{\operatorname{Im} \zeta_1} \end{pmatrix}$$

В силу теоремы 1,

$$\operatorname{Int} D_{1,3}(T) = \{(x_1, y_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 :$$
$$\det(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^s > 0, \quad s = 0, 1, 2, \quad \varepsilon = \pm 1\}.$$

Фиксируем x_2, x_3, x_4 таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\det(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^s > 0, \quad s = 0, 1, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{4}$$

А именно, положим $x_j = a_j$, $j = 2, 3, 4$, где a_j – фиксированные числа и $0 < a_j < 1$.

Пусть $\widetilde{T}$ – класс функций $f(z) \in T$, удовлетворяющих условию (4) при $x_j = a_j$ $(j = 2, 3, 4)$.

Следствие 1. *В случае* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ *множество значений* $f(z_1)$ *на классе* $\widetilde{T}$ *есть пересечение двух кругов:* $|w - O_\varepsilon| \leqslant R_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, *где*

$$O_\varepsilon = \frac{i}{2 d_1^{(\varepsilon)} \operatorname{Im} \zeta_1} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \overline{\zeta}_1) a_{j+1} \right]^2 \left[\sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} |\rho_j - \zeta_1|^2 a_{j+1} - \frac{\varepsilon}{2} \right]^{-1} \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} \frac{\bar{\zeta}_1 - \rho_j}{\zeta_1 - \rho_j} a_{j+1} \right\},$$

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2 |d_1^{(\varepsilon)} \operatorname{Im} \zeta_1|} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} a_{j+1} \right) - \left| \sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \zeta_1) a_{j+1} \right|^2 \right.$$
$$\left. \times \left[\sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} |\rho_j - \zeta_1|^2 a_{j+1} - \frac{\varepsilon}{2} \right]^{-1} \right\}$$

при

$$h_j^{(\varepsilon)} = \frac{2+\varepsilon\rho_j}{2} \prod_{\substack{j'=1 \\ j'=j}}^{3} (\rho_{j'} - \rho_j)^{-1}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$d_1^{(\varepsilon)} = \frac{2+\varepsilon\zeta_1}{2} \prod_{j'=1}^{3} (\rho_{j'} - \zeta_1)^{-1}.$$

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Из (2) получаем для системы $I_{m,n}(f)$ интегральное представление

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$f(r_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho_j - 2t}, \quad \rho_j = r_j + \frac{1}{r_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha(t) \in M_1. \tag{5}$$

Образуем функцию

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{j+m}}{\rho_j - 2t}\right] \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{6}$$

где $\delta_0 \neq 0$, $\delta_j (j = 1, 2, \ldots, m+n)$ – некоторые комплексные числа.

По теореме 1.3 [12, с. 86–87], для того чтобы имело место представление (5), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости для всех $t \in [-1, 1]$ неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ вытекало неравенство

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{m} \delta_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \delta_{j+m} x_{j+m}\right] \geqslant 0 \tag{7}$$

Запишем функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_{2m+n}(t)}{\prod_{j=1}^{m} |\zeta_j - 2t|^2 \prod_{j=1}^{n} (\rho_j - 2t)}, \tag{8}$$

где $A_{2m+n}(t)$ – неотрицательный на отрезке $[-1,1]$ алгебраический многочлен от t степени $\leqslant 2m+n$. По теореме Маркова–Лукача (см. [12, с. 89]), имеем

$$A_{2m+n}(t) = \begin{cases} (1-t^2)\Big(\sum\limits_{k=0}^{m+N-1}\beta_k t^k\Big)^2 + \Big(\sum\limits_{k=0}^{m+N}\gamma_k t^k\Big)^2 & \text{при} \quad n = 2N, \\ (1-t)\Big(\sum\limits_{k=0}^{m+N}\beta_k t^k\Big)^2 + (1+t)\Big(\sum\limits_{k=0}^{m+N}\gamma_k t^k\Big)^2 & \text{при} \quad n = 2N+1, \end{cases} \tag{9}$$

Подставим (9) в (8) и запишем $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \bigg[\bigg|\sum_{k=0}^{N}\xi_k t^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_{N+k}}{\zeta_k - 2t}\bigg|^2 + (1-t^2)\bigg|\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k t^k \\ &+ \sum_{k=1}^{m}\frac{\eta_{N+k-1}}{\zeta_k-2t}\bigg|^2\bigg]\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\rho_j-2t)}, \quad \text{если} \quad n=2N, \\ \varphi(t) &= \bigg[(1-t)\bigg|\sum_{k=0}^{N}\xi_k t^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_{N+k}}{\zeta_k-2t}\bigg|^2 \\ &+(1+t)\bigg|\sum_{k=0}^{N}\eta_k t^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\eta_{N+k}}{\zeta_k-2t}\bigg|^2\bigg]\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\rho_j-2t)}, \quad \text{если} \quad n=2N+1, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ – некоторые комплексные числа, зависящие от $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$, соответственно.

Используя представление (10) для функции $\varphi(t)$ получаем, что для справедливости представления (5), необходимо и достаточно чтобы были неотрицательны эрмитовы формы H_1 и H_2, где

$$H_1 = \sum_{k,l=0}^{N+m} a_{kl}\bar{\xi}_k\xi_l, \quad H_2 = \sum_{k,l=0}^{N+m-1} b_{kl}\overline{\eta}_k\eta_l, \quad \text{если} \quad n=2N,$$

$$H_1 = \sum_{k,l=0}^{N+m} a_{kl}^{(1)}\bar{\xi}_k\xi_l, \quad H_2 = \sum_{k,l=0}^{N+m} a_{kl}^{(-1)}\overline{\eta}_k\eta_l, \quad \text{если} \quad n=2N+1,$$

что равносильно неотрицательности всех главных миноров матриц A и B.

Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 и 3 теоремы 1 аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 1 в [7]. □

Доказательство следствия 1. Пусть $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. Обозначим

$$\widetilde{D}_{1,3}(f) = \{f(z_1) : f \in \widetilde{T}\}, \quad \Delta^{(\varepsilon)}(w_1) = \det A^{(\varepsilon)}(w_1, a_2, a_3, a_4).$$

Имеем

$$\operatorname{Int} \widetilde{D}_{1,3}(f) = \{w_1 \in \mathbb{C} : \Delta^{(\varepsilon)}(w_1) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1\}.$$

Преобразуем матрицу $A^{(\varepsilon)}$, получим

$$A^{(\varepsilon)}(w_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{1}{4|\zeta_1 - \overline{\zeta}_1|^2} \times$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} a_{j+1} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \overline{\zeta}_1) a_{j+1} & W \\ \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \zeta_1) a_{j+1} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} |\rho_j - \zeta_1|^2 a_{j+1} - \frac{\varepsilon}{2} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \overline{\zeta}_1) a_{j+1} \\ \overline{W} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} (\rho_j - \zeta_1) a_{j+1} & \sum\limits_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} a_{j+1} \end{pmatrix},$$

где

$$W = d_1^{(\varepsilon)} (\overline{\zeta}_1 - \zeta_1) w_1 + \sum_{j=1}^{3} h_j^{(\varepsilon)} \frac{\overline{\zeta}_1 - \rho_j}{\zeta_1 - \rho_j} a_{j+1}.$$

Используя неравенства (4), получим, что неравенства $\Delta^{(\varepsilon)}(w_1) > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, равносильны неравенствам $|w_1 - O_\varepsilon| < R_\varepsilon$. Следствие 1 доказано.

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically-real function*, Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях*, Мат. сб. **27(69)**, No. 2 (1950), 201–218.
3. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Eutwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*, Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
4. С. И. Федоров, *Модули некоторых семейств кривых и множество значений $f(\zeta_0)$ в классе однолистных функций с вещественными коэффициентами*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **139** (1984), 156–167.
5. Е. Г. Голузина, *О множестве значений некоторых систем фукнционалов в классе типично вещественных функций*, Вестн. ЛГУ, сер. мат., мех. и астрон. **1965**, вып. 2 (No. 7), 45–63.
6. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций*, Вестн. ЛГУ, сер. мат., мех. и астроном. **1961**, вып. 2 (No. 7), 8–22.

7. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1),\dots,f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 41–51.
8. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1),\dots,f(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций*. II, Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 24–33.
9. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
10. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем* $\{f(z_1),\ f'(z_1)\}$ *и* $\{f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
11. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$ *в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 5–17.
12. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*. М., 1973.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 12 мая 2006 г.