Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

Е. П. Голубева

О МОМЕНТАХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть p – простое число, $1 \leqslant a \leqslant p-1$ и

$$\frac{a}{p} = \left[0, q_{1,a}, \ldots, q_{n(a),a}\right] \tag{1}$$

– разложение a/p в конечную непрерывную дробь.

В работе [1] было показано, что при больших фиксированных p

$$\sum_{a=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n(a)} q_{i,a} = \frac{6}{\pi^2} p \log^2 p + O(p \log p). \tag{2}$$

Известны другие варианты результата (2); в [2] имеется соответствующая библиография.

Пусть $0 < \alpha < 1$ и

$$S(\alpha) = \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{n(a)} q_{i,a}^{\alpha}.$$

В настоящей работе мы оцениваем величину $S(\alpha)$ (см. теорему ниже).

Легко видеть, что при $\alpha > 1$ имеет место неравенство $S(\alpha) > Cp^{\alpha}$. Следовательно, множество $q_{i,a}$ не имеет предельного (при $p \to \infty$) распределения.

Таким образом, в этом случае ситуация отличается от рассмотренной в работе [3], в которой был получен закон распределения элементов разложения b/c, где $(b, c) = 1$, а $b^2 + c^2 \leqslant R^2$ $(R \to \infty)$.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема. *При $0 < \alpha < 1$ имеет место соотношение*

$$S(\alpha) =$$
$$= \frac{6}{\pi^2} \frac{2^{\alpha}}{1-\alpha} p \log p + O(p \log p) + O\left(\frac{p}{(1-\alpha)^2}\right) + O\left(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{(1-\alpha)}\right),$$

где все константы, входящие в остаток, абсолютные.

Выбирая здесь $\alpha_0 = 1 - 1/\log\log p$, мы видим, что

$$S(\alpha_0) \sim \frac{12}{\pi^2} p \log p \log\log p.$$

Поскольку $q^{\alpha_0} \asymp q$, если $q < \log^\lambda p$ (где $\lambda > 0$ – постоянная), отсюда следует, что главный член в формуле (2) состоит из тех значений q, которые удовлетворяют условию $q \geqslant \log^\lambda p$:

$$\sum_{a=1}^{p-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n(a) \\ q_{i,a} > \log^\lambda p}} q_{i,a} = \frac{6}{\pi^2} p \log^2 p + O(p \log p \log\log p).$$

В качестве другого следствия мы получаем оценку для числа тех a, у которых в разложении (1) хотя бы один из элементов $q_{i,a}$ удовлетворяет условию $q_{i,a} > \log^\lambda p$, где $\lambda > 1$. Обозначим количество таких a через $N(p, \lambda)$.

Следствие. *Имеем*

$$N(p, \lambda) = O\left(e^\lambda \frac{p \log\log p}{(\log p)^{\lambda - 1}}\right).$$

Эта оценка непосредственно вытекает из теоремы, поскольку

$$\sum_a \sum_{\substack{i \\ q_{i,a} > \log^\lambda p}} \log^\lambda p \, e^{-\lambda} = O\bigl(p \log p \log\log p\bigr).$$

Из соотношения (2) следует аналогичный результат при $\lambda > 2$. Мы использовали его в работе [4], чтобы получить нетривиальные оценки снизу для основных единиц почти всех вещественных квадратичных полей.

При доказательстве теоремы мы опираемся на соображения работы [1].

Прежде чем доказывать теорему, приведем два хорошо известных факта из теории непрерывных дробей (см. [5, 6]).

Лемма 1. *Всякая несократимая дробь c/b такая, что $|\alpha - c/b| < 1/(2b^2)$, является подходящей дробью к числу α.*

Лемма 2. *Если* $\dfrac{a}{p} = [q_1, \dots, q_n]$, *то* $[q_n, \dots, q_1] = \dfrac{\overline{a}}{p}$, *где* $a\overline{a} \equiv (-1)^{n-1} (\bmod p)$.

Доказательство теоремы. Определим для каждого a число $s = s(a)$ так, что дробь $[q_1, \dots, q_{s-1}]$ имеет знаменатель $b < \sqrt{p}$, а знаменатель $[q_1, \dots, q_s]$ больше $\sqrt{p}$.

Запишем $S(\alpha)$ в виде

$$S(\alpha) = \sum_a \left(q_1^\alpha + \dots + q_s^\alpha\right) + \sum_a \left(q_s^\alpha + \dots + q_{n(a)}^\alpha\right) - \sum_a q_s^\alpha = \\ = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3. \tag{3}$$

Получим оценки сверху и снизу для каждой из трех последних сумм.

Оценим сначала $\sum_1$ сверху. Пусть 0 является подходящей дробью к a/p, тогда $a/p < 1/2$.

Количество таких слагаемых есть величина $O(p)$ и соответствующие элементы $q = \left[\frac{p}{a}\right]$. Таким образом,

$$\sum_{a/p<1/2} q^\alpha = p^\alpha \sum_{a<p/2} \frac{1}{a^\alpha} + O(p) = O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big),$$

где сумма распространена на те слагаемые из $\sum_1$, для которых 0 является подходящей дробью.

Для всех остальных подходящих дробей c/b выполнены условия $b \geqslant 2$ и $c \geqslant 1$. Из теории непрерывных дробей (см. [5]) известно, что, если c_k/b_k – подходящая дробь к a/p, то

$$\left|\frac{a}{p} - \frac{c_k}{b_k}\right| \leqslant \frac{1}{b_k\, b_{k+1}},$$

где

$$b_{k+1} = q_{k+1} b_k + b_{k+1} > q_{k+1} b_k.$$

Из двух последних неравенств следует оценка

$$q_k^\alpha < b_k^{-2\alpha} \left|\frac{a}{p} - \frac{c_k}{b_k}\right|^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{b_k<\sqrt{p}} \frac{1}{b_k^{2\alpha}} \left|\frac{a}{p} - \frac{c_k}{b_k}\right|^{-\alpha}, \tag{4}$$

где внутренняя сумма в правой части есть сумма по подходящим дробям к числам a/p со знаменателями $b_k < \sqrt{p}$.

Далее имеем

$$\sum_a \sum_{b_k<\sqrt{p}} \frac{1}{b_k^{2\alpha}} \Big|\frac{a}{p} - \frac{c_k}{b_k}\Big|^{-\alpha} =$$

$$= \sum_a \sum_{\substack{b_k\sqrt{p} \\ |a/p-c_k/b_k|<1/(2b_k^2)}} \frac{1}{b_k^{2\alpha}} \Big|\frac{a}{p} - \frac{c_k}{b_k}\Big|^{-\alpha} + O(p\log p) =$$

$$= \sum\nolimits_4 + O(p\log p).$$

Действительно, если $|a/p - c_k/b_k| \geqslant 1/(2b_k^2)$, то $q_{k+1} \leqslant 2$, а число таких слагаемых в (4) равно $O(p\log p)$, поскольку, очевидно, $n(a) = O(\log p)$.

В силу леммы 1, неравенство $|a/p - c/b| < 1/(2b^2)$ обеспечивает то, что c/b является подходящей дробью к a/p. Поэтому

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{\substack{1\leqslant c<b<\sqrt{p} \\ (c,b)=1}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{|\frac{a}{p}-\frac{c}{b}|<\frac{1}{2b^2}} \Big|\frac{a}{p} - \frac{c}{b}\Big|^{-\alpha} =$$

$$= p^\alpha \sum_{\substack{1\leqslant c<b<\sqrt{p} \\ (c,b)=1}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{|a-\frac{cp}{b}|<\frac{p}{2b^2}} \Big|a - \frac{cp}{b}\Big|^{\alpha}.$$

Избавимся от условия $(b,c) = 1$. Тогда

$$\sum\nolimits_4 = p^\alpha \sum_{d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2\alpha}} \sum_{1<b<\sqrt{p}/d} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{1\leqslant c<b} \sum_{\substack{a \\ |a-\frac{pc}{b}|<\frac{p}{2b^2d^2}}} \Big|a - \frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha}.$$

Когда c меняется от 1 до $b-1$, pc пробегает полную систему вычетов $(\operatorname{mod} b)$, кроме 0. Поэтому

$$\sum_{1\leqslant c<b} \sum_{\substack{a \\ |a-\frac{pc}{b}|<\frac{p}{2b^2d^2}}} \Big|a - \frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha} = 2b \int\limits_0^{p/(2b^2d^2)} \frac{dx}{x^\alpha} + O(b^\alpha) =$$

$$= \frac{2b}{1-\alpha}\ \frac{p^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}b^{2-2\alpha}d^{2-2\alpha}} + O(b^\alpha).$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_4 = \frac{2^\alpha}{1-\alpha} p \sum_{d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{1<b<\sqrt{p}/d} \frac{1}{b} + O\Big(p^\alpha \sum_{b<\sqrt{p}} \frac{1}{b^\alpha}\Big) = \\ = \frac{3\cdot 2^\alpha}{\pi^2(1-\alpha)} p\log p + O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big)$$

и

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \frac{3}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{1-\alpha} p\log p + O(p\log p) + O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big). \tag{5}$$

Оценим теперь $\sum_2$ сверху. В силу леммы 2, непрерывные дроби $[q_n]$, $[q_n, q_{n-1}], \dots, [q_n, \dots, q_{s+1}]$ являются подходящими дробями для чисел $\overline{a}/p$, где $a\overline{a} \equiv (-1)^{n(a)-1} (\mathrm{mod}\, p)$.

Если показать, что знаменатели всех этих дробей, кроме последней, меньше чем $\sqrt{p}$, то, очевидно, для $\sum_2$ справедлива та же оценка сверху, что и для $\sum_1$. Достаточно рассмотреть дробь $[q_n, q_{n-1}, \dots, q_{s+1}]$ с самым большим знаменателем.

Мы имеем

$$\frac{c_{s-1}}{b_{s-1}} = [q_1, \dots, q_{s-1}], \qquad \frac{c_s}{b_s} = [q_1, \dots, q_s],$$

где $b_{s-1} < \sqrt{p}$ и $b_s > \sqrt{p}$. Кроме того

$$\frac{a}{p} = \frac{(q_s + \gamma_s)c_{s-1} + c_{s-2}}{(q_s + \gamma_s)b_{s-1} + b_{s-2}}, \tag{6}$$

где $\gamma_s = [q_{s+1}, \dots, q_n] = \alpha_s/\beta_s$. Знаменатель β_s равен знаменателю дроби $[q_n, \dots, q_{s+1}]$. Нам достаточно показать, что $\beta_s < \sqrt{p}$. Перепишем равенство (6) в виде

$$\frac{a}{p} = \frac{(q_s c_{s-1} + c_{s-2})\beta_s + c_{s-1}\alpha_s}{(q_s b_{s-1} + b_{s-2})\beta_s + b_{s-1}\alpha_s} = \frac{c_s\beta_s + c_{s-1}\alpha_s}{b_s\beta_s + b_{s-1}\alpha_s}.$$

Поскольку $(\alpha_s, \beta_s) = 1$, $(c_s, b_s) = 1$ и $c_s b_{s-1} - c_{s-1} b_s = \pm 1$, последняя дробь является несократимой и, значит,

$$p = b_s\beta_s + b_{s-1}\alpha_s. \tag{7}$$

Так как $b_s > \sqrt{p}$, то $\beta_s < \sqrt{p}$.

Оценим теперь $\sum_3$ снизу. Из теории непрерывных дробей известно, что

$$\Big|\frac{a}{p} - \frac{c_{s-1}}{b_{s-1}}\Big| > \frac{1}{b_{s-1}(b_s + b_{s-1})}.$$

Поскольку

$$b_s + b_{s-1} = b_{s-1}(q_s+1) + b_{s-2} < b_{s-1}(q_s+2),$$

отсюда следует, что

$$q_s > \frac{1}{b_{s-1}^2}\Big|\frac{a}{p} - \frac{c_{s-1}}{b_{s-1}}\Big|^{-1} - 2. \tag{8}$$

Так как при $x \geqslant 4$ справедливо неравенство $(x-2)^\alpha > x^\alpha - 2^\alpha$, то

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{a=1}^{p-1} q_s^\alpha > \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{b_{s-1}^{2\alpha}}\Big|\frac{a}{p} - \frac{c_{s-1}}{b_{s-1}}\Big|^{-\alpha} + O(p) = \sum\nolimits_5 + O(p).$$

Поскольку $b_s > \sqrt{p}$, то

$$\Big|\frac{a}{p} - \frac{c_{s-1}}{b_{s-1}}\Big| < \frac{1}{b_{s-1}b_s} < \frac{1}{b_{s-1}\sqrt{p}}.$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_5 > \sum_{\substack{1 \leqslant c < b < \sqrt{p} \\ (c,b)=1 \\ |a/p - c/b| < 1/(2b\sqrt{p})}} \frac{1}{b^{2\alpha}}\Big|\frac{a}{p} - \frac{c}{b}\Big|^{-\alpha} = \sum\nolimits_6.$$

Перепишем $\sum_6$ в виде

$$\sum\nolimits_6 = p^\alpha \sum_{1 < b < \sqrt{p}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{1 < c < b} \sum_{|a - \frac{pc}{b}| < \frac{\sqrt{p}}{2b}} \Big|a - \frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha}.$$

Действуя так же как при оценке $\sum_1$, получим

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_6 &= p^\alpha \sum_{1\leqslant d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2\alpha}} \sum_{1<b<\frac{\sqrt{p}}{d}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{1\leqslant c<b} \sum_{|a-\frac{pc}{b}|<\frac{\sqrt{p}}{2bd}} \left|a-\frac{pc}{b}\right|^{-\alpha} = \\
&= p^\alpha \sum_{1\leqslant d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2\alpha}} \sum_{1<b<\frac{\sqrt{p}}{d}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \left(2b \int\limits_0^{\sqrt{p}/(2bd)} \frac{dx}{x^\alpha} + O(b^\alpha)\right) = \\
&= \frac{2^\alpha}{1-\alpha} p^{1/2+\alpha/2} \sum_{1\leqslant d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2\alpha}} \sum_{1<b<\frac{\sqrt{p}}{d}} \frac{1}{b^\alpha} + \\
&+ O\left(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\right) = \\
&= \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2} p \sum_{1\leqslant d<\sqrt{p}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\right) = \\
&= \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2\zeta(2)} p + O\left(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Собирая вместе оценки (5) и (9), имеем

$$S(\alpha) \leqslant \frac{6}{\pi^2}\,\frac{2^\alpha}{1-\alpha} p\log p + \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2\zeta(2)} p + O(p\log p) + O\left(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\right).$$

Оценим теперь $\sum_1$ и $\sum_2$ снизу и $\sum_3$ сверху. Имеем

$$\sum\nolimits_3 < \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant p-1 \\ |a/p-c_k/b_k|<1/(b_k\sqrt{p})}} \frac{1}{b_k^{2\alpha}} \left|\frac{a}{p}-\frac{c_k}{b_k}\right|^{-\alpha}.$$

Наложим дополнительное условие $|a/p - c_k/b_k| < 1/(2b_k^2)$. Слагаемые, не удовлетворяющие этому условию, не превосходят 2^α, а их сумма не больше, чем $2^\alpha p$. Поэтому

$$\sum\nolimits_3 < p^\alpha \sum_{1<b<\sqrt{p}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{\substack{1\leqslant c<b\\ |a-\frac{pc}{b}|<\min(\frac{p}{2b^2},\frac{\sqrt{p}}{b})}} \Big|a-\frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha} =$$

$$= p^\alpha \sum_{1<b<\frac{\sqrt{p}}{2}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{\substack{1\leqslant c<b\\ (b,c)=1}} \sum_{\substack{a\\ |a-\frac{pc}{b}|<\frac{p}{2b^2}}} \Big|a-\frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha} +$$

$$+ O\Big(p^\alpha \sum_{\sqrt{p}/2<b<\sqrt{p}} \frac{1}{b^{2\alpha}} \sum_{1\leqslant c<b} \sum_{\substack{a\\ |a-\frac{pc}{b}|<\frac{\sqrt{p}}{b}}} \Big|a-\frac{pc}{b}\Big|^{-\alpha} =$$

$$= \sum\nolimits_7 + O\Big(\sum\nolimits_8\Big).$$

Сумма $\sum_8$ допускает оценку

$$O\Big(p^\alpha \sum_{b<\sqrt{p}} \frac{1}{b^{2\alpha}} b^\alpha \sum_{c(\operatorname{mod} b)} \frac{1}{c^\alpha}\Big) = O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big).$$

Для $\sum_7$ имеем аналогично (9)

$$\sum\nolimits_7 = p^\alpha \sum_{d<\sqrt{p}/2} \frac{\mu(d)}{d^{2\alpha}} \sum_{1<b<\sqrt{p}/(2d)} \frac{1}{b^{2\alpha}} \Big(2b \int\limits_0^{\sqrt{p}/(bd)} \frac{dx}{x^\alpha} + O(b^\alpha)\Big) =$$

$$= \frac{2}{1-\alpha} p^{1/2+\alpha/2} \sum_{d<\sqrt{p}/2} \frac{\mu(d)}{d^{1+\alpha}} \sum_{1<b<\sqrt{p}/(2d)} \frac{1}{b^\alpha} +$$

$$+ O\Big(p^\alpha \sum_{d<\sqrt{p}/2} \frac{1}{d^{2\alpha}} \sum_{b<\sqrt{p}/(2d)} \frac{1}{b^\alpha}\Big) =$$

$$= \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2} p \sum_{d<\sqrt{p}/2} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2} p + O\Big(\frac{p\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\Big).$$

Сравнивая оценки для $\sum_3$ сверху и снизу, мы видим, что

$$\sum\nolimits_3 = \frac{6}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{(1-\alpha)^2} p + O\Big(\frac{\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha} p\Big).$$

Для того, чтобы оценить $\sum_1$ снизу, воспользуемся неравенством (8), тогда

$$\sum\nolimits_1 > \sum_{1\leqslant a\leqslant p-1} \sum b_k^{-2\alpha}\left|\frac{a}{p}-c_kb_k\right|^{-\alpha}+O(p\log p),$$

где внутренняя сумма взята по подходящим дробям c_k/b_k со знаменателями $b_k<\sqrt{p}$. Наложим дополнительное условие $|a/p-c_k/b_k|<1/(2b_k^2)$. Тогда

$$\sum\nolimits_1 > p^\alpha \sum_{1\leqslant a\leqslant p-1}\ \sum_{1<b<\sqrt{p}}\frac{1}{b^{2\alpha}}\sum_{\substack{1\leqslant c<b\\(c,b)=1}}\left|a-\frac{pc}{b}\right|^{-\alpha}+O(p\log p).$$

Последняя сумма совпадает с той, которая возникала при оценке $\sum_1$ сверху. Таким образом,

$$\sum\nolimits_1 = \frac{3}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{1-\alpha}p\log p+O(p\log p)+O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big).$$

Нам осталось оценить $\sum_2$ снизу. Введем вспомогательную сумму

$$\sum_{1\leqslant a<p-1}\Big(q_{\bar{s}}^\alpha+\dots+q_{n(a)}^\alpha\Big) \tag{10}$$

такую, что дробь $[q_{n(a)},\dots,q_{\bar{s}+1}]$ имеет знаменатель $\beta_{\bar{s}}<\sqrt{p}/3$, а знаменатель дроби $[q_{n(a)},\dots,q_{\bar{s}}]$ уже больше $\sqrt{p}/3$. Рассмотрим дробь $[q_{\bar{s}+1},\dots,q_{n(a)}]=\alpha_{\bar{s}}/\beta_{\bar{s}}$ (с тем же знаменателем $\beta_{\bar{s}}$). Аналогично (7), имеем

$$p=b_{\bar{s}}\beta_{\bar{s}}+b_{\bar{s}-1}\alpha_{\bar{s}}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}p&<\beta_{\bar{s}}\left((q_{\bar{s}}+1)b_{\bar{s}-1}+b_{\bar{s}-2}\right)<\beta_{\bar{s}}(q_{\bar{s}}+2)b_{\bar{s}-1}<\\&<\frac{\sqrt{p}}{3}(q_{\bar{s}}+2)b_{\bar{s}-1}<\sqrt{p}q_{\bar{s}}b_{\bar{s}-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $q_{\bar{s}}b_{\bar{s}-1}>\sqrt{p}$ и $b_{\bar{s}}=q_{\bar{s}}b_{\bar{s}-1}+b_{\bar{s}-2}>\sqrt{p}$.

Последнее неравенство означает, что $q_{\bar{s}}$ является одним из элементов $q_s,\dots,q_{n(a)}$, входящих в $\sum_2$. Поэтому $\sum_2$ оценивается снизу суммой (10), которую в силу леммы 2 можно переписать в виде

$$\sum\nolimits_9=\sum_{1\leqslant a<p-1}\left(q_1^\alpha+\dots+q_{s'}^\alpha\right),$$

где сумма берется по элементам разложения a/p, для которых знаменатель дроби $[q_1, \dots, q_{s'-1}]$ меньше $\sqrt{p}/3$, а знаменатель дроби $[q_1, \dots, q_{s'}]$ больше $\sqrt{p}/3$. Сумма $\sum_9$ оценивается так же, как $\sum_1$:

$$\sum\nolimits_9 > \frac{3}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{1-\alpha} p\log p + O(p\log p) + O\Big(\frac{p}{1-\alpha}\Big).$$

В результате, для $S(\alpha)$ имеем

$$S(\alpha) = \frac{6}{\pi^2}\ \frac{2^\alpha}{1-\alpha} p\log p + O(p\log p) + \\ + O\Big(\frac{p}{(1-\alpha)^2}\Big) + O\Big(\frac{p^{1/2+\alpha/2}\zeta(1+\alpha)}{1-\alpha}\Big),$$

и теорема доказана.

Литература

1. В. Н. Попов, *Асимптотика суммы сумм элементов непрерывеных дробей чисел вида a/p*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 81–93.
2. G. Myerson, *On semi-regular finite continued fractions,* Arch. Math. **48**, No. 5 (1987), 420–425.
3. М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина,* Препринт/ДВО, Хабаровское отделение ИПМ, No. 8, 2002.
4. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. II,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 11–22.
5. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби,* М., 1978.
6. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел,* М.–Л., 1937.

Государственный
университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail: elena_golubeva@mail.ru

Поступило 25 июля 2006 г.