Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 337, 2006 г.

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ГЕННАДИЯ МИХАЙЛОВИЧА ГОЛУЗИНА

Г. М. Голузин – основатель отечественной школы но геометрической теории функций – родился 24 января 1906 года в городе Торжке (теперь Тверская область) в семье железнодорожного служащего. В 1924 году он поступил на математический факультет Ленинградского государственного университета и окончил его в 1929 году. С момента окончания университета и до конца своей жизни Г. М. Голузин преподавал в этом университете.

С момента основания Ленинградского отделения Математического института АН СССР в 1940 году (теперь Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН) Г. М. Голузин одновременно работал и в этом институте.

Первые исследования Г. М. Голузина были посвящены вопросам, связанным с формулой Карлемана и задачами математической физики. Однако дальнейшее творчество Геннадия Михайловича почти исключительно относится к геометрической теории функций.

Геометрическая теория функций (в дальнейшем ГТФ) в настоящее время является областью математического анализа. Предметом исследования этой теории служат общие классы функций, определенных в плоской области или на римановой поверхности. При этом ГТФ рассматривает эти классы функций в первую очередь как классы отображений и в значительно меньшей мере исследует вопросы представления этих функций в аналитической форме. Основная роль в ГТФ принадлежит однолистным функциям. В применении к регулярной или мероморфной функции термин “однолистная функция” означает, что она реализует одно-однозначное или, как принято говорить, однолистное отображение.

В 20–30 гг. прошлого века ГТФ была сравнительно молодой наукой. Начало этой науки положили теорема Римана (1851г.) о существовании однолистного конформного отображения на круг любой односвязной области, граница которой содержит более одной точки, и различные обобщения этой теоремы на многосвязные области. Систематическое исследование классов однолистных функций началось с работ Кёбе (1907–1909 гг.) о соответствии границ при однолистном конформном отображении. Ряд первых результатов в ГТФ был получен методом площадей. Этот метод основывался на том простом соображении, что образ области при однолистном конформном отображении оставляет непокрытым множество неотрицательной площади. К числу основных классов однолистных функций, рассматриваемых в односвязной области, относится класс S функций вида

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

регулярных и однолистных в круге $U = \{z : |z| < 1|\}$, и класс Σ функций вида

$$f(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots,$$

мероморфных и однолистных в области $U^* = \{z : |z| > 1\}$.

К первым результатам для класса S относится теорема Кёбе-Бибербаха: для $f(z) \in S$ область $f(U)$ содержит круг $|w| < 1/4$. Методом площадей Людвиг Бибербах установил точные неравенства для функций класса S : для любой функции $f \in S$ при $|z| = r, 0 < r < 1$, справедливы точные неравенства

$$r/(1+r)^2 \leq |f(z)| \leq r/(1-r)^2,$$
$$(1-r)/(1+r)^3 \leq |f'(z)| \leq (1+r)/(1-r)^3,$$

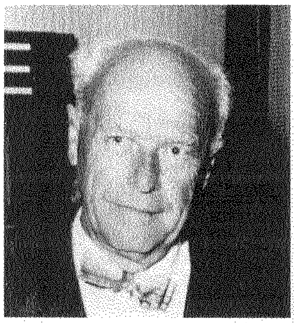
и равенство в каждом из этих неравенств достигается только для функций Кёбе $K_\epsilon(z) = z/(1+\epsilon z)^2, |\epsilon| = 1$.

Функции Кёбе обладают следующим замечательным свойством: образ круга U при отображении функцией $K_\epsilon(z)$ представляет собой всю плоскость с радиальным разрезом $\{w : 1/4 \leq |w| \leq \infty, \arg w = -\arg \epsilon\}$. В 1916 году Л. Бибербах высказал гипотезу, что в классе S при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$|c_n| \leq n, \tag{1}$$

и равенство в этом неравенстве имеет место только для функций Кёбе $K_\epsilon(z)$.

Гипотеза Бибербаха, особенно в первые десятилетия своего существовавния, оказала решающее влияние на развитие методов и проблематики ГТФ. Сам Бибербах доказал неравенство (1) для $n = 2$.



L. Bieberbach

LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH
O. Ö. PROF. AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
IN BERLIN

BAND II: MODERNE FUNKTIONENTHEORIE

MIT 44 FIGUREN IM TEXT

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1927

Inhaltsverzeichnis des II. Bandes

В 1923 году К. Лёвнер доказал неравенство $|c_3| \le 3$ в классе S при помощи предложенного им метода параметрического представления. Параметрический метод Лёвнера стал первым неэлементарным методом ГТФ.

В течение нескольких десятилетий Л. Бибербах во многом определял состояние математики в Германии как ведущий автор и издатель журнала "Jaherberichte der Preus. Akad. Wiss."

По-видимому осталось малоизвестным, что творчество Бибербаха оказало влияние на развитие ГТФ и в другом отношении. В 1927 году в знаменитом немецком издательстве "Verlag und Druck von B. G. Teubner" вышел второй том монографии Л. Бибербаха "Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II: Modern Funktionentheorie", Leipzig, Berlin, 1927. Одна из глав этой книги была посвящена теории однолистных функций. Владимир Иванович Смирнов посоветовал Г. М. Голузину заняться этой наукой.

Вероятно, Владимир Иванович не предвидел до какой степени сбудется его пожелание.

ГТФ стала делом жизни Геннадия Михайловича Голузина. Ему принадлежит заслуга развития и распространения метода Лёвнера. В настоящее время этот метод принадлежит к числу основных методов теории однолистных функций. Г. М. Голузин создал свой вариант метода граничных вариаций. Этими методами Г. М. Голузин получил ряд глубоких результатов, во многом определивших дальнейшее развитие ГТФ. К ним относится теорема вращения в классе S, различные теоремы искажения и оценки коэффициентов в классах однолистных функций. Г. М. Голузину принадлежит точное неравенство для суммы

$$\operatorname{Re} \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_k \gamma_l \log \frac{f(z_k) - f(z_l)}{z_k - z_l}$$

в классе Σ для любых точек z_k области U^* и любых комплексных чисел γ_k, $k = 1, \ldots, n$. Этот результат получил различные обобщения и инспирировал появление различных неравенств для произвольного числа параметров в классах однолистных отображений. Свой метод вариаций Г. М. Голузин применил к ряду проблем ГТФ, длительное время не поддающихся исследованию. К ним относятся задача о максимуме n-го диаметра в семействе континуумов фиксированной емкости, проблема Чеботарева о континууме наименьшей емкости, задача о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей. Результаты Г. М. Голузина выявляют роль квадратичных дифференциалов в этих задачах. Последние задачи относятся к обширному кругу задач об экстремальном разбиении. В настоящее время эти задачи являются предметом исследований методом экстремальной метрики и методом симметризации.

Научные заслуги Г. М. Голузина были отмечены первой премией Ленинградского университета за 1946 год и Государственной премией за 1947 год.

Г. М. Голузин с большой энергией и любовью относился к своей педагогической деятельности.В течение ряда лет он вёл основной и ряд спецкурсов, руководил семинаром по геометрической теории функций комплексного переменного.

Результатом научной и педагогической деятельности Г. М. Голузина является его монография “Геометрическая теория функций комплесного переменного”, опубликованная в 1952 году. Эта монография энциклопедична по своему содержанию. Наряду с результатами её автора, в ней приводится подробное изложение основных принципов однолистного конформного отображения односвязных и многосвязных областей, уделяется значительное внимание метрическим свойствам замкнутых множеств, излагаются вопросы, связанные с граничными свойствами аналитических функций. Второе издание этой монографии, дополненное некоторыми работами ее автора, вышло в 1966 году. Монография Г. М. Голузина была переведена на немецкий и английский языки.

Результаты Г. М. Голузина получили мировую известность. Геометрической теории функций посвящены монографии Дж. Дженкинса, Хр. Поммеренке, П. Дюрена, Н. А. Лебедева и других известных аналитиков. В этих монографиях и статьях отечественных и иностранных авторов приводятся многочисленные ссылки на работы Г. М. Голузина и цитируются его результаты.

В 1984 году мировая математическая общественность была потрясена сообщением, что американский математик Луи де Бранж доказал гипотезу Бибербаха. Примечательно, что в доказательстве де Бранжа использовался метод Лёвнера и результат Н. А. Лебедева и И. М. Милина – прямых учеников Г. М. Голузина. Об удивительнеой и несколько трагичной истории этого доказательства и роли Ленинградского семинара по геометрической теории функций в проверке и первой публикации доказательства де Бранжа см. статьи [2, 3] и указанные в них публикации.

В последние годы в ГТФ получили значительное развитие метод экстремальной метрики и метод симметризации, возникшие еще в 50-х годах прошлого века. Значительное развитие получили и классические методы: метод параметрических представлений Лёвнера и метод площадей. Большое внимание уделялось вопросам теории квазиконформных отображений. Отличительной чертой современных работ является синтез различных методов исследования. Таким путем удалось получить существенное продвижение в ряде вопросов [2].

Современным состоянием геометрической теории функций мы в большой мере обязаны Геннадию Михайловичу Голузину.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Памяти Геннадия Михайловича Голузина,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 5–10.
2. Г. В. Кузьмина, *Геннадий Михайлович Голузин и геометрическая теория функций,* Алгебра и анализ **18** (2006), No. 3, 3– 38.
3. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций*, Алгебра и анализ **9** (1997), No. 3, 41–103; No. 5, 1–50.
4. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49** (1994), No. 1, 3–76.
5. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.), Bd. 18, Springer-Verlag, Berlin etc.,1958; 2nd ed. corrected, 1965. Перевод на русск. яз. 1-го изд., Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, М., 1962.
6. Ch. Pommerenke, *Univalent functions, with a chapter on quadratic differentials by G. Jensen*, Math. Lehrbucher, Bd. 25, Vanderhoeck and Ruprechk, Gottingen, 1975.
7. P. Duren, *Univalent functions*, Grundlehrer Math. Wiss., vol. 259, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
8. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, М., 1975.

Г. В. Кузьмина