Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

М. Н. Яковлев

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для линейного сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка приведены условия существования, единственности и неотрицательности обобщенного и классического решения, удовлетворяющего краевым условиям

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0 \tag{$*$}$$

(теоремы 1 и 5) или краевым условиям

$$u'(a) = 0, \quad u(b) = 0 \tag{$**$}$$

(теоремы 2 и 6).

Для нелинейного сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$-u'' + p_0(t)u + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u^k = f(t)$$

установлено существование неотрицательного обобщенного и классического решений краевых задач с краевыми условиями $(*)$ (теоремы 3 и 6) и с краевыми условиями $(**)$ (теоремы 4 и 8).

Для нелинейного сингулярного уравнения

$$-u'' + p_0(t)u + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u^{2k+1} + f_0(t)\varphi(u) = f(t)$$

устанавлено существование обобщенного и классического решений и сходимость метода Галеркина в случае краевых условий $(*)$ (теоремы 9 и 11) и краевых условий $(**)$ (теоремы 10 и 12).

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Как обычно, $H^1(a,b)$ – вещественное гильбертово пространство вещественных абсолютно непрерывных функций вещественной переменной $u(z)$ таких, что производная $u'(t)$, которая существует почти всюду на (a,b), суммируема с квадратом на (a,b). При этом

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int\limits_a^b u^2(s)ds + \int\limits_a^b [u'(s)]^2 ds. \tag{1}$$

Рассмотрим замкнутое подпространство $H^1(a,b;a)$ пространства $H^1(a,b)$, где

$$H^1(a,b;a) = \{u(t) \in H^1(a,b), u(a) = 0\}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $u(t) \in H^1(a,b;a)$. Тогда*

$$|u(t)|^2 \leqslant (t-a)\int\limits_a^b [u'(s)]^2 ds, \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{3}$$

Лемма 2. *Норма (1) в пространстве $H^1(a,b;a)$ эквивалентна норме*

$$|u|^2_{H^1(a,b;a)} \equiv \int\limits_a^b [u'(s)]^2 ds, \tag{4}$$

а именно:

$$|u|^2_{H^1(a,b;a)} \leqslant \|u\|^2_{H^1(a,b)} \leqslant \Big[\frac{(b-a)^2}{2} + 1\Big] |u|^2_{H^1(a,b;a)}. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть*

$$p_0(t)(t-a) \in L(a,b), \tag{6}$$

$$K_1 \equiv 1 - \int\limits_a^b p_0^-(t)(t-a)dt > 0, \tag{7}$$

$$K_2 \equiv 1 + \int\limits_a^b |p_0(t)|(t-a)dt < +\infty. \tag{8}$$

Здесь $p_0^-(t) = \frac{1}{2}[|p_0(t)| - p_0(t)]$.

Тогда для $u(t) \in H^1(a,b;a)$ верны неравенства

$$K_1 \int\limits_a^b [u'(s)]^2\, ds \leqslant \int\limits_a^b [u'(s)]^2\, ds + \int\limits_a^b p_0(s)[u(s)]^2\, ds \leqslant K_2 \int\limits_a^b [u'(s)]^2\, ds. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть*

$$f(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b), \qquad p_0(t)(t-a) \in L(a,b) \tag{10}$$

и верно неравенство (7).

Тогда

(1) *в пространстве* $H^1(a,b;a)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$, *на которой функционал*

$$J(u) \equiv \int\limits_a^b [u'(s)]^2 ds + \int\limits_a^b p_0(t)[u(t)]^2 ds - 2\int\limits_a^b f(s)u(s)ds \tag{11}$$

достигает минимума;

(2) *для всех* $v(t) \in H^1(a,b;a)$ *уравнение*

$$\int\limits_a^b u'(t)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)u(t)v(t)dt = \int\limits_a^b f(t)u(t)v(t)dt \tag{12}$$

относительно $u(t)$ *имеет одно и только одно решение в пространстве* $H^1(a,b;a)$, *и этим решением является функция* $u_0(t)$, *на которой функционал* $J(u)$ *достигает минимума;*

(3) *верна оценка*

$$\left\{ \int\limits_a^b [u_0'(s)]^2 ds \right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{K_1} \int\limits_a^b |f(t)|\sqrt{t-a}\,dt; \tag{13}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $u_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

(5) *если*

$$f(t) \in C(a,b], \qquad p_0(t) \in C(a,b], \tag{14}$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и является решением краевой задачи*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) = f(t), \qquad a < t < b, \tag{15}$$

$$u_0(a) = 0, \qquad u_0'(b) = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Введем новое скалярное произведение в пространстве $H^1(a,b;a)$, положив

$$[u,v] \equiv \int\limits_a^b u'(s)v'(s)ds + \int\limits_a^b p_0(s)u(s)v(s)ds. \tag{17}$$

В силу леммы 3, норма в $H^1(a,b;a)$, определяемая скалярным произведением (17), эквивалентна норме $|u|_{H^1(a,b;a)}$ и, в силу леммы 2, норме $\|u\|_{H^1(a,b)}$ в $H^1(a,b;a)$. В силу (14) с учетом леммы 1, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, в гильбертовом пространстве $H^1(a,b;a)$ существует функция $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$ такая, что

$$\int_a^b f(t)u(t)dt = [u_0, u] \quad \text{для любых} \quad u(t) \in H^1(a,b;a). \tag{18}$$

Следовательно, для всех $u \in H^1(a,b;a)$

$$J(u) = [u,u] - 2[u_0,u] = [u-u_0, u-u_0] - [u_0,u_0]. \tag{19}$$

Поэтому $u_0 \in H^1(a,b;a)$ является единственной точкой минимума функционала $J(u)$ в пространстве $H^1(a,b;a)$. Далее, поскольку,

$$[u_0, v] = \int_a^b u_0'(s)v'(s)ds + \int_a^b p_0(s)u_0v(s)ds, \tag{20}$$

учитывая (18), получим (12).

Для доказательства неравенства (13) положим в (12) $v(t) = u_0(t)$. Тогда

$$\left(\int_a^b [u_0'(s)]^2\,ds\right)^{1/2} \int_a^b |f(t)|\sqrt{t-a}\,dt \geqslant \int_a^b f(t)u_0(t)dt$$

$$= \int_a^b [u_0'(s)]^2 ds + \int_a^b p_0(s)u_0^2(s)ds \geqslant K_1 \int_a^b [u_0'(s)]^2 ds,$$

откуда и следует (13).

Равенство (12) показывает, что функция $p_0(t)u_0(t) - f(t)$ является обобщенной производной функции $u_0'(t)$. По теореме об эквивалентности классической и обобщенной производных (см. [1, с. 127]), $u_0'(t) \in C^{(1)}(a,b)$ и ее обобщенная производная является классической производной функции $u_0'(t)$. Кроме того, поскольку $u_0'(t) \in C^{(1)}(a,b)$, она является классической производной функции $u_0(t)$, причем $u_0'(t)$ непрерывна в (a,b). Тем самым, $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$ и

$$-u_0'' + p_0(t)u_0(t) = f(t), \quad a < t < b, \quad u_0(t) \in C^{(2)}(a,b].$$

Теперь в (12) ограничимся теми $v(t) \in H^1(a,b;a)$, которые равны нулю при $a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon$ для некоторого $0 < \varepsilon < b-a$.

Интегрируя первое слагаемое в (12) по частям, получим

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} [-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) - f(t)]v(t)dt + u'(b)v(b) = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности $v(b)$, следует, что $u'(b) = 0$.

Докажем теперь (4). Положим

$$\overline{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при} \quad u_0(t) \geqslant 0, \\ -u_0(t) & \text{при} \quad u_0(t) < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, $\overline{u}_0(t) \in H^1(a,b;a)$ и

$$\int\limits_a^b [u_0'(s)]^2 ds + \int\limits_a^b p_0(t)u_0^2(t)dt = \int\limits_a^b [\,\bar{u}_0'(s)]^2 ds + \int\limits_a^b p_0(t)\overline{u}_0^2(t)dt.$$

Поскольку при $f(t) \geqslant 0$ мы имеем

$$\int\limits_a^b f(t)u_0(t)dt \leqslant \int\limits_a^b f(t)\overline{u}_0(t)dt,$$

то верно неравенство

$$J(u_0) \geqslant J(\,\overline{u}_0). \tag{22}$$

Неравенство (22) противоречит тому факту, что $u_0(t)$ – единственная функция, на которой квадратичный функционал $J(u)$ достигает минимума в пространстве $H^1(a,b;a)$.

Пусть

$$H^1(a,b;b) \equiv \{u(t) \in H^1(a,b), u(b) = 0\}. \tag{23}$$

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

$$p_0(t)(b-t) \in L(a,b), \quad f(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b) \tag{24}$$

и

$$1 - \int\limits_a^b p_0^-(t)(b-t)dt > 0. \tag{25}$$

Тогда

(1) *в пространстве функций* $H^1(a,b;b)$ *существует одна и только одна функция* $w_0(t) \in H^1(a,b;b)$, *на которой квадратичный функционал* (11) *достигает минимума в пространстве* $H^1(a,b;b)$;

(2) *для всех* $v(t) \in H^1(a,b;b)$ *уравнение* (12) *относительно* $u(t)$ *имеет одно и только одно решение в пространстве* $H^1(a,b;b)$, *и этим решением является функция* $w_0(t) \in H^1(a,b;b)$, *на которой функционал* (11) *достигает минимума в пространстве* $H^1(a,b;b)$;

(3) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [w_0'(s)]^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{1-\int_a^b (b-t)p_0^-(t)dt}\int_a^b |f(t)|\sqrt{b-t}\,dt; \tag{26}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $w_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

(5) *если*

$$f(t) \in C[a,b), \quad p_0(t) \in C[a,b), \tag{27}$$

то $w_0(t) \in C^{(2)}[a,b)$ *и является решением краевой задачи*

$$-w_0''(t) + p_0(t)w_0(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{28}$$

$$w_0'(a) = 0, \quad w_0(b) = 0. \tag{29}$$

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$-u'' + p_0(t)u + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u^k = f(t), \quad a < t < b, \tag{30}$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \tag{31}$$

Обобщенным решением задачи (30), (31) называется функция $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{gathered}\int_a^b u_0'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt \\ + \int_a^b \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^k(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt\end{gathered} \tag{32}$$

при любых $v(t) \in H^1(a,b;a)$.

Теорема 3. *Пусть*

$$p_0(t)(t-a) \in L(a,b), \quad 0 \leqslant f(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b), \tag{33}$$

$$0 \leqslant q_k(t)(t-a)^{(k+1)/2} \in L(a,b), \quad k = 2,3,\dots,m, \tag{34}$$

$$c \equiv 1 - \int_a^b p_0^-(t)(t-a)dt > 0. \tag{35}$$

Тогда

(1) *существует неотрицательное обобщенное решение* $u_0(t)$ *краевой задачи* (30), (31);

(2) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [u_0'(t)]^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{c}\int_a^b |f(t)|\sqrt{t-a}\,dt; \tag{36}$$

(3) *если* $p_0(t) \in C(a,b]$, $q_k(t) \in C(a,b]$, $f(t) \in C(a,b]$, $k = 2,\dots,m$, *то* $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и является решением краевой задачи*

$$\begin{gathered} -u_0'' + p_0(t)u_0 + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^k = f(t), \qquad a < t < b, \\ u_0(a) = 0, \quad u_0'(b) = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Доказательство. Введем банахово пространство E непрерывных отображений $u(t,\tau)$ замкнутого промежутка $[0,1]$ в пространство $H^1(a,b;a)$ с нормой

$$\|u\|_E^2 \equiv \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\int_a^b \left[\frac{du(t,\tau)}{dt}\right]^2 dt. \tag{38}$$

Пусть K – конус неотрицатальных элементов из E, т.е. $u(t,\tau) \in K$ означает, что $u(t,\tau) \in E$ и $u(t,\tau) \geqslant 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Пусть $u(t,\tau) \in K$ и пусть $w(u) \equiv w(u(t,\tau), f(t))$ – единственная функция из E, существующая по теореме 1, которая удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_a^b w'(u)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)w(u)v(t)dt \\ + \sum_{k=2}^m k\int\limits_a^b q_k(t)u^{k-1}(t,\tau)w(u)v(t)dt = \int\limits_a^b f(t)v(t)dt \quad (39)$$

для всех $v(t) \in H^1(a,b;a)$.

По теореме 1 мы имеем $w(u(t,\tau)) \geqslant 0$ и

$$\left\{ \int\limits_a^b [w_t'(u(t,\tau))]^2 dt \right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_0^1 f(t)\sqrt{t-a}\,dt \equiv M. \quad (40)$$

Далее, пусть $u(t,\tau)$, $z(t,\tau) \in K \cap S_E(0,M)$, где $S_E(0,M)$ – замкнутый шар в пространстве E, и $\Delta = w(u) - w(z)$. Тогда

$$\int\limits_a^b [\Delta']^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t)\Delta^2 dt + \sum_{k=2}^m k\int\limits_a^b q_k(t)z^{k-1}\Delta^2 dt \\ + \sum_{k=2}^m k(k-1)\int\limits_a^b q_k(t)\big[u(t,\tau) - z(t,\tau)\big] \\ \times\big[u(t,\tau) + \theta_k(z(t,\tau) - u(t,\tau))\big]^{k-2} w(u)\Delta dt = 0. \quad (41)$$

Здесь $0 < \theta_k < 1$ $(k = 2,\dots,m)$. Из равенства (41) получаем, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\int\limits_a^b \big[w'(u) - w'(z)\big]^2 dt\right)^{1/2} \\ \leqslant L \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\left(\int\limits_a^b \big[u_t'(t,\tau) - z_t'(t,\tau)\big]^2 dt\right)^{1/2}. \quad (42)$$

Здесь $0 < L < +\infty$.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра в пространстве E

$$u(t,\tau) = \int\limits_0^\tau w(u(t,s), f(t))ds. \quad (43)$$

В силу неравенств (40) и (42), для уравнения (43) выполнены все условия леммы 1 из [2]. Поэтому существует решение $u(t,\tau)$ уравнения (43), которое при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ удовлетворяет соотношению

$$\int_a^b u'_t(t,\tau)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u(t,\tau)v(t)dt$$

$$+\sum_{k=2}^m \int_a^b q_k(t)u^k(t,\tau)v(t)dt = \tau \int_a^b f(t)v(t)dt$$

для любой функции $v(t) \in H^1(a,b;a)$. Таким образом, $u(t,1)$ является обобщенным решением задачи (30), (31).

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть*

$$p_0(t)(b-t) \in L(a,b), \quad 0 \leqslant f(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b), \tag{44}$$

$$0 \leqslant q_k(t)\big(b-t\big)^{(k+1)/2} \in L(a,b), \quad k = 2,\ldots,m, \tag{45}$$

$$d \equiv 1 - \int_a^b p_0^-(t)(b-t)dt > 0. \tag{46}$$

Тогда

(1) *существует неотрицательная функция* $w_0(t) \in H^1(a,b;b)$ *(обобщенное решение) такая, что*

$$\begin{gathered}\int_a^b w'_0(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)w_0(t)v(t)dt \\ +\sum_{k=2}^m \int_a^b q_k(t)w_0^k(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt\end{gathered} \tag{47}$$

при любых $v(t) \in H^1(a,b;b)$;

(2) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [w'_0]^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{d}\int_a^b f(t)\sqrt{b-t}\,dt; \tag{48}$$

(3) *если*

$$f(t) \in C[a,b), \quad p_0(t) \in C[a,b), \quad q_k(t) \in C[a,b) \quad (k=2,\dots,m), \tag{49}$$

то $w_0(t) \in C^{(2)}[a,b)$ *и является решением краевой задачи*

$$-w_0''(t) + p_0(t)w_0(t) + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)w_0^k(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{50}$$

$$w_0'(a) = 0, \quad w_0(b) = 0. \tag{51}$$

Лемма 4. *Пусть* $u(t) \in H^1(a,b;a)$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b \frac{u^2(t)}{(t-a)^2}dt \leqslant 4\int\limits_a^b [u'(t)]^2 dt. \tag{52}$$

Доказательство. Пусть $a < \varepsilon < b$. Тогда

$$\int\limits_\varepsilon^b \frac{u^2(t)}{(t-a)^2}dt = -\int\limits_\varepsilon^b u^2(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{t-a}\Big)dt$$

$$= \frac{u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-a} - \frac{u^2(b)}{b-a} + 2\int\limits_\varepsilon^b \frac{u(t)u'(t)}{(t-a)}dt$$

$$\leqslant \frac{u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-a} + 2\Big(\int\limits_\varepsilon^b \frac{u^2(t)}{(t-a)^2}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_\varepsilon^b [u'(t)]^2 dt\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-a} + \frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^b \frac{u^2(t)}{(t-a)^2}dt + 2\int\limits_\varepsilon^b [u'(t)]^2 dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_\varepsilon^b \frac{u^2(t)}{(t-a)^2}dt \leqslant \frac{2u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-a} + 4\int\limits_\varepsilon^b [u'(t)]^2 dt. \tag{53}$$

Используя лемму 1 из [3], получим, что

$$\frac{u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-a} \leqslant \int\limits_a^\varepsilon [u'(t)]^2 dt \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to a.$$

Так как
$$\int\limits_{\varepsilon}^{b}[u'(t)]^2dt \to \int\limits_{a}^{b}[u'(t)]^2dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to a,$$
то из неравенства (53) следует, что $\int\limits_a^b \frac{u^2(t)dt}{(t-a)^2}$ существует и верна оценка (52).

Лемма 5. *Пусть* $u(t) \in H^1(a,b;b)$. *Тогда*
$$\int\limits_a^b \frac{u^2(t)}{(b-t)^2}dt \leqslant 4\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt. \tag{54}$$

Доказательство.
$$\int\limits_a^{\varepsilon} \frac{u^2(t)}{(t-b)^2}dt = -\int\limits_a^{\varepsilon} u^2(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{t-b}\Big)dt = \frac{u^2(a)}{a-b} - \frac{u^2(\varepsilon)}{\varepsilon-b} + 2\int\limits_a^{\varepsilon}\frac{u(t)u'(t)}{t-b}dt$$
$$\leqslant \frac{u^2(\varepsilon)}{b-\varepsilon} + 2\Big(\int\limits_a^{\varepsilon}\frac{u^2(t)}{(b-t)^2}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_a^{\varepsilon}[u'(t)]^2dt\Big)^{1/2}.$$

Отсюда
$$\int\limits_a^{\varepsilon} \frac{u^2(t)}{(t-b)^2}dt \leqslant \frac{2u^2(\varepsilon)}{b-\varepsilon} + 4\int\limits_a^{\varepsilon}[u'(t)]^2dt. \tag{55}$$

Используя лемму 2 из [3], получим, что
$$\frac{u^2(\varepsilon)}{b-\varepsilon} \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{b}[u'(t)]^2dt \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to b.$$

Поэтому из неравенства (55) следует, что $\int\limits_a^b \frac{u^2(t)}{(b-t)^2}dt$ существует и верно неравенство (54). $\square$

Лемма 6. *Пусть*

$$|p_0(t)|(t-a)^2 \leqslant d < +\infty, \quad p_0^-(t)(t-a)^2 \leqslant c_0, \quad Q \equiv 1-4c_0 > 0. \quad (56)$$

Тогда для $u(t) \in H^1(a,b;a)$ *верно неравенство*

$$Q\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt \leqslant \int\limits_a^b [u'(t)]^2dt + \int\limits_a^b p_0(t)u^2(t)dt \leqslant (1+4d)\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt. \quad (57)$$

Лемма 7. *Пусть* $u(t) \in H^1(a,b;b)$ *и*

$$|p_0(t)|(b-t)^2 \leqslant D < +\infty, \quad p_0^-(t)(b-t)^2 \leqslant c_1, \quad R \equiv 1-4c_1 > 0.$$

Тогда верно неравенство

$$R\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt \leqslant \int\limits_a^b [u'(t)]^2dt + \int\limits_a^b p_0(t)u^2(t)dt \leqslant (1+4D)\int\limits_a^b [u'(t)]^2dt.$$

Теорема 5. *Пусть*

$$|p_0(t)|(t-a)^2 \leqslant d_1 < +\infty, \quad f(t)(t-a) \in L^2(a,b), \quad p_0^-(t)(t-a)^2 \leqslant c_0, \quad (58)$$

$$Q \equiv 1-4c_0 > 0. \quad (59)$$

Тогда

(1) *в пространстве функций* $H^1(a,b;a)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$, *на которой квадратичный функционал* (11) *достигает минимума;*

(2) *для всех* $v(t) \in H^1(a,b;a)$ *уравнение*

$$\int\limits_a^b u'(t)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)u(t)v(t)dt = \int\limits_a^b f(t)v(t)dt \quad (60)$$

относительно функции $u(t) \in H^1(a,b;a)$ *имеет одно и только одно решение, и этим решением является функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$, *на которой функционал* (11) *достигает минимума;*

(3) *верна оценка*

$$\left(\int\limits_a^b [u_0'(t)]^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{Q}\left(\int\limits_a^b f^2(t)(t-a)^2 dt\right)^{1/2}; \tag{61}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $u_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

(5) *если* $p_0(t) \in C(a,b]$, $f(t) \in C(a,b]$, *то* $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{62}$$

и краевым условиям

$$u_0(a) = 0, \quad u_0'(b) = 0. \tag{63}$$

При доказательстве теоремы 5 вместо леммы 3, использовавшейся при доказательстве теоремы 1, используется лемма 6.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:*

$$|p_0(t)|(t-b)^2 \leqslant D, \quad p_0^-(t)(t-b)^2 \leqslant c_1, \quad f(t)(b-t) \in L^2(a,b), \tag{64}$$

$$R \equiv 1 - 4c_1 > 0. \tag{65}$$

Тогда

(1) *в пространстве функций* $H^1(a,b;b)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$, *на которой квадратичный функционал*

$$J(u) \equiv \int\limits_a^b [u'(t)]^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t)u^2(t)dt - 2\int\limits_a^b f(t)u(t)dt \tag{66}$$

достигает минимума;

(2) *для всех* $v(t) \in H^1(a,b;b)$ *уравнение*

$$\int\limits_a^b v'(t)u'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)u(t)v(t)dt = \int\limits_a^b f(t)v(t)dt \tag{67}$$

относительно функции $u(t) \in H^1(a,b;b)$ *имеет одно и только одно решение, и этим решением является функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$, *на которой функционал* (66) *достигает минимума в пространстве* $H^1(a,b;b)$;

(3) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [u_0'(t)]^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{R}\left(\int_a^b f^2(t)(b-t)^2\, dt\right)^{1/2}; \tag{68}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $u_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

(5) *если* $p_0(t) \in C[a,b)$, $f(t) \in C[a,b)$, *то* $u_0(t) \in C^{(2)}[a,b)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{69}$$

и краевым условиям

$$u_0'(a) = 0, \quad u_0(b) = 0. \tag{70}$$

При доказательстве теоремы 6 вместо леммы 3, использовавшейся при доказательстве теоремы 1, используется лемма 7.

Теорема 7. *Пусть при* $a \leqslant t \leqslant b$ *выполнены условия:*

$$\begin{gathered} |p_0(t)|(t-a)^2 \leqslant d < +\infty, \quad p_0^-(t)(t-a)^2 \leqslant c_0, \\ f(t)(t-a) \in L^2(a,b), \end{gathered} \tag{71}$$

$$f(t) \geqslant 0, \quad Q \equiv 1 - 4c_0 > 0, \quad 0 \leqslant q_k(t)(t-a)^{(k+1)/2} \in L(a,b).$$

Тогда

(1) *существует неотрицательная функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$ *(обобщенное решение) такая, что*

$$\int_a^b u_0'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt + \sum_{k=2}^m \int_a^b q_k(t)u_0^k(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt \tag{72}$$

при любых $v(t) \in H^1(a,b;a)$;

(2) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [u_0'(t)]^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{Q}\left(\int_a^b f^2(t)(t-a)^2 dt\right)^{1/2}; \tag{73}$$

(3) *если*

$$p_0(t) \in C(a,b], \quad q_k(t) \in C(a,b] \quad (k = 2, \dots, m),$$

то $f(t) \in C(a,b]$, $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^k(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{74}$$

и краевым условиям

$$u_0(a) = 0, \quad u_0'(b) = 0. \tag{75}$$

Теорема 8. *Пусть при* $a \leqslant t \leqslant b$ *выполнены условия:*

$$\begin{gathered} |p_0(t)|(b-t)^2 \leqslant d_1 < +\infty, \quad p_0^-(t)(b-t)^2 \leqslant c_1, \\ 0 \leqslant f(t)(b-t) \in L^2(a,b), \quad R \equiv 1 - 4c_1 > 0, \\ 0 \leqslant q_k(t)(b-t)^{(k+1)/2} \in L(a,b) \quad (k = 2, \dots, m). \end{gathered} \tag{76}$$

Тогда

(1) *существует неотрицательная функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$ *(обобщенное решение краевой задачи) такая, что*

$$\int_a^b u_0'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt + \sum_{k=2}^{m} \int_a^b q_k(t)u_0^k(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt \tag{77}$$

при любой $v(t) \in H^1(a,b;b)$;

(2) *верна оценка*

$$\left(\int_a^b [u_0'(t)]^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{R} \left(\int_a^b f^2(t)(b-t)^2 dt \right)^{1/2}; \tag{78}$$

(3) *если*

$$f(t) \in C[a,b), \qquad p_0(t) \in C[a,b), \qquad q_k(t) \in C[a,b),$$

то $u_0(t)\in C^{(2)}[a,b)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t)+p_0(t)u_0(t)+\sum_{k=2}^{m}q_k(t)u_0^k(t)=f(t),\quad a<t<b, \tag{79}$$

и краевым условиям

$$u_0'(a)=0,\quad u_0(b)=0. \tag{80}$$

Теорема 9. *Пусть*

$$\begin{gathered}|p_0(t)|(t-a)\in L(a,b),\quad f(t)\sqrt{t-a}\in L(a,b),\\ 0\leqslant f_0(t)\sqrt{t-a}\in L(a,b),\end{gathered} \tag{81}$$

$$0\leqslant q_k(t)(t-a)^{k+1}\in L(a,b),$$

$$-c|u|\leqslant\varphi(u)u,\ c>0,\quad \text{и}\ \ \varphi(u)\ \ \text{непрерывна при}\ \ -\infty<u<+\infty, \tag{82}$$

$$1-\int_a^b p_0^-(t)(t-a)dt\equiv d>0\quad (k=2,\dots,m). \tag{83}$$

Тогда

(1) *существует по крайней мере одна функция (обобщенное решение)* $u_0(t)\in H^1(a,b;a)$ *такая, что*

$$\begin{gathered}\int_a^b u_0'(t)v'(t)dt+\int_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt+\sum_{k=2}^{m}\int_a^b q_k(t)u_0^{2k+1}(t)v(t)dt\\ +\int_a^b f_0(t)\varphi(u_0(t))v(t)dt-\int_a^b f(t)v(t)dt\equiv\Phi(u_0,v)=0\end{gathered} \tag{84}$$

для любой $v(t)\in H^1(a,b;a)$*;*

(2) *при* $\varphi(u)\equiv 0$ *функция* $u_0(t)$ *единственна, и верно неравенство*

$$\left(\int_a^b[u_0'(t)]^2dt\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{d}\int_a^b|f(t)|\sqrt{t-a}\,dt; \tag{85}$$

(3) *если*

$$\begin{gathered}p_0(t)\in C(a,b],\quad f(t)\in C(a,b],\quad q_k(t)\in C(a,b]\quad (k=2,\dots,m),\\ f_0(t)\in C(a,b],\end{gathered}$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^{2k+1}(t) + f_0(t)\varphi(u_0(t)) = f(t), \qquad a < t < b, \quad (86)$$

и краевым условиям

$$u_0(a) = 0, \quad u_0'(b) = 0; \qquad (87)$$

(4) *при* $\varphi(u) \equiv 0$ *метод Галеркина по полной в* $H^1(a,b;a)$ *системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $u_0(t)$ *по норме пространства* $H^1(a,b;a)$, *т.е. если* $u_n = \sum_{p=1}^{n} c_p^{(n)}\varphi_p$, *то* $c_k^{(n)}$ *однозначно определяются из системы уравнений*

$$\int_a^b u_n'(t)\varphi_p'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u_n(t)\varphi_p(t)dt + \sum_{k=2}^{m}\int_a^b q_k(t)u_n^{2k+1}(t)\varphi_p(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi_p(t)dt \quad (p = 1, \dots, n), \qquad (88)$$

и $\|u_n - u_0\|_{H^1(a,b;a)} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Положим $T(u) = T_1(u) + T_2(u)$, где

$$(T_1(u), v)_{H^1(a,b;a)} = \int_a^b u'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u(t)v(t)dt + \sum_{k=2}^{m}\int_a^b q_k(t)u^{2k+1}(t)v(t)dt - \int_a^b f(t)v(t)dt,$$

$$(T_2(u), v)_{H^1(a,b;a)} = \int_a^b f_0(t)\varphi(u(t))v(t)dt$$

при любых $v(t) \in H^1(a,b;a)$ и любых $u(t) \in H^1(a,b;a)$. В условиях теоремы оператор $T_1(u)$ как оператор из $H^1(a,b;a)$ в $H^1(a,b;a)$ монотонен и деминепрерывен. Оператор $T_2(u)$ как оператор из

$H^1(a,b;a)$ в $H^1(a,b;a)$ вполне непрерывен, т.е. преобразует последовательность, слабо сходящуюся в $H^1(a,b;a)$, в последовательность, сходящуюся по норме в пространстве $H^1(a,b;a)$. В самом деле, пусть $u_n \to u_0$ слабо в $H^1(a,b;a)$. Тогда

$$\|T_2(u_n) - T_2(u_0)\|_{H^1(a,b;a)} = \sup_{\|v\|=1} \left| \int_a^b [f_0(t)\varphi(u_n) - f_0(t)\varphi(u_0)]v(t)dt \right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f_0(t)|\sqrt{t-a}\, dt \max_{a\leqslant t\leqslant b} [\varphi(u_n(t)) - \varphi(u_0(t))| \to 0,$$

так как последовательность, слабо сходящаяся в $H^1(a,b;a)$, сходится по норме в $C[a,b]$.

По теореме существования решения уравнения с коэрцитивным оператором, являющимся суммой монотонного деминепрерывного оператора и вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве (см. [4, с. 271]), существует по крайней мере одно решнеие u^* уравнения $(T(u^*), v) = \Phi(u^*, v) = 0$, т.е. $u^*(t) \in H^1(a,b;a)$ и удовлетворяет соотношению (84).

Теорема 10. *Пусть*

$$|p_0(t)|(b-t) \in L(a,b), \quad f(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b), \qquad 0 \leqslant f_0(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b), \tag{89}$$

$$0 \leqslant q_k(t)(b-t)^{k+1} \in L(a,b),$$

$$-c|u| \leqslant \varphi(u)u, \quad c>0 \quad \text{и} \quad \varphi(u) \quad \text{непрерывна при} \quad -\infty < u < +\infty, \tag{90}$$

$$1 - \int_a^b p_0^-(t)(b-t)dt \equiv D > 0 \quad (k = 2, \dots, m). \tag{91}$$

Тогда

(1) *существует по крайней мере одна функция $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$ такая, что*

$$\Phi(u_0, v) = 0 \tag{92}$$

при любых $v(t) \in H^1(a,b;b)$;

(2) *при* $\varphi(u) \equiv 0$ *функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$ *единственна, и верна оценка*

$$\left(\int_a^b [u_0'(s)]^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{D}\int_a^b |f(t)|\sqrt{b-t}\,dt; \qquad (93)$$

(3) *если*

$$p_0(t) \in C[a,b), \quad f_0(t) \in C[a,b), \qquad q_k(t) \in C[a,b) \ \ (k=2,\dots,m),$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}[a,b)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^{2k+1}(t) + f_0(t)\varphi(u_0(t)) = f(t), \qquad a<t<b, \quad (94)$$

и краевым условиям

$$u_0'(a) = 0, \quad u_0(b) = 0; \qquad (95)$$

(4) *при* $\varphi(u) \equiv 0$ *метод Галеркина по полной в* $H^1(a,b;b)$ *системе* $\{\varphi_k\}$ *сходится по норме пространства* $H^1(a,b;b)$ *к функции* $u_0(t)$, *т.е. система* (88) *однозначно разрешима и* $\int_a^b [u_0'(t) - u_n'(t)]^2 dt \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 11. *Пусть*

$$|p_0(t)|(t-a)^2 \leqslant d < +\infty, \quad p_0^-(t)(t-a)^2 \leqslant c_0, \quad f(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b),$$

$$0 \leqslant f_0(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b), \quad 0 \leqslant q_k(t)(t-a)^{k+1} \in L(a,b) \ \ (k=2,\dots,m),$$

$$Q \equiv 1 - 4c_0 > 0, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

$$-c|u| \leqslant \varphi(u)u, \quad c>0, \quad \text{и} \ \ \varphi(u) \ \ \text{непрерывна при} \ \ -\infty < u < +\infty.$$

Тогда

(1) *существует по крайней мере одна функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;a)$, *удовлетворяющая соотношению* (84);

(2) *если* $\varphi(u) \equiv 0$, *то* $u_0(t)$ *единственна и*

$$\left(\int_a^b [u_0'(s)]^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{Q}\int_a^b |f(t)|\sqrt{t-a}\,dt;$$

(3) *если*

$$f(t) \in C(a,b], \quad p_0(t) \in C(a,b], \quad q_k(t) \in C(a,b] \quad (k = 2,\dots,m),$$
$$f_0(t) \in C(a,b],$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b]$ *и удовлетворяет уравнению*

$$-u_0''(t)+p_0(t)u_0(t)+\sum_{k=2}^{m} q_k(t)u_0^{2k+1}(t)+f_0(t)\varphi(u_0(t)) = f(t), \quad a < t < b,$$

и краевым условиям

$$u_0(a) = 0, \quad u'(b) = 0;$$

(4) *верно утверждение* (4) *теоремы* 9.

Теорема 12. *Пусть при* $a \leqslant t \leqslant b$

$$|p_0(t)|(b-t)^2 \leqslant D < +\infty, \quad p_0^-(t)(b-t)^2 \leqslant c_1, \quad f(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b),$$
$$0 \leqslant f_0(t)\sqrt{b-t} \in L(a,b), \quad 0 \leqslant q_k(t)(b-t)^{k+1} \in L(a,b) \ \ (k = 2,\dots,m),$$
$$R \equiv 1 - 4c_1 > 0,$$
$$-c|u| \leqslant \varphi(u)u, \quad c > 0 \ \ \text{и} \ \ \varphi(u) \ \ \text{непрерывна при} \ \ -\infty < u < +\infty.$$

Тогда верны заключения (1), (3), (4) *теоремы* 10 *и при* $\varphi \equiv 0$ *функция* $u_0(t) \in H^1(a,b;b)$, *удовлетворяющая* (92), *единственна и*

$$\left(\int_a^b [u_0'(s)]^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{R}\int_a^b |f(t)|\sqrt{b-t}\,dt.$$

Литература

1. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ.* Научная книга, Новосибирск, 1998.
2. М. Н. Яковлев, *Разрешимость нелинейных уравнений в конусе пространства Банаха.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **248** (1998), 225–230.
3. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка 2m.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 174–188.
4. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* Наука, М., 1972.

Yakovlev M. N. Mixed boundary-value problems for singular second-order ordinary differential equations.

It is proved that the boundary-value problem

$$-u'' + p_0(t)u(t) + \sum_{k=2}^{m} q_k(t)u^{2k+1}(t) + f_0(t)\varphi(u(t)) = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0,$$

has a solution, provided that the following conditions are fulfilled:

$$|p_0(t)|(t-a) \in L(a,b), \quad f(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b),$$

$$0 \leqslant f_0(t)\sqrt{t-a} \in L(a,b), \quad 0 \leqslant q_k(t)(t-a)^{k+1} \in L(a,b),$$

$$-c|u| \leqslant \varphi(u)u, \quad c > 0,$$

$$1 - \int_a^b p_0^-(t)(t-a)dt > 0,$$

and, for $\varphi(u) \equiv 0$, the Galerkin method converges in the norm of the space $H^1(a,b;a)$. Several theorems of a similar kind are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 июня 2006 г.