Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 9. МЕТОД ΨF–q ФАКТОРИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛИНОМОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

В статье предлагается новый метод (ΨF-q метод) для вычисления инвариантных полиномов q-параметрической полиномиальной матрицы F ($q \geqslant 1$). Инвариантные полиномы вычисляются в факторизованном виде, содержащем информацию о строении регулярного спектра матрицы F, позволяющую находить уровень наследственности точек спектра F, выделять делители, нули которых принадлежат только рассматриваемому инвариантному полиному, выделять делители, нули которых являются общими для по крайней мере двух соседних инвариантных полиномов и др. Метод ΨF-q факторизации применяется для представления матрицы F в виде произведения сомножителей, спектры которых совпадают с нулями соответствующих делителей характеристического полинома, в частности, с нулями любого инвариантного полинома, а также его делителей. ΨF-q метод использует RP-q метод (см. [5]) разложения на множители скалярного полинома от $q \geqslant 1$ переменных. Основными операциями метода являются: вычисление характеристического полинома и некоторых миноров матрицы F, вычисление наибольшего общего делителя двух скалярных полиномов от $k \leqslant q$ переменных, а также соответствующих им взаимно простых полиномов. Другими словами, ΨF-q метод использует алгоритм вычисления равенства вида

$$[f_1, f_2] = \delta[\widehat{f}_1, \widehat{f}_2]. \qquad (*)$$

Здесь f_1, f_2 – полиномы, δ – их наибольший общий делитель: $\delta = \text{НОД}\{f_1, f_2\}$; $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ – взаимно простые полиномы.

Вычисление миноров можно реализовать методом следов Д. К. Фаддеева для q-параметрических полиномиальных матриц (см., например, [1]). Вычисление равенства $(*)$ можно реализовать с помощью алгоритмов из [1, 2] для $q = 1$ и из [3, 4] для $q > 1$.

Статья состоит из введения и двух параграфов.

В §1 приводится метод ΨF-q факторизации инвариантных полиномов и его обоснование. В §2 рассматриваются применения метода к решению некоторых задач алгебры.

§1. Метод вычисления инвариантных полиномов

1. Постановка задачи

Пусть F есть q-параметрическая ($q \geqslant 1$) регулярная полиномиальная $n \times n$ матрица. Обозначим через $\{f_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, r$, следующую последовательность нетривиальных полиномов от $k \leqslant q$ переменных: $f_0 = f[F] = \det F$, f_k – наибольший общий делитель всевозможных миноров порядка $n - k$ матрицы F; $\psi_k = f_{k-1}/f_k$, $k = 1, \ldots, r+1$, – последовательность нетривиальных инвариантных полиномов матрицы F, так что $f_k = \psi_{k+1}\psi_{k+2}\cdots\psi_{r+1}$. Будем предполагать, что число r известно. Задача состоит в вычислении каждого из полиномов ψ_k в следующем факторизованном виде:

$$\psi_k = u^{(k)}\nabla_0^{(k)}\nabla_1^{(k)}\cdots\nabla_{t_k}^{(k)}h_k, \qquad k = 1, \ldots, r+1. \tag{1.1}$$

Здесь $\nabla_{t_k}^{(k)} = \text{const}$; $\nabla_i^{(k)} = v_{i+1}^{(k)}v_{i+2}^{(k)}\cdots v_{t_k}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, t_k - 1$, есть последовательность нетривиальных полиномов, т.е. $\nabla_i \neq \text{const}$ при $i < t_k$. Для фиксированного k, $k = 1, \ldots, r+1$, полином $u^{(k)}$ взаимно прост с каждым из полиномов $v_0, v_1, \ldots, v_{t_k}$, h_k и f_k. Полином $\nabla_0^{(k)}$ является общим делителем полиномов ψ_k и f_k.

Равенства вида (1.1) будем называть ΨF-q факторизацией инвариантных полиномов матрицы F.

1.2. Алгоритм вычисления ΨF-q факторизации

Алгоритм вычисления последовательности инвариантных полиномов вида (1.1) состоит из r типичных шагов. На каждом шаге с номером k, $k = 1, \ldots, r$, вычисляются полиномы f_k, h_k и инвариантный полином ψ_k в факторизованном виде (1.1). Рассмотрим типичный первый шаг, предполагая, что полином $f_0 = \det F$ вычислен. Выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется ненулевой минор p_{n-1} порядка $n - 1$ матрицы F.

(2) Находится полином $g_1 = \text{НОД}\{f_0, p_{n-1}\}$. Очевидно, $g_1 = h_1 f_1$, где h_1 – полином, нули которого принадлежат спектру матрицы F.

Если $g_1 \neq f_0$, то осуществляется переход к операции (3). В противном случае минор p_{n-1} должен быть заменен другим ненулевым минором матрицы F того же порядка.

(3) К полиномам $f := f_0$ и $g := g_1$ применяется алгоритм RP-q факторизации скалярных полиномов от $k \leqslant q$ переменных, согласно которому рекуррентно вычисляется последовательность равенств

$$[u_{i-1}, \nabla_{i-1}] = \nabla_i [u_i, v_i], \qquad i = 1, \dots, t. \tag{1.2}$$

Здесь $\nabla_i = \text{НОД}\{u_{i-1}, \nabla_{i-1}\}$, а u_i, v_i суть взаимно простые полиномы. Полиномы u_0 и ∇_0 определяются из равенства

$$\left[\frac{f}{g}, g\right] = \nabla_0 [u_0, v_0], \tag{1.3}$$

где $\nabla_0 = \text{НОД}\{\frac{f}{g}, g\}$, а полиномы u_0, v_0 взаимно просты.

Вычисление частного f/g также может быть выполнено с использованием равенства

$$[f, g] = \widehat{\nabla}[\widehat{u}, \widehat{v}], \quad \text{где} \quad \widehat{\nabla} = \text{НОД}\{f, g\}, \qquad \widehat{v} = \text{const}, \quad \widehat{u} = \frac{f}{g}.$$

Построение соотношений (1.2) заканчивается на шаге t, когда $\nabla_t = \text{const}$ ($\nabla_i \neq \text{const}$ при $i < t$). В результате будут получены равенства

$$\frac{f}{g \nabla_0 \nabla_1 \cdots \nabla_t} = u_t; \quad g = \nabla_0 v_0.$$

Отсюда, с учетом того, что $f/g = f_0/g_1 = \psi_1/h_1$, $f_0 = \psi_1 f_1$, $g = g_1 = h_1 f_1$, будем иметь

$$\psi_1 = u_t \nabla_0 \nabla_1 \cdots \nabla_t h_1;$$

$$f := f_0 = u_t \nabla_0 \nabla_1 \cdots \nabla_t g \equiv \psi_1 f_1; \quad g = \nabla_0 v_0 = h_1 f_1. \tag{1.4}$$

Для вычисления полинома h_1 рассмотрим раздельно две ситуации: $\nabla_t = \text{const}$ при $t = 0$ и $\nabla_t = \text{const}$ при $t > 0$.

Равенство $\nabla_0 \equiv \nabla_t = \text{const}$ означает, что полиномы f/g и g являются взаимно простыми, что возможно при выполнении любого из условий $f = g$ или $r = 1$, т.е. $f = \psi_1 \psi_2$. Случай $f = g$ не может иметь место в силу свойств последовательности полиномов p_k, $k=1,\dots,r$.

Рассмотрим второй случай, когда $r=1$. С учетом того, что $g_1=h_1f_1=h_1\psi_2$, по определению полинома ∇_0 имеем

$$\nabla_0=\text{НОД}\Big\{\frac{f}{g},g\Big\}=\text{НОД}\Big\{\frac{\psi_1}{h_1},h_1\psi_2\Big\}=\text{const},$$

так что $\nabla_0=\dfrac{1}{h_1}\text{НОД}\{\psi_1,h_1^2\psi_2\}=\dfrac{1}{h_1}(\text{НОД}\{\psi_1,h_1\})^2\ \text{НОД}\{\psi_1,\psi_2\}$ $=$const. Из равенства $\text{НОД}\{f_1,g_1\}=\psi_2\text{НОД}\{\psi_1,h_1\}$, где $\text{НОД}\{f,g\}$ $=g=h_1\psi_2$, находим $h_1=\text{НОД}\{\psi_1,h_1\}$. Так что при условии $\nabla_0=\text{const}$ имеют место соотношения: $h_1=\text{НОД}\{\psi_1,h_1\}=\text{const}$, $\nabla_0\text{НОД}\{\psi_1,\psi_2\}=\text{const}$. Таким образом, в том случае, когда $\nabla_t=\text{const}$ при $t=0$, искомые полиномы будут иметь вид $h_1=1$, $\psi_1=u_0$, $\psi_2=v_0$, $f=u_0v_0=\psi_1\psi_2$. При этом полиномы ψ_1 и ψ_2 являются взаимно простыми.

Рассмотрим ситуацию, когда $\nabla_t=\text{const}$ при $t>0$. Для вычисления полинома h_1 следует применить алгоритм ΨF-q факторизации к полиномам $g=\nabla_0v_0$ и v_0, т.е. представить матрицу $\Big[\dfrac{g}{v_0},v_0\Big]\equiv[\nabla_0,v_0]$ в виде

$$[\nabla_0,v_0]=\nabla^{(1)}[u^{(1)},v^{(1)}],\tag{1.5}$$

где $\nabla^{(1)}=\text{НОД}\{\nabla_0,v_0\}$, а полиномы $u^{(1)}$ и $v^{(1)}$ взаимно просты. С учетом (1.4) и (1.5) имеем $g=\nabla_0v_0=u^{(1)}v^{(1)}(\nabla^{(1)})^2$.

В качестве полинома h_1 в равенствах (1.4) следует взять полином $\nabla^{(1)}$. Тогда искомые полиномы ψ_1, f_1 и f будут иметь вид

$$\psi_1=u_1\nabla_0\nabla_1\cdots\nabla_th_1;\quad f_1=\frac{g}{h_1}=\frac{\nabla_0v_0}{h_1}=(u^{(1)}\nabla^{(1)})v_0^{(1)}=\nabla_0v^{(1)};$$

$$f\equiv\psi_1f_1=u_1\nabla_0\nabla_1\cdots\nabla_t\,g.\tag{1.6}$$

Вычисление равенств (1.1) для любого $k=1,\dots,r+1$ выполняется аналогично. Так для вычисления ψ_k в качестве начальных полиномов f и g берутся полиномы $f:=f_{k-1}$ и $g=g_k$, где f_{k-1} есть полином, полученный на предыдущем $(k-1)$-ом шаге; $g_k=h_kf_k=\text{НОД}\{f_{k-1},p_{n-k}\}$, p_{n-k} есть ненулевой минор порядка $n-k$ матрицы F.

Перейдем к обоснованию алгоритма, т.е. докажем свойства полиномов-сомножителей, входящих в факторизацию (1.1) полинома ψ_k, $k = 1, \dots, r+1$. Доказательство проводится аналогично для всех ψ_k. Рассмотрим доказательство для ψ_1.

Из равенств (1.2) следует, что полином u_t является делителем каждого из полиномов $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_0$. Учитывая, что по построению полиномы u_i и v_i являются взаимно простыми для каждого фиксированного i ($i = 0, 1, \dots, t$), заключаем, что полином u_t взаимно прост с каждым из полиномов $v_0, v_1, \dots, v_t$. Из (1.5) следует, что полином $\nabla^{(1)}$ является делителем полинома v_0. Следовательно, полиномы u_t и $\nabla^{(1)}$ являются взаимно простыми, так как по доказанному выше u_t и v_0 есть взаимно простые полиномы.

Для завершения обоснования алгоритма, следует доказать, что $h_1 = \nabla^{(1)}$.

Предварительно докажем, что полином v_0 взаимно прост с каждым из полиномов $\nabla_1, \dots, \nabla_t, u_t$.

Действительно, ввиду (1.2), имеет место равенство $u_0 = \nabla_1\nabla_2\cdots\nabla_t u_t$. По построению, полиномы u_0 и v_0 взаимно просты. Отсюда следует, что полином v_0 является взаимно простым с каждым из полиномов u_t и ∇_i, $i = 1, \dots, t$. По доказанному выше имеют место равенства

$$\psi_1 = (\nabla_1 \cdots \nabla_t u_t)\nabla_0 h_1 \quad \text{и} \quad g_1 = \nabla_0 v_0 = h_1 f_1,$$

так что каждый из полиномов ∇_0 и h_1 является общим делителем полиномов ψ_1 и g_1. С учетом сказанного, заключаем, что

$$h_1 = \text{НОД}\{\nabla_0, v_0\} := \nabla^{(1)},$$

что и требовалось доказать.

§2. Применение метода ΨF-q факторизации к решению некоторых задач алгебры

2.1. Метод ΨF-q факторизации для матриц общего вида

Пусть F есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Требуется вычислить последовательность $\{\psi_k\}$, $k = 1, \dots, r+1$, нетривиальных инвариантных полиномов матрицы F в виде (1.1). Учитывая, что матрица F и ее регулярная часть имеют одни и те же инвариантные полиномы, для решения задачи следует найти регулярную матрицу (обозначим ее

T), спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы F, и вычислить инвариантные полиномы $\psi_k[T]$, $k = 1, \dots, r+1$. Для этого в случае однопараметрической полиномиальной матрицы ($q = 1$) следует применить к матрице $F = F(\lambda)$, например, UTV-метод факторизации (см. [1, 2]), т.е. найти равенство вида

$$F = UTV,$$

где, по свойствам UTV-метода, T есть регулярная полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица, а U и V суть $m \times \rho$ и $\rho \times n$ полиномиальные матрицы, не имеющие регулярного спектра. Для выделения регулярной части многопараметрической полиномиальной матрицы можно применить алгоритм ∇V-q факторизации (см. [3]).

2.2. Факторизация полиномиальных матриц

Пусть $F = F(\lambda)$ – регулярная полиномиальная $n \times n$ матрица ($q = 1$), $f[F] \equiv f(\lambda)$ – характеристический полином F, $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ – некоторые известные делители $f(\lambda)$, ($f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$). Следует найти разложение $F(\lambda)$ вида

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) F_2(\lambda),$$

где F_1 и F_2 – регулярные полиномиальные $n \times n$ матрицы, имеющие $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ своими характеристическими полиномами: $f_1(\lambda) = \det F_1$, $f_2(\lambda) = \det F_2$.

Для решения этой задачи достаточно знать один из делителей $f[F]$. Алгоритм вычисления F_1 и F_2 состоит в выполнении следующих операций.

(1) Сформировать полиномиальную $n \times 2n$ матрицу

$$\Phi(\lambda) = [f_1(\lambda) I_n, F], \tag{2.1}$$

где I_n – единичная матрица.

(2) Применить к матрице $\Phi(\lambda)$ алгоритм ∇V-1 факторизации [1, 2]:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda) V(\lambda), \tag{2.2}$$

где $V := [V_1, V_2]$, а V_1 и V_2 – $n \times n$ полиномиальные матрицы. Из (2.2) следует, что

$$F(\lambda) = \nabla(\lambda) V_2(\lambda). \tag{2.3}$$

По свойствам ∇V-1 факторизации, спектр матрицы $\nabla(\lambda)$ совпадает со спектром матрицы $\Phi(\lambda)$, т.е. с нулями полинома $f_1(\lambda)$.

Поэтому в качестве искомых матриц следует взять $F_1(\lambda) = \nabla(\lambda)$ и $F_2(\lambda) = V_2(\lambda)$.

Пусть характеристический полином $f[F]$ регулярной матрицы $F(\lambda)$ представлен в виде RP-1 факторизации:

$$f[F] = \prod_{k=1}^{r+1} \left(u^{(k)} \nabla_0^{(k)} \cdots \nabla_{t_k}^{(k)} \right) \equiv \prod_{k=1}^{r+1} \alpha^{(k)}, \tag{2.4}$$

где $\alpha^{(k)} := u^{(k)} \nabla_0^{(k)} \cdots \nabla_{t_k}^{(k)}$.

Рассмотрим решение следующих задач.

а) Найти делитель $F_1(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$, спектр которого совпадает с нулями полинома $u^{(1)}$. С этой целью в качестве матрицы $\Phi(\lambda)$ следует взять $\Phi(\lambda) = [u^{(1)} I_n, F]$. В результате применения ∇V-1 разложения к матрице $\Phi(\lambda)$ будем иметь равенства $\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)[V_1(\lambda), V_2(\lambda)]$, $F(\lambda) = \nabla(\lambda) V_2(\lambda)$. Здесь матрица $F_1(\lambda) := \nabla(\lambda)$ будет искомым делителем $F(\lambda)$, так как по свойствам ∇V-1 метода спектр $\nabla(\lambda)$ совпадает со спектром матрицы $\Phi(\lambda)$, т.е. с нулями полинома u_1.

б) Найти делитель $F_1(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$, нули характеристического полинома которого совпадают с нулями инвариантного полинома $\psi_1(\lambda)$. С этой целью в качестве полинома $f_1(\lambda)$ при формировании матрицы $\Phi(\lambda)$ следует взять полином $\psi_1(\lambda) = u^{(1)} \nabla_0^{(1)}(\lambda) \nabla_1^{(1)}(\lambda) \cdots \nabla_{t_1}^{(1)}(\lambda)$. В результате ∇V-1 факторизации матрицы $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)[V_1(\lambda), V_2(\lambda)]$$

получим искомую матрицу $F_1(\lambda) = \nabla(\lambda)$.

в) Получить разложение $F(\lambda)$ вида

$$F(\lambda) = P_{i_1} \cdots P_{i_{r+1}} Q, \tag{2.5}$$

где $f[P_k] = u^{(k)} \nabla_0^{(k)} \cdots \nabla_{t_k}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, r+1$, $f[Q] = \mathrm{const}$, $i_1, \ldots, i_{r+1}$ – произвольная последовательность индексов из множества $\{1, \ldots, r+1\}$.

Метод построения равенства (2.5) состоит из $r+1$ типичных шагов. Для определенности выберем $i_k = k$, $k = 1, \ldots, r+1$.

На первом шаге выполняются следующие операции.

(1) Формируется матрица $\Phi_1(\lambda) = [\alpha^{(1)} I_n, F_0]$, $F_0 = F$.

(2) Находится ∇V-1 факторизация $\Phi_1(\lambda)$: $\Phi_1(\lambda) = \nabla^{(1)} V^{(1)} = \nabla^{(1)} [V_1^{(1)}, V_2^{(1)}]$, где $V_2^{(1)}$ есть матрица, составленная из последних n столбцов $V^{(1)}$.

Результатом первого шага будет равенство

$$F_0 = P_1 F_1, \quad \text{где} \quad P_1 = \nabla^{(1)}, \quad F_1 = V_2^{(1)}.$$

Пусть на шаге k получено равенство

$$F_{k-1} = P_1 P_2 \cdots P_k F_k.$$

Для вычисления равенства $F_k = P_{k+1} F_{k+1}$ к матрице $\Phi_{k+1} = [\alpha^{(k+1)} I_n, F_k]$ применяется метод ∇V-1 факториазции: $\Phi_{k+1} = \nabla^{(k+1)}[V_1^{(k+1)}, V_2^{(k+1)}]$, так что имеет место равенство $F_k = \nabla^{(k+1)} V_2^{(k+1)}$. Искомыми матрицами $(k+1)$-го шага являются $P_{k+1} = \nabla^{(k+1)}$ и $F_{k+1} = V_2^{(k+1)}$. Процесс заканчивается на шаге $k = r+1$. В результате будем иметь факторизацию (2.5) матрицы $F(\lambda)$, где $Q(\lambda) = V_2^{(r+1)}$ есть унимодулярная матрица.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–329.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач.* Ч. 1 *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.
3. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры.* 5. — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 144–153.
4. В. Б. Хазанов, *Методы решения некоторых параметрических задач алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 164–181.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры* 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 149–164.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 9. The ΨF-q method for factorizing invariant polynomials and its applications.

A new method (the ΨF-q method) for computing the invariant polynomials of a q-parameter ($q \geqslant 1$) polynomial matrix F is suggested. Invariant polynomials are computed in factored form, which permits one to analyze the structure of the regular spectrum of the matrix F, to isolate the divisors of each of the invariant polynomials whose zeros belong to the invariant polynomial in question, to find the divisors whose zeros belong to at least two of the neighboring invariant polynomials, and to determine the heredity levels of points of the spectrum for each of the invariant polynomials. Applications of the ΨF-q method to representing a polynomial matrix $F(\lambda)$ as a product of matrices whose spectra coincide with the zeros of the corresponding divisors of the characteristic polynomial and, in particular, with the zeros of an arbitrary invariant polynomial or its divisors are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 9 марта 2006 г.

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru