Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 8. МЕТОД *RP–q* ФАКТОРИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

1. *RP-q* факторизация скалярных полиномов

1.1. Постановка задачи

Пусть $f := f(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть скалярный полином от q переменных, $q \geqslant 1$, g есть делитель f такой, что полиномы f/g и g не являются взаимно простыми. В частности, $f \neq g$; $g \neq \mathrm{const}$; полином f не является неприводимым в рассматриваемом числовом поле.

Ниже предлагается алгоритм (RP-q алгоритм) представления полинома f в следующих видах:

$$f = u_t^{(1)} \nabla_0^{(1)} \nabla_1^{(1)} \cdots \nabla_t^{(1)} g, \qquad g = \nabla_0^{(1)} v_0^{(1)}; \tag{1.1}$$

$$f = \prod_{k=1}^{s} \left(u_{t_k}^{(k)} \nabla_0^{(k)} \nabla_1^{(k)} \cdots \nabla_{t_k}^{(k)} \right) \nabla_0^{(s)} v_0^{(s)}, \tag{1.2}$$

где $\nabla_0^{(s)}$ и $v_0^{(s)}$ суть взаимно простые полиномы. При этом равенство (1.2) имеет место, если при $1 \leqslant k < s$ полиномы $\nabla_0^{(k)}$ и $v_0^{(k)}$ не являются взаимно простыми.

Для любого фиксированного k, $k = 1, \dots, s$, справедливы следующие свойства разложений (1.1), (1.2).

(α) $\nabla_{t_k}^{(k)} = \mathrm{const}$, $\nabla_i^{(k)} = v_{i+1}^{(k)} v_{i+2}^{(k)} \cdots v_{t_k}^{(k)} \nabla_{t_k}^{(k)} \neq \mathrm{const}$ при $i = 1, \dots, t_k - 1$.

(β) Полином $u_{t_k}^{(k)}$ является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, v_{t_k}^{(k)}$.

(γ) Полином $\nabla_i^{(k)}$ является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0^{(k)}, \dots, v_{i-1}^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, t_k$. Для каждого фиксированного i, $i = 1, \dots, t_k - 1$, полиномы $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, v_{i-1}^{(k)}$ взаимно просты с каждым из полиномов $v_j^{(k)}$, $j = i + 1, \dots, t_k$.

(δ) Полином $u_{t_k}^{(k)}$ является взаимно простым с каждым из полиномов $\nabla_0^{(k)}$ и g.

Реализация разложений (1.1) и (1.2) основана на вычислении наибольшего общего делителя (НОД) двух произвольных полиномов от $k \leqslant q$ переменных и их преобразовании во взаимно простые полиномы. Другими словами, основной операцией реализации разложений (1.1) и (1.2) является вычисление для любых двух полиномов f_1 и f_2 соотношения

$$[f_1, f_2] = \delta[f_3, f_4], \tag{1.3}$$

где $[f_i, f_j]$ есть q-параметрическая ($q \geqslant 1$) полиномиальная 1×2 матрица, δ есть НОД полиномов f_1 и f_2, а полиномы f_3 и f_4 взаимно просты.[1]

1.2. Алгоритм RP-факторизации и его обоснование

Алгоритм вычисления разложений (1.1) и (1.2) выполняет следующие операции.

(1) Вычисляется полином $\widehat{u} := f/g$, т.е. находится равенство вида (1.3) для матрицы $[f, g]$: $[f, g] = \widehat{\nabla}[\widehat{u}, \widehat{v}]$, где $\widehat{v} = \text{const}$, $\widehat{u} = f/g$.

(2) По рекурсии вычисляются соотношения вида (1.3) для матрицы $[u_{k-1}, \nabla_{k-1}]$:

$$\begin{aligned} &[\widehat{u}, g] = \nabla_0[u_0, v_0], \\ &[u_{k-1}, \nabla_{k-1}] = \nabla_k[u_k, v_k], \quad k = 1, \ldots, t. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\nabla_i \neq \text{const}$ при $i < t$; $\nabla_t = \text{const}$, $g = \nabla_0 v_0$;

$$u_{i-1} = \frac{f}{g\nabla_0\nabla_1 \cdots \nabla_{i-1}}.$$

Результатом выполнения операций (1) и (2) является равенство $[u_{t-1}, \nabla_{t-1}] = \nabla_t[u_t, v_t]$, из которого находим

$$f = u_t \nabla_0 \nabla_1 \cdots \nabla_t g, \quad g = \nabla_0 v_0. \tag{1.5}$$

В обозначениях $u_t^{(1)} := u_t$, $\nabla_k^{(1)} := \nabla_k$, $v_k^{(1)} := v_k$ равенство (1.5) совпадает с искомым равенством (1.1).

[1] Алгоритмы вычисления равенства (1.3) для скалярных полиномов от одной переменной приведены, например, в [1, 2], а для полиномов от нескольких переменных – в [3, 4].

Если полиномы ∇_0 и v_0 (т.е. делители полинома g) не являются взаимно простыми, то процесс факторизации полинома f для получения равенства (1.2) продолжается. В качестве начальных полиномов для выполнения следующего шага берутся полиномы g и $v_0^{(1)}$, а в качестве начальной матрицы для выполнения рекурсии (1.4) берется матрица $\left[\dfrac{g}{v_0^{(1)}}, v_0^{(1)}\right] \equiv [\nabla_0^{(1)}, v_0^{(1)}]$.

Процесс разложения f на множители заканчивается на шаге $k = s$, когда полиномы $\nabla_0^{(s)}$ и $v_0^{(s)}$ будут взаимно просты.[2]

Перейдем к обоснованию алгоритма. Сначала установим, что алгоритм построения разложений (1.1) и (1.2) является конечным.

По построению из (1.4) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\deg \nabla_0^{(k)} > \deg \nabla_1^{(k)} > \cdots > \deg \nabla_{t_k}^{(k)}; \quad \nabla_{t_k} = \mathrm{const}\\
&\deg \nabla_0^{(1)} > \deg \nabla_0^{(2)} > \cdots > \deg \nabla_0^{(s)};\\
&\deg v_0^{(1)} > \deg v_0^{(2)} > \cdots > \deg v_0^{(s)}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Справедливость (1.6) доказывает конечность алгоритма.

Докажем свойства полиномов, входящих в разложения (1.1) и (1.2) для каждого фиксированного $k = 1, \dots, s$, при этом значок k будем для краткости опускать. При доказательстве используем справедливость следующих утверждений.

Лемма.

1) *Если f_1 и f_2 суть взаимно простые полиномы, то любой делитель полинома f_1 (полинома f_2) является взаимно простым с полиномом f_2 (с полиномом f_1).*

2) *Полиномы u_i, v_i, $i = 0, 1, \dots, t$, входящие в соотношения* (1.4), *являются взаимно простыми.*

3) *Имеют место равенства:*

$$u_{i-1} = \nabla_i u_i = \nabla_i \nabla_{i+1} u_{i+1} = \cdots = \nabla_i \nabla_{i+1} \cdots \nabla_t u_t, \quad i = 1, \dots, t, \tag{1.7}$$

$$\nabla_{i-1} = \nabla_i v_i = \nabla_{i+1} v_i v_{i+1} = \cdots = v_i v_{i+1} \cdots v_t \nabla_t. \tag{1.8}$$

---

[2] Критерием взаимной простоты двух полиномов в (1.3) является равенство $\delta = \mathrm{const}$.

Справедливость утверждения 1) следует из определения взаимно простых полиномов как полиномов, не имеющих общих делителей. Справедливость 2) и 3) следует из соотношений (1.4).

Из равенств (1.7) следует, что полином u_t является делителем каждого из полиномов u_i, $i = 0, 1, \dots, t$. Тогда из утверждений 2) и 1) следует справедливость свойства (β).

Из (1.7) следует, что полином ∇_i, $i = 1, \dots, t$, есть делитель каждого из полиномов $u_{i-1}, \dots, u_0$. По свойству β) полиномы u_j и v_j, $j = 0, 1, \dots, t$, взаимно просты. Следовательно, с учетом леммы полином ∇_i является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$. Отсюда, учитывая равенство $\nabla_i = v_{i+1}, \dots, v_t$, заключаем, что каждый из полиномов $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$ явдяется взаимно простым с любым из полиномов v_j, $j = i+1, \dots, t-1$. Справедливость свойства γ) установлена. Справедливость свойства (δ) следует из доказанных выше свойств с учетом равенств $\nabla_0 = \nabla_t v_1 v_2 \cdots v_t$, $g = \nabla_0 v_0$.

В дальнейшем, не умаляя общности, в качестве RP-q факторизации полинома f будем брать равенство (1.1).

1.3. Применение RP-q метода к факторизации инвариантных полиномов

Пусть F есть регулярная q-параметрическая полиномиальная матрица ($q \geqslant 1$); $f_0 = f_0[F] = \det F$ – характеристический полином F; $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{r+1}$ – последовательность нетривиальных инвариантных полиномов $F : \psi_k = f_{k-1}/f_k$, $k = 1, \dots, r+1$, f_k есть НОД всевозможных миноров порядка $n-k$ матрицы F. Будем предполагать, что полиномы f_0, ψ_k, $k = 1, \dots, r+1$, известны. Вычисление f_0 можно реализовать методом следов Д. К. Фаддеева для регулярной полиномиальной q-параметрической матрицы (см. [1]). Способы вычисления последовательности инвариантных полиномов $\{\psi_k\}$, $k = 1, \dots, r+1$, приведены в [2] для случая однопараметрической полиномиальной матрицы $F = F(\lambda)$, а для многопараметрической полиномиальной матрицы – в [5, 6].

Ставится задача факторизации полиномов ψ_k, $k = 1, \dots, r+1$, с использованием RP-q метода. Для определенности рассмотрим факторизацию полинома ψ_1, т.е. представление ψ_1 в виде

$$\psi_1 = u_t^{(1)} \nabla_0^{(1)} \nabla_1^{(1)} \cdots \nabla_t^{(1)}. \tag{1.9}$$

Здесь $\nabla_i^{(1)} = v_{i+1}^{(1)} v_{i+2}^{(1)} \cdots v_t^{(1)}$; $\nabla_i^{(1)} \neq \text{const}$ при $i < t$, $\nabla_t^{(1)} = \text{const}$.

Полином $u_t^{(1)}$ является взаимно простым с каждым из полиномов ψ_i, $i = 2, \ldots, r+1$; $v_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \ldots, t$, $\nabla_0^{(1)}$. Полином $\nabla_0^{(1)}$ имеет общие делители с полиномом f_1, $f_1 = \psi_2\psi_3 \cdots \psi_{r+1}$.

Для вычисления равенства (1.9) применяется алгоритм RP-q факторизации скалярного полинома из п. 1.2, где в качестве начальных данных берутся полиномы $f := f_0$ и $g := f_1$. Ввиду того, что $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f_0}{f_1} = \psi_1$, результатом применения RP-q алгоритма будет равенство (1.9). Справедливость свойств полиномов, входящих в (1.9), следует из свойств полиномов, входящих в RP-q факторизацию.

Для вычисления факторизации полинома ψ_k для любого $k > 1$, следует применить алгоритм RP-q факторизации к полиномам $f := f_{k-1}$ и $g = f_k$. С учетом равенств $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f_{k-1}}{f_k} = \psi_k$, получим

$$\psi_k = u_{t_k}^{(k)} \nabla_0^{(k)} \nabla_1^{(k)} \cdots \nabla_{t_k}^{(k)}. \tag{1.10}$$

Здесь $\nabla_{t_k}^{(k)} = \mathrm{const}$, $\nabla_i^{(k)} = v_{i+1}^{(k)} v_{i+2}^{(k)} \cdots v_{t_k}^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, t_k$, $\nabla_i^{(k)} \neq \mathrm{const}$ при $i < t_k$.

Полином $u_{t_k}^{(k)}$ является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_{t_k}^{(k)}$, $\nabla_0^{(k)}$, f_{k+i}. Полином $\nabla_0^{(k)}$ имеет общие делители с полиномом f_{k+1}. Полином $\nabla_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, t_k$, является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_{j-1}^{(k)}$. При этом полином $v_i^{(k)}$, $i = j+1, \ldots, t_k$, является взаимно простым с каждым из полиномов $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_{i-1}^{(k)}$.

1.4. Применение алгоритма RP-q факторизации к решению СНАУ

Пусть

$$f_k := f_k(\overline{\mu}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

есть система нелинейных алгебраичеких уравнений (СНАУ) от $k \leqslant q$ переменных $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, имеющая $(q-k)$-мерные решения. Задача состоит в вычислении $(q-1)$-мерных решений СНАУ (в том числе и их пересечений с другими $(q-k)$-мерными решениями) и их исчерпывании из СНАУ (1.11).

Предлагается алгоритм решения задачи, состоящий из трех стадий. На первой стадии левая часть каждого из уравнений

(1.11) представляется в виде RP-q факторизации. На второй стадии вычисляются полиномы, каждый из которых представляет собой произведений $(q-1)$-мерных решений. Находится СНАУ, решения которой отличаются от решений СНАУ (1.11) отсутствием $(q-1)$-мерных решений. На третьей стадии из СНАУ, полученной на второй стадии, исчерпываются критические точки решаемой системы.

Рассмотрим реализацию каждой стадии раздельно.

Первая стадия. Каждый полином $f_k(\overline{\mu})$ $k = 1, \dots, n$, из (1.11) представляется в виде RP-q факторизации с использованием алгоритма из п. 1.2. В качестве начальных полиномов для применения RP-q алгоритма выбираются полиномы $f := f_k(\overline{\mu})$ и $g = g(\overline{\mu})$, где $g(\overline{\mu})$ есть наибольший общий делитель совокупности полиномов $f_1(\overline{\mu}), \dots, f_n(\overline{\mu})$.

Результатом первой стадии будут равенства

$$\begin{gathered} f_k(\overline{\mu}) = g(\overline{\mu})\nabla_0^{(k)}(\overline{\mu})\nabla_1^{(k)}(\overline{\mu})\cdots\nabla_{t_k}^{(k)}(\overline{\mu})u_{t_k}^{(k)}(\overline{\mu}), \\ k = 1, \dots, n, \qquad \nabla_{t_k}^{(k)}(\overline{\mu}) = \mathrm{const}, \qquad g = v_0^{(k)}(\overline{\mu})\nabla_0^{(k)}(\overline{\mu}). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Не умаляя общности, считаем, что $t_1 < t_2 < \dots < t_r$. По свойствам RP-q факторизации при любом фиксированном k, $k = 1, \dots, n$, полиномы, входящие в равенства (1.12), обладают следующими свойствами.

1°. $\nabla_i^{(k)}(\overline{\mu}) = \prod_{j=i+1}^{t_k} v_j^{(k)}(\overline{\mu})$, $i = 0, 1, \dots, t_k - 1$.

2°. Каждый полином $v_j^{(k)}(\overline{\mu})$, $j = 1, \dots, i-1$, взаимно прост с каждым из полиномов $v_{i+1}^{(k)}, \dots, v_{t_k}^{(k)}$.

3°. Полином $\nabla_i^{(k)}(\overline{\mu})$, $i = 1, \dots, t_k$, взаимно прост с каждым из полиномов $v_j^{(k)}(\overline{\mu})$, $j = 0, 1, \dots, i-1$.

Вторая стадия состоит в выполнении следующих операций.

(1) Вычисляются полиномы $\delta[\nabla_i]$, $i = 0, 1, \dots, t_k$, где $\delta[\nabla_i] = \text{НОД}\{\nabla_i^{(k)}(\overline{\mu})\}_{k=1}^n$.

(2) Вычисляются полиномы $\delta[v_i]$, $i = 0, 1, \dots, t_k$, где

$$\begin{gathered} \delta[v_0] = \text{НОД}\{v_0^{(k)}\}_{k=1}^n; \\ \delta[v_i] := \frac{\delta[\nabla_{i-1}]}{\delta[\nabla_i]}, \qquad i = 1, \dots, t_k. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Результатом второй стадии являются искомые полиномы и СНАУ, которая не содержит $(q-1)$-мерных решений СНАУ (1.11). Полином $\delta[v_0]$ есть произведение $(q-1)$-мерных решений СНАУ (1.11), не имеющих общих нулей с другими ее $(q-k)$-мерными ($k \neq 1$) решениями. Полином $\delta[\nabla_0] = \prod_{i=1}^{t_k} \delta[v_i]$ есть произведение $(q-1)$-мерных решений СНАУ (1.11), имеющих общие нули с другими ее $(q-k)$-мерными решениями. Решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\widehat{f}_k(\overline{\mu}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.14}$$

где $f_k(\overline{\mu}) = \delta[v_0]\delta[\nabla_0]\widehat{f}_k(\overline{\mu})$, отличаются от решений СНАУ (1.11) отсутствием ее $(q-1)$-мерных решений.

Третья стадия состоит в выполнии следующих операций.

(1) Матрица $\widehat{F}(\overline{\mu}) := [\widehat{f}_1(\overline{\mu}), \ldots, \widehat{f}_n(\overline{\mu})]$ записывается в виде матричного полинома по степеням одного (скажем μ_i) из своих параметров:

$$\widehat{F}(\overline{\mu}) \equiv \widehat{F}(\mu_i; \overline{\mu}_{q-i}) = \sum_{k=0}^{s_i} \mu_i^k C_k(\overline{\mu}_{q-i}),$$

где

$$\overline{\mu}_{q-i} := (\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_q).$$

(2) Находится ΔW-q факторизация [8] матрицы $\widehat{F}(\overline{\mu})$

$$\widehat{F}(\mu_i; \overline{\mu}_{q-i}) W^{(i)}(\overline{\mu}) = [\Delta^{(i)}(\overline{\mu}), 0].$$

Здесь $W^{(i)}(\overline{\mu}) = [W_1^{(i)}(\overline{\mu}), W_0^{(i)}(\overline{\mu})]$ – полиномиальная q-параметрическая $n \times n$ матрица, $W_1^{(i)}(\overline{\mu})$ – полиномиальный вектор-столбец, $W_0^{(i)}(\overline{\mu})$ – $n \times (n-1)$ матрица, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\widehat{F}(\overline{\mu})$, 0 – нулевая строка, $\Delta^{(i)}(\overline{\mu})$ – полином от q переменных.

(3) Вычисляется вектор $\widehat{W}_1^{(i)}(\overline{\mu}) = \frac{1}{\delta[W_1^{(i)}]} W_1^{(i)}(\overline{\mu})$, где $\delta[W_1^{(i)}]$ есть НОД компонент вектора $W_1^{(i)}(\overline{\mu})$.

(4) Вычисляется полином

$$\widehat{\Delta}^{(i)}(\overline{\mu}) := \widehat{F}(\overline{\mu}) \widehat{W}_1^{(i)}(\overline{\mu}).$$

Операции (1)–(4) выполняются для $i = 1, \dots, q$. Результатом будет последовательность полиномов $\widehat{\Delta}^{(i)}(\overline{\mu})$, $i = 1, \dots, q$.

(5) Вычисляется полином $\Delta(\overline{\mu}) = \prod\limits_{i=1}^{q} \Delta^{(i)}(\overline{\mu})$, т.е. полином, нули которого совпадают с критическими точками матрицы $\widehat{F}(\overline{\mu})$ (см. [7]).

(6) Формируется $1 \times 2n$ матрица $\Phi(\overline{\mu}) = [\Delta(\overline{\mu}) I_n, \widehat{F}]$ и вычисляется ее ∇V-q факторизация

$$\Phi(\overline{\mu}) = \nabla(\overline{\mu})[V_1(\overline{\mu}), V_2(\overline{\mu})].$$

Здесь $\nabla(\overline{\mu})$ есть полином, нули которого совпадают с критическими точками матрицы $\widehat{F}(\overline{\mu})$ (или, что то же, с критическими точками решаемой СНАУ); $V_2(\overline{\mu}) = [f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}]$, где $f_k^{(1)}(\overline{\mu}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, есть искомая СНАУ, т.е. СНАУ, решения которой не содержат критических точек и совпадают с $(q-k)$-мерными решениями СНАУ (1.11) $(q \neq 1)$.

Замечание. Исчерпывание критических точек можно реализовать для СНАУ (1.11), минуя переход к СНАУ (1.14). С этой целью выполняются следующие операции.

(1) К матрице $F(\overline{\mu}) = [f_1(\overline{\mu}), \dots, f_n(\overline{\mu})]$ применяется алгоритм ΔW-q факторизации, т.е. выполняются операции (1)–(5) из третьей стадии. Результатом будет полином (обозначим его по-прежнему) $\Delta(\overline{\mu})$.

(2) К полиному $\Delta(\overline{\mu})$ применяется алгоритм неполной относительной факторизации [9], т.е. находится разложение вида

$$\Delta(\overline{\mu}) = \varphi(\overline{\mu}) g(\overline{\mu}),$$

где $g(\overline{\mu})$ – полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $k \leqslant q-1$ переменных.

(3) К матрице $\Phi(\overline{\mu}) = [\varphi(\overline{\mu}) I_n, F]$ применяется алгоритм ∇V-q факторизации,

$$\Phi(\overline{\mu}) = \nabla(\overline{\mu})[V_1(\overline{\mu}), V_2(\overline{\mu})],$$

где $V_2(\overline{\mu}) = [f_1^{(1)}(\overline{\mu}), \dots, f_n^{(1)}(\overline{\mu})]$ есть $1 \times n$ матрица; $f_k^{(1)}(\overline{\mu}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, есть искомая СНАУ.

2. RP-q ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ

2.1. Определение

Пусть $F = F(\overline{\mu})$, $\overline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица полного строчного ранга: $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$. Рассмотрим факторизацию матрицы F вида

$$F = \widehat{G}\Big(\prod_{i=0}^{t} D_i\Big)U_t. \tag{2.1}$$

Здесь $D_i = D_i(\overline{\mu})$, $i = 0, \dots, t$, регулярные q-параметрические полиномиальные $m\times m$ матрицы, $D_t(\overline{\mu})$ есть унимодулярная по всем параметрам $\mu_1, \dots, \mu_q$ матрица, так что $\det D_t(\overline{\mu}) = \mathrm{const} \neq 0$, $\det D_i(\overline{\mu}) \neq \mathrm{const}$ при $i \neq t$; $D_i(\overline{\mu}) = D_{i+1}(\overline{\mu})V_{i+1}(\overline{\mu})$, $i = 0, 1, \dots, t-1$; $V_i = V_i(\overline{\mu})$, $i = 0, 1, \dots, t$, – регулярные полиномиальные $m \times m$ матрицы: $\sigma_r[V_i] \cap \sigma_r[V_j] = \varnothing$, $i = 0, 1, \dots, t-1$; $j = i+1, \dots, t$; $\widehat{G} = \widehat{G}(\overline{\mu}) = D_0V_0$ – q-параметрическая регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица; $\sigma[D_0] = \sigma_{rs}[F]$, $\sigma[V_0] = \sigma_{r1}[F]$; $U_t = U_t(\overline{\mu})$ – q-параметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица: $\sigma_r[U_t]\cap\sigma_r[D_i] = \varnothing$; $\sigma_r[U_t] \cap \sigma_r[V_i] = \varnothing$, $i = 0, 1, \dots, t$, $\sigma_s[U_t] \subseteq \sigma_s[F]$. На равенство (2.1) будем ссылаться как на RP-q факторизацию матрицы F.

2.2. Алгоритм вычисления RP-q факторизации

Алгоритм вычисления факторизации (2.1) состоит в выполнении следующий операций.

(1) Найти ΔV-q факторизацию матрицы $F(\overline{\mu})$:

$$F(\overline{\mu}) = \Delta(\overline{\mu})V(\overline{\mu}), \tag{2.2}$$

например, используя алгоритм ∇V-q факторизации [3]. Здесь $\nabla(\overline{\mu})$ – регулярная q-параметрическая полиномиальная $m\times m$ матрица: $\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[F]$; $V(\overline{\mu})$ – q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m: $\sigma[F] = \sigma[\nabla] \cup \sigma[V]$, $\sigma_s[F] = \sigma_s[V]$.

(2) Вычислить ∇V-q факторизацию $m\times(n+m)$ матрицы $[F, \nabla]$:

$$[F, \nabla] = \widehat{G}[\widehat{U}, \widehat{V}], \tag{2.3}$$

где $\widehat{G} = \widehat{G}(\overline{\mu})$ – регулярная q-параметрическая полиномиальная $m \times m$ матрица; $[\widehat{U}, \widehat{V}]$ – $m \times (n+m)$ матрица с блоками $\widehat{U} = \widehat{U}(\overline{\mu})$ и $\widehat{V} = \widehat{V}(\overline{\mu})$ размеров $m \times n$ и $m \times m$ соответственно.

(3) По рекурсии вычислить конечную последовательность равенств

$$[U_{i-1}, D_{i-1}] = D_i[U_i, V_i], \qquad i = 1, \dots, t, \tag{2.4}$$

где

$$[\widehat{U}, \widehat{G}] = D_0[U_0, V_0]. \tag{2.5}$$

Каждое из равенств (2.4), (2.5) есть ∇V-q факторизация $m \times (n+m)$ матриц $\Phi_{i-1}(\overline{\mu}) := [U_{i-1}, D_{i-1}]$, $\widehat{\Phi}(\overline{\mu}) := [\widehat{U}, \widehat{G}]$.

Процесс вычисления равенств (2.4) заканчивается на шаге t, когда $\det D_t = \mathrm{const}$. Результатом выполнения операций (1)–(3) являются следующие равенства:

$$U_{i-1} = D_i U_i = D_i D_{i+1} U_{i+1} = \dots = D_i D_{i+1} \cdots D_t U_t, \qquad i = 1, \dots, t; \tag{2.6}$$

$$D_{i-1} = D_i V_i = D_{i+1} V_{i+1} V_i = \dots = D_t V_t V_{t-1} \cdots V_i, \qquad i = 1, \dots, t; \tag{2.7}$$

$$\widehat{G} = D_0 V_0; \tag{2.8}$$

$$F = \widehat{G}\Big(\prod_{i=0}^{t} D_i\Big) U_t = \widehat{G}\Big\{\prod_{i=0}^{t}\Big(D_t \prod_{j=1}^{i+1} V_j\Big)\Big\} U_t. \tag{2.9}$$

2.3. Обоснование RP-q алгоритма

Для обоснования алгоритма п. 2.2 следует доказать, что матрицы, входящие в равенство (2.9), имеют свойства матриц RP-q факторизации (2.1). С этой целью рассмотрим следующие свойства алгоритма.

(1)
$$\sigma_r[\widehat{G}] = \sigma_r[\nabla], \tag{2.10}$$

т.е. матрица $\widehat{G}$ отличается от матрицы ∇ унимодулярным множителем: $\nabla = \widehat{G}\widehat{V}$, где $\det \widehat{V} = \mathrm{const}$.

Справедливость (2.10) следует из (2.3).

(2) Алгоритм п. 2.2 построения последовательности матриц D_k, $k = 0, 1, \dots, t$, конечный. Справедливость этого утверждения следует из соотношений

$$\sigma[U_{i-1}] = \sigma_r[D_i] \cup \sigma[U_i], \quad \sigma_r[U_{i-1}] \supseteq \sigma_r[D_i],$$
$$\sigma_r[D_{i-1}] \supseteq \sigma_r[D_i], \qquad i = 1, \dots, t,$$

(при этом $\sigma_r[D_{i-1}] \supset \sigma_r[D_i]$ для всех $i < t$), вытекающих из (2.6) и (2.7).

(3) $$\sigma_s[U_i] = \sigma_s[U_{i-1}], \qquad i = 1, \ldots, t. \tag{2.11}$$

Справедливость следует из (2.4) и (2.5).

(4) $$\sigma_r[U_i] \cap \sigma_r[V_i] = \varnothing, \qquad i = 0, 1, \ldots, t. \tag{2.12}$$

Доказательство. Обозначим $\Phi := [U_{i-1}, D_{i-1}]$, где U_{i-1} и D_{i-1} суть q-параметрические полиномиальные матрицы ранга m размеров $m \times n$ и $m \times m$ соответственно. По определению конечного регулярного спектра, $\sigma_r[\Phi]$ есть множество нулей характеристического полинома $f[\Phi]$, который есть НОД всевозможных миноров порядка m матрицы Φ. Из сказанного следуют равенства

$$f[\Phi] = \text{НОД}\{f[U_{i-1}], f[D_{i-1}]\},$$

где по построению $f[\Phi] = f[D_i]$, так что имеем

$$f[U_{i-1}] = f[D_i]f[U_i], \qquad f[D_{i-1}] = f[D_i]f[V_i].$$

Здесь $f[U_i]$ и $f[V_i]$ суть взаимно простые полиномы. Следовательно, $\sigma_r[U_i] \cap \sigma_r[V_i] = \varnothing$. Справедливость (2.12) установлена.

(5) Справедливо равенство

$$\sigma[D_0] = \sigma_{rs}[F]. \tag{2.13}$$

Доказательство. Обозначим $\widehat{\Phi} = [\widehat{U}, \widehat{G}]$, $\Phi_0 := [U_0, V_0]$. Из равенства (2.3) имеем

$$\sigma[\widehat{\Phi}] = \sigma[D_0] \cup \sigma[\Phi_0] = \sigma_r[D_0] \cup \sigma_s[\Phi_0]. \tag{2.14}$$

Здесь $\sigma[D_0] = \sigma_r[D_0]$, $\sigma[\Phi_0] = \sigma_r[\Phi_0] \cup \sigma_s[\Phi_0] = \sigma_s[\Phi_0]$, так как по установленному выше $\sigma_r[\Phi_0] = \sigma_r[U_0, V_0] = \varnothing$. По определению регулярного спектра q-параметрической полиномиальной матрицы находим

$$\sigma_r[\Phi] \equiv \{f[\widehat{\Phi}] = 0\} = \{\text{НОД}\{f[\widehat{U}], f[G]\} = 0\},$$

где $f[\widehat{U}] = f[G^{-1}F] = \frac{f[F]}{f[G]}$, так что

$$\sigma_r[\widehat{\Phi}] = \sigma_{rs}[F]. \tag{2.15}$$

Отсюда

$$\sigma[\widehat{\Phi}] = \sigma_r[\widehat{\Phi}] \cup \sigma_s[\widehat{\Phi}] = \sigma_{rs}[F] \cup \sigma_s[\widehat{\Phi}]. \tag{2.16}$$

Из (2.3) находим: $\sigma_s[\widehat{\Phi}] = \sigma_s[\Phi_0]$, так что с учетом (2.14) и (2.16) имеем

$$\sigma_{rs}[F] \cup \sigma_s[\Phi_0] = \sigma_r[D_0] \cup \sigma_s[\Phi_0].$$

Следовательно, $\sigma_r[D_0] = \sigma_{rs}[F]$. Справедливость (2.13) установлена.

Перейдем к доказательству свойств матриц, входящих в разложение (2.9).

1) Справедливы соотношения

$$\sigma_r[D_i] \cap \sigma_r[V_{i-1}] = \varnothing, \qquad i = 1, \ldots, t, \tag{2.17}$$

$$\sigma_r[V_i] \cap \sigma_r[V_j] = \varnothing, \quad i = 0, 1, \ldots, t-1, \quad j = i+1, \ldots, t. \tag{2.18}$$

Из (2.6) и (2.7) находим

$$\sigma_r[U_{i-1}] \supseteq \sigma_r[U_i], \qquad \sigma_r[V_{i-1}] \supseteq \sigma_r[D_i].$$

Отсюда с учетом (2.12) и равенства (2.7) следует, что

$$\sigma_r[D_i] \cap \sigma_r[V_{i-1}] = \varnothing, \qquad i = 1, \ldots, t;$$
$$\sigma_r[V_j] \cap \sigma_r[V_{i-1}] = \varnothing, \qquad j = i+1, \ldots, t.$$

Тем самым справедливость (2.17) и (2.18) установлена.

2) Справедливы соотношения

$$\sigma_r[U_t] \cap \sigma_r[V_{i-1}] = \varnothing, \qquad i = 1, \ldots, t; \tag{2.19}$$

$$\sigma_r[U_t] \cap \sigma_r[D_i] = \varnothing, \qquad i = 0, 1, \ldots, t; \tag{2.20}$$

$$\sigma_r[\widehat{G}] \cap \sigma_r[U_t] = \varnothing; \tag{2.21}$$

$$\sigma_s[U_t] = \sigma_s[F]. \tag{2.22}$$

Доказательство. Из (2.6) следует соотношение

$$\sigma_r[U_t] \subseteq \sigma_r[U_{i-1}], \qquad i = 1, \ldots, t. \tag{2.23}$$

Отсюда с учетом (2.12) имеем

$$\sigma_r[U_t] \cap \sigma_r[V_{i-1}] = \varnothing, \qquad i = 1, \ldots, t,$$

так что справедливость (2.19) для $i = 1, \ldots, t$ установлена.

Справедливость (2.20) следует из (2.19), если принять во внимание (2.7) и равенство $\sigma_r[D_i] = \bigcup\limits_{j=i+1}^{t} \sigma_r[V_j]$.

Справедливость (2.21) следует из (2.9), если принять во внимание равенство $F = F_1 U_t$, где $F_1 := \widehat{G} D_0 D_1 \cdots D_t$ есть регулярная q-параметрическая полиномиальная $m \times m$ матрица, U_t есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m.

3) Имеют место соотношения

$$\sigma_r[\widehat{G}] = \sigma_r[F], \quad \sigma_{rs}[F] = \sigma_{rs}[D_0], \quad \sigma_{r1}[F] = \sigma_r[V_0], \tag{2.24}$$

так что

$$\sigma_r[F] = \sigma_r[D_0] \cup \sigma_r[V_0], \quad \sigma_r[D_0] \cap \sigma_r[V_0] = \varnothing.$$

Действительно, по определению регулярного спектра имеем

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{rs}[F], \quad \sigma_{r1}[F] \cap \sigma_{rs}[F] = \varnothing.$$

Из (2.8), с учетом (2.10) и (2.13), находим

$$\sigma_r[\widehat{G}] = \sigma_r[F] = \sigma_r[D_0] \cup \sigma_{r1}[F] = \sigma_{rs}[F] \cup \sigma_r[V_0].$$

Отсюда $\sigma_r[V_0] = \sigma_r[F] \setminus \sigma_{rs}[F]$. Но $\sigma_r[F] \setminus \sigma_{rs}[F] = \sigma_{r1}[F]$, так что $\sigma_r[V_0] = \sigma_{r1}[V_0]$. Справедливость (2.24) установлена. Доказательство соотношений (2.17)–(2.24) завершает обоснование алгоритма.

2.4. Применение метода RP-q факторизации

2.4.1. Вычисление наследственных полиномов

Пусть $F := F(\overline{\mu}) \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$, $m \leqslant n$. Рассмотрим применение алгоритма из п. 2.2 к вычислению наследственных полиномов [6] матрицы $F(\overline{\mu})$.

Из свойств алгоритма RP-q факторизации (2.1) матрицы F следуют равенства $D_k(\overline{\mu}) = D_{k+1}(\overline{\mu}) V_{k+1}(\overline{\mu})$, $k = 0, 1, \ldots, t-1$, $\det D_t(\overline{\mu}) = \mathrm{const}$, где $D_k(\overline{\mu})$, $V_{k+1}(\overline{\mu})$ суть регулярные q-параметрические полиномиальные $m \times m$ матрицы. Отсюда находим

$$\begin{gathered} \varphi_k(\overline{\mu}) := \det V_{k+1}(\overline{\mu}) = \frac{\det D_k(\overline{\mu})}{\det D_{k+1}(\overline{\mu})}, \qquad k = 0, \ldots, t-1, \\ \det D_0(\overline{\mu}) = \varphi_0(\overline{\mu}) \varphi_1(\overline{\mu}) \cdots \varphi_{t-1}(\overline{\mu}). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Последовательность $\{\varphi_k(\overline{\mu})\}_{k=0}^{t-1}$ есть последовательность наследственных полиномов матрицы $F(\overline{\mu})$. Каждый полином $\varphi_k(\overline{\mu})$ зависит от q переменных. Нулями $\varphi_k(\overline{\mu})$ являются наборы $\overline{\mu}_{q-k-1}$ из

$q-k-1$ фиксированных параметров $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1}$, принадлежащих аффинному пространству размерности $q-k-1$.

• Наборы из множества $\{\varphi_k(\overline{\mu})=0\}_{k=0}^{t-1}$ образуют смешанный спектр $\sigma_{rs}[F]$ матрицы $F(\overline{\mu})$. При каждом фиксированном наборе $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1}$ матрица $\widetilde{F}(\overline{\lambda}) := F(\overline{\lambda},\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1})$ является сингулярной. Собственной паре $\overline{\lambda}_*$; x_* матрицы $\widetilde{F}(\lambda)$ ($\widetilde{F}(\overline{\lambda}_*)x_*=0$, $x_*\neq 0$, $x_*\notin N_c[\widetilde{F}(\overline{\lambda})]$) соответствует собственная пара $(\overline{\lambda}_*,\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1})$; x_* матрицы $F(\overline{\mu})$:

$$F(\overline{\lambda}_*,\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1})x_*=0,\qquad x_*\neq 0,\qquad x_*\notin N_c[F(\overline{\lambda},\overline{\mu}^{\,*}_{q-k-1})].$$

В частности, если мультипараметр $\overline{\lambda}_*=\mu^*_{i_1}$ состоит из одного параметра, а мультипараметр $\mu^*_{q-1}=(\mu^*_{i_2},\dots,\mu^*_{i_q})$ есть нуль полинома $\varphi_0(\overline{\mu})$, то $\widetilde{F}(\lambda)=F(\lambda,\overline{\mu}^{\,*}_{q-1})$ есть сингулярная λ-матрица; числа $\lambda_*=\lambda_{*i}$, $i=1,\dots,p$, есть собственные значения, x_{*i} – соответствующие собственные векторы регулярного ядра порядка p матрицы $\widetilde{F}(\lambda)$. Так что имеют место соотношения

$$F(\lambda_{*i},\overline{\mu}^{\,*}_{q-1})x_{*i}=0,\quad x_{*i}\neq 0,\quad x_{*i}\notin N_c[F(\lambda,\overline{\mu}^{\,*}_{q-1})],\quad i=1,\dots,p.$$

Из сказанного следует, что вычисление наследственных полиномов матрицы $F(\overline{\mu})\in\mathcal{F}_m^{m\times n}$, $m\leqslant n$, может быть реализовано алгоритмом RP-q факторизации матрицы $F(\overline{\mu})$, рассмотренным в п. 2.2.

Если $F(\overline{\mu})$ есть регулярная матрица ($\operatorname{rank}F=m=n$), то для вычисления $\{\varphi_k(\overline{\mu})\}_{k=0}^{t-1}$ следует применить алгоритм RP-q факторизации из п. 1.2 для скалярных полиномов от многих переменных. С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется характеристический полином $f[F]=f(\overline{\mu})$ матрицы F, например, с помощью метода следов Д. К. Фаддеева.

(2) Находится разложение $f(F)=\varphi[F]g[F]$ (где $g[F]$ есть полином, примитивный над кольцом полиномов от $k\leqslant q-1$ переменных). Для этого используется алгоритм неполной относительной факторизации скалярных полиномов [9]. В качестве начальных полиномов f и g для реализации RP-q алгоритма берутся полиномы $f[F]$ и $g[F]$. Для вычисления $\{\varphi_k[F]\}$ выполняются следующие операции.

(1) Вычислить полином $\nabla_0(\overline{\mu})$ как НОД полиномов f/g и g: $[f/g,g]=\nabla_0[u_0,v_0]$, где u_0, v_0 – взаимно простые полиномы.

(2) Найти последовательность полиномов, используя рекурсию: $\nabla_i(\overline{\mu})$, $i = 1, \ldots, t$, где $\nabla_i(\overline{\mu})$ есть НОД полиномов u_{i-1} и ∇_{i-1}. Вычисление $\nabla_i(\overline{\mu})$ заканчивается на шаге t, когда $\nabla_t(\overline{\mu}) = \mathrm{const}$.

(3) Вычислить искомую последовательность наследственных полиномов

$$\varphi_k[F] := \varphi_k(\overline{\mu}) = \frac{\nabla_k(\overline{\mu})}{\nabla_{k+1}(\overline{\mu})}, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1.$$

2.4.2. Преобразование базиса $N_c[F]$

Пусть $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, X есть базисная матрица (базис) нуль-пространства $N_c[F]$ из правых полиномиальных решений матрицы $F = F(\overline{\mu})$.

Базис $\widetilde{X}$ назовем минимальным, если $\sigma_{r1}[\widetilde{X}] = \varnothing$; базис $\widehat{X}$ назовем свободным, если $\sigma_r[\widehat{X}] = \varnothing$.

Для установления спектральных свойств базиса X и преобразования X в базисы $\widetilde{X}$ и $\widehat{X}$ с заданными спектральными свойствами, а также для нахождения условий существования базисов $\widetilde{X}$ и $\widehat{X}$ применим алгоритм *RP-q* факторизации из п.2.2 к матрице X^T;

$$X^T = \widehat{G} D_0 D_1 \cdots D_t U_t, \tag{2.26}$$

где $\widehat{G} = V_0 D_0$, $\det D_t = \mathrm{const}$, $\det D_i \neq \mathrm{const}$ при $i \neq t$. Из свойств *RP-q* факторизации вытекают следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \sigma_{r1}[X^T] = \{\det V_0 = 0\}, \qquad \sigma_{rs}[X^T] = \{\det D_0 = 0\}, \\ \sigma_r[X^T] = \sigma_{r1}[X^T] \cup \sigma_{rs}[X^T]. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Из (2.26), (2.27), с учетом соотношений [7, 10]

$$\sigma_s[F] = \sigma_s[X] = \sigma_s[\widetilde{X}], \qquad \sigma_{rs}[F] = \sigma_{rs}[X] = \sigma_{rs}[\widetilde{X}]$$

вытекают следующие утверждения.

1°. $\qquad \widetilde{X} = X\widehat{G}^{-1} = U_t^T (D_0 D_1 \cdots D_t)^T$.

2°. Для существования свободного базиса $\widehat{X}$ пространства $N_c[F]$ необходимо, чтобы $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$. При этом $\widehat{X} = U_t^T$, если в спектре матрицы F отсутствуют критические точки, т.е. точки $(\overline{\lambda}, \overline{\nu}_*)$, в которых выполняется соотношение

$$\operatorname{im} F^T(\overline{\lambda}, \overline{\mu})\Big|_{\overline{\mu}=\overline{\nu}_*} \cap N_c[F(\overline{\lambda}, \overline{\mu})]\Big|_{\overline{\mu}=\overline{\nu}_*} \neq \varnothing.$$

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–329.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач*. Ч. 1 *Однопараметрические задачи*. Наука, С.-Петербург, 2004.
3. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры*. 5. — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 144–153.
4. В. Б. Хазанов, *Методы решения некоторых параметрических задач алгебры*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 164–181.
5. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры*. 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2003), 127–143.
6. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 143–162.
7. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры*. 6. — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 132–149.
8. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
9. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры*. 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 89–107.
10. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 177–191.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 8. The RP-q method and its applications.

A new method (the RP-q method) for factorizing scalar polynomials in q variables and q-parameter polynomial matrices ($q \geqslant 1$) of full rank is suggested. Applications of the algorithm to solving systems of nonlinear algebraic equations and some spectral problems for a q-parameter polynomial matrix F (such as separation of the eigenspectrum and mixed spectrum of F, computation of bases with prescribed spectral properties of the null-space of polynomial solutions of F, and computation of the hereditary polynomials of F) are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 9 марта 2006 г.