Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

Л. Ю. Колотилина

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОБЕЛА МЕЖДУ ТЕОРЕМАМИ ГЕРШГОРИНА И БРУАЛЬДИ

§1. Введение

Знаменитая теорема Гершгорина (см., напр., [15]) утверждает, что собственные значения произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, лежат в объединении

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(A)$$

кругов Гершгорина

$$G_i(A) = \{z \in \mathbb{C}:\ |a_{ii} - z| \leqslant r_i'(A)\}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$

где $r_i'(A)$ обозначает i-ую усеченную абсолютную строчную сумму A, т.е.

$$r_i'(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Для $n \geqslant 2$, Брауэром [7] было получено следующее улучшение теоремы Гершгорина (заметим, что результат Брауэра легко следует из соответствующего достаточного условия невырожденности, установленного Островским в [14], и поэтому мы будем ссылаться на него как на теорему Островского–Брауэра). Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, то собственные значения матрицы A лежат в объединении

$$C(A) = \bigcup_{i\neq j} C_{ij}(A)$$

овалов Кассини

$$C_{ij}(A) = \{z \in \mathbb{C}:\ |a_{ii} - z|\,|a_{jj} - z| \leqslant r_i'(A)\, r_j'(A)\}, \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Тот факт, что теорема Островского–Брауэра улучшает теорему Гершгорина (см. [7] или [15, теорема 2.3]) означает, что для произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$,

$$C(A) \subseteq G(A). \tag{1.3}$$

Относительно случая равенства в (1.3), см. [16].

Основываясь на приведенных выше теоремах, естественно задаться следующим вопросом. Верно ли, что при $n \geqslant r \geqslant 3$ все собственные значения A лежат в объединении областей

$$D_{i_1,\dots,i_r}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}: \prod_{j=1}^{r} |a_{i_j i_j} - z| \leqslant \prod_{j=1}^{r} r'_{i_j}(A) \right\} \tag{1.4}$$

(называемых в [15] лемнискатами порядка r), где все индексы $i_1, \cdots, i_r \in \langle n \rangle$ различны?

Этот вопрос обсуждался в работах [1, 8, 10, 13, 15], в которых отрицательный ответ базировался на примере, предложенном, как утверждается в книге [13, с. 149], М. Ньюменом.

Корректное (хотя и достаточно далекое) контурное обобщение теорем Гершгорина и Островского–Брауэра было предложено Бруальди в работе [8]. Напомним, что матрица называется *слабо неприводимой*, если она не имеет неприводимых компонент порядка один. Теорема Бруальди утверждает, что все собственные значения слабо неприводимой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, содержатся в множестве

$$B(A) = \bigcup_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C}(A) \\ |\gamma| \geqslant 2}} \left\{ z \in \mathbb{C}: \prod_{i \in \bar{\gamma}} |a_{ii} - z| \leqslant \prod_{i \in \bar{\gamma}} r'_i(A) \right\}. \tag{1.5}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения. Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, через $G_A = (\langle n \rangle,\ E_A)$ обозначается её ориентированный граф с множеством вершин $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг

$$E_A = \{(i,j):\ i,j \in \langle n \rangle \quad \text{и} \quad a_{ij} \neq 0\},$$

а через $\mathfrak{C}(A)$ обозначается множество всех (простых) контуров в G_A. Напомним, что *контуром* длины k в графе G_A называется упорядоченная последовательность $\gamma = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$, где все вершины $i_1, \dots, i_k \in \langle n \rangle$ различны, $i_{k+1} = i_1$, и для каждого $j = 1, \dots, k$ в G_A существует дуга, идущая из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется *носителем* контура γ и обозначается через $\bar{\gamma}$. Длина контура γ обозначается через $|\gamma|$; $|\gamma| = k$. Напомним также, что если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то величины $\mathfrak{g}(G_A) = \min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} |\gamma|$ и $\mathfrak{c}(G_A) = \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} |\gamma|$ корректно определены и называются соответственно *обхватом* и *окружением* графа G_A.

Для случая общих (не слабо неприводимых) матриц множество (1.5) было скорректировано (добавлением точек, соответствующих диагональным элементам матрицы, которые являются её неприводимыми компонентами) в [15, теорема 2.5] и в [5] (на самом деле, в [5] был установлен более общий результат).

Заметим, что для произвольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, мы имеем [15, теорема 2.9]

$$B(A) \subseteq C(A),$$

т.е. множество Бруальди $B(A)$ всегда является подмножеством множества Островского–Брауэра $C(A)$.

Прямое обобщение теорем Гершгорина и Островского–Брауэра было предложено в [5], где, как следствие более общего результата, было получено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Для любого $r \geqslant 1$ и произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, все собственные значения A содержатся в множестве*

$$P_r(A) = \bigcup_{(i_1,\dots,i_r,i_{r+1}) \in \mathfrak{P}_r(A - D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^{r} |a_{i_j i_j} - z| \leqslant \prod_{j=1}^{r} r'_{i_j}(A) \right\} \tag{1.6}$$

$$\cup \quad \{a_{ii} : \ a_{ii} \text{ – \textit{неприводимая компонента} } A\}.$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения. Если $A = (a_{ij})$ – матрица порядка $n \geqslant 1$, то $D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ – ее диагональная часть, а $d(A) = (a_{ii})_{i=1}^{n}$ – вектор, составленный из диагональных элементов A; множества $\mathfrak{P}_r(A)$ путей длины $r \geqslant 0$ определяются следующим образом:

$$\mathfrak{P}_r(A) = \begin{cases} \{(i_1, \dots, i_r, i_{r+1}) : a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_r i_{r+1}} \neq 0\}, & r \geqslant 1, \\ \{i \in \langle n \rangle : \ r_i(A) > 0\}, & r = 0; \end{cases} \tag{1.7}$$

далее,

$$r_i(A) = |a_{ii}| + r'_i(A), \qquad i = 1 \dots, n,$$

– это абсолютные строчные суммы A, а $r(A) = (r_i(A))_{i=1}^n$ и $r'(A) = (r'_i(A))_{i=1}^n$ – векторы соответствующих строчных сумм матрицы A.

Ясно, что множество $P_1(A)$, определенное в (1.6), совпадает с объединением кругов Гершгорина, тогда как множество $P_2(A)$ является подмножеством множества Островского–Брауэра $C(A)$ (учитываются только те индексы $i \neq j$, для которых $a_{ij} \neq 0$). Кроме того, как будет показано в §3, для всех $r \geqslant 1$,

$$B(A) \subseteq P_r(A) \subseteq G(A),$$

причем правое включение почти очевидно. Таким образом, теорема 1.1 обобщает теорему Гершгорина на $r \geqslant 1$. Заметим, что для $r \geqslant 2$ совокупность множеств (1.4) подправляется в двух аспектах. Во-первых, учитываются только те индексы, для которых $(i_1, \dots, i_r, i_{r+1}) \in \mathfrak{P}_r(A - D_A)$, так что все строчные суммы $r'_{i_j}(A)$, встречающиеся в (1.6), отличны от нуля. Это позволяет исключить из рассмотрения тривиальные множества $D_{i_1,\dots,i_r}(A)$. Во-вторых, для $r \geqslant 3$ оказывается недостаточным учитывать лишь различные индексы $i_1, \dots, i_r$, хотя соседние индексы i_j, i_{j+1} по-прежнему остаются различными.

В этой статье получено новое обобщение теоремы Гершгорина на случай произвольного $r \geqslant 1$. Это обобщение формулируется в терминах контуров длины, не превосходящей r, и простых путей длины r. Таким образом, все контуры длины большей r и все непростые пути длины равной r, отличные от контуров, из рассмотрения исключаются. Заметим, что при $r = n$ в случае слабо неприводимой матрицы A новое множество совпадает с множеством Бруальди (1.5).

Статья построена следующим образом. В §2, используя тот же подход, что и в [5], который основан на применении верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы, мы выводим результаты, гарантирующие невырожденность матриц, удовлетворяющих некоторым условиям типа диагонального преобладания. Затем в §3 условия невырожденности интерпретируются как теоремы о локализации собственных значений.

В заключение этого введения приведем дополнительные обозначения, которые потребуется нам в дальнейшем.

Пусть $\pi = (i_1, \ldots, i_r, i_{r+1}) \in \mathfrak{P}_r(A)$, где $r \geqslant 0$, пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть $\delta = (\delta_i)$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, – положительный вектор. *Вес* $w_{\alpha,\,\delta}(\pi)$ пути π определяется по формуле

$$w_{\alpha,\,\delta}(\pi) = \begin{cases} \left(\left[\prod\limits_{j=1}^{r+1} \delta_{i_j} \right] \Big/ \left[\delta_{i_1}^{1-\alpha} \delta_{i_{r+1}}^{\alpha} \right] \right)^{1/r}, & r \geqslant 1, \\ \delta_i, & r = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

(Напомним, что, в соответствии с определением (1.7), $\pi = (i) \in \mathfrak{P}_0(A) \Leftrightarrow r_i(A) > 0$.) Ясно, что для контура $\gamma = (i_1, \ldots, i_r, i_1) \in \mathfrak{C}(A)$, $r \geqslant 1$, в соответствии с (1.8) мы имеем

$$w_{\alpha,\,\delta}(\gamma) = \left(\prod_{i \in \bar{\gamma}} \delta_i \right)^{1/|\gamma|} \equiv w_\delta(\gamma), \tag{1.9}$$

так что вес контура не зависит от параметра α.

Далее, положим

$$\mathfrak{C}_r(A) = \begin{cases} \{\gamma \in \mathfrak{C}(A) : \ |\gamma| \leqslant r\}, & 1 \leqslant r \leqslant n, \\ \varnothing, & r = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

так что $\mathfrak{C}_r(A)$ – это подмножество контуров длины, не превосходящей r, и

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P}_r(A) = \begin{cases} \{\pi \in \mathfrak{P}_r(A) : \ \pi \text{ – простой путь}\}, & 1 \leqslant r \leqslant n, \\ \mathfrak{P}_0(A) = \{i \in \langle n \rangle : \ r_i(A) > 0\}, & r = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Очевидно, $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_n(A) = \varnothing$. Наконец, множество $\mathfrak{R}_r(A)$ определяется равенствами

$$\mathfrak{R}_r(A) = \begin{cases} \mathfrak{C}_r(A) \cup \mathfrak{S}\mathfrak{P}_r(A), & 0 \leqslant r < \mathfrak{c}(G_A), \\ \mathfrak{C}(A), & r \geqslant \mathfrak{c}(G_A), \end{cases} \tag{1.12}$$

так что при $0 \leqslant r < \mathfrak{c}(G_A)$ множество $\mathfrak{R}_r(A)$ состоит из всех контуров длины, не превосходящей r, и всех простых путей длины

r, тогда как при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ множество $\mathfrak{R}_r(A)$ совпадает с множеством всех контуров $\mathfrak{C}(A)$. Заметим, что, как легко видеть,

$$\mathfrak{R}_r(A) = \mathfrak{P}_r(A), \qquad 0 \leqslant r \leqslant \mathfrak{g}(G_A). \tag{1.13}$$

Заметим также, что если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то множество $\mathfrak{R}_k(A)$ очевидно непусто, а если матрица A не имеет нулевых строк, то $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$.

Замечание 1.1. Для $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ определение (1.12) отличается от определения, введенного в [6], где при всех r множество $\mathfrak{R}_r(A)$ определялось первым из соотношений в (1.12).

§2. Условия невырожденности, формулируемые в терминах простых путей и контуров

В этом параграфе для матрицы порядка $n \geqslant 1$ мы выводим условия типа диагонального преобладания, формулируемые в терминах контуров и простых путей длины, не превосходящей фиксированного числа r, $0 \leqslant r \leqslant n$. Эти условия будут получены с использованием верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы. Прежде всего, нам понадобятся оценки, представленные в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, перроновский корень $\rho(A)$ матрицы A удовлетворяет верхним оценкам*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{R}_r(A)} w_{\alpha,\, r(A)}(\pi), \qquad 0 \leqslant r \leqslant n. \tag{2.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима и либо $r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$ либо $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ (в частности, при $r = 0, 1, n$), то неравенство (2.1) является равенством тогда и только тогда, когда

$$\rho(A) = w_{\alpha,\, r(A)}(\pi) \quad \text{для каждого} \;\; \pi \in \mathfrak{R}_r(A). \tag{2.2}$$

Доказательство. Верхняя оценка (2.1) легко следует из теоремы 2.1 в [6], в которой нужно положить $\delta = r(A)$, и замечания 2.5 в той же работе. При $r = 0$ для неприводимой матрицы A оценка (2.1) совпадает с верхней оценкой Фробениуса $\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A)$ (заметим, что в случае неприводимой матрицы A мы имеем $\mathfrak{R}_0(A) = \langle n \rangle$), при $r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$ оценка (2.1) совпадает (см. (1.13)) с путевой оценкой $\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{P}_r(A)} w_{\alpha,\, r(A)}(\pi)$, а при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ она совпадает с контурной оценкой $\rho(A) \leqslant \max\limits_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} w_{r(A)}(\gamma)$. Поэтому утверждение теоремы 2.1, относящееся к случаю равенства в (2.1), немедленно следует из теоремы Фробениуса (см., напр., следствие 3.1 в [3]), следствия 6.1 в [3] и следствия 2.2 в [4]. □

Замечание 2.1 (см., напр., [6, замечание 1.3]). Если $\mathfrak{C}(A) = \varnothing$, то $\rho(A) = 0$.

Заметим, что, как было показано в [6], справедливы неравенства

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} w_{r(A)}(\gamma) \leqslant \max_{\pi\in\mathfrak{R}_r(A)} w_{\alpha,\, r(A)}(\pi) \leqslant \max_{\pi\in\mathfrak{P}_r(A)} w_{\alpha,\, r(A)}(\pi), \quad 0 \leqslant r \leqslant n. \tag{2.3}$$

Вывод условий невырожденности типа диагонального преобладания из верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы базируется на следующем результате, немедленно вытекающем из леммы 2.2 в [5] и леммы (3,4) в [9] (см. также [5, лемма 2.3]).

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A - R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть матрица D_A невырождена. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $\rho(|D_A^{-1}R|) < 1$, то матрица A невырождена;*

(ii) *если A неприводима и $\rho(|D_A^{-1}R|) \leqslant 1$, то A вырождена тогда и только тогда, когда $\rho(|D_A^{-1}R|) = 1$ и*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii} > 0 \qquad \text{для каждого} \ \ \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \tag{2.4}$$

В лемме 2.1 и ниже мы используем обозначение

$$\Pi_\gamma(A) = \prod_{j=1}^{|\gamma|} a_{i_j i_{j+1}}, \qquad \text{где} \ \ \gamma = (i_1, \ldots, i_{|\gamma|}, i_1) \in \mathfrak{C}(A).$$

Замечание 2.2. Если $A = D_A - R$, матрица D_A невырождена и $\rho(|D_A^{-1}R|) \leqslant 1$ ($\rho(|D_A^{-1}R|) < 1$), то A является H-матрицей (невырожденной H-матрицей).

Теперь мы готовы представить новые условия невырожденности матриц, которые можно трактовать как условия типа диагонального преобладания.

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть* $0 \leqslant r \leqslant n$. *Предположим, что матрица* D_A *невырождена и что для некоторого значения* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *выполнено условие*

$$w_{\alpha,\, d(|A|)}(\pi) \geqslant w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi) \quad \text{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A), \qquad (2.5)$$

где $d(|A|) = (|a_{ii}|)_{i=1}^n$. *Тогда* A *является* H-*матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) *если либо* $\mathfrak{R}_r(A - D_A) = \varnothing$, *либо все неравенства в* (2.5) *выполняются строго, то матрица* A *невырождена;*

(ii) *если матрица* A *неприводима и либо* $r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$, *либо* $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$, *то* A *вырождена тогда и только тогда, когда*

- *все неравенства в* (2.5) *являются равенствами и*
- *для каждого контура* $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ *имеет место неравенство*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar{\gamma}} a_{ii} > 0\ . \qquad (2.6)$$

Доказательство. Поскольку, по предположению, матрица D_A невырождена, условие (2.5) можно записать в виде

$$w_{\alpha,\, r(D_A^{-1}R)}(\pi) \leqslant 1 \quad \text{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A),$$

откуда, ввиду теоремы 2.1, следует, что если множество $\mathfrak{C}(D_A^{-1}R) = \mathfrak{C}(A - D_A)$ непусто, то мы имеем

$$\rho(|D_A^{-1}R|) \leqslant \max_{\pi\in\mathfrak{R}_r(A-D_A)} w_{\alpha,\, r(D_A^{-1}R)}(\pi) \leqslant 1. \qquad (2.7)$$

В этом случае, в силу замечания 2.2, A является H-матрицей, а если неравенства (2.5) и, следовательно, также и неравенства (2.7) выполняются строго, то, по лемме 2.1, A является невырожденной H-матрицей.

Если $\mathfrak{C}(D_A^{-1}R) = \varnothing$, то, в силу замечания 2.1, $\rho(|D_A^{-1}R|) = 0$, и, опять же по замечанию 2.2, A является невырожденной H-матрицей. Этим доказано утверждение (i).

Для доказательства утверждения (ii) допустим, что матрица A неприводима. Принимая во внимание неравенства (2.7) и применяя лемму 2.1, мы приходим к выводу, что матрица A вырождена тогда и только тогда, когда

$$\rho(|D_A^{-1}R|) = 1 \qquad (2.8)$$

и выполнено условие (2.6). Но, ввиду теоремы 2.1, равенство (2.8) имеет место тогда и только тогда, когда

$$w_{\alpha,\, r(D_A^{-1}R)}(\pi) = 1 \quad \text{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A),$$

или, что равносильно, все неравенства в (2.5) являются равенствами. □

Напомним, что в соответствии с определением, введенным в [5], матрица A называется *квазинеприводимой*, если каждая вершина ориентированного графа G_A матрицы A лежит на некотором контуре $\gamma \in \mathfrak{C}(A), |\gamma| \geqslant 1$. Другими словами, матрица A квазинеприводима тогда и только тогда, когда каждая ее неприводимая компонента порядка один невырождена.

Замечание 2.3. Если матрица A квазинеприводима, то для любого $r \geqslant 0$ невырожденность ее диагональной части D_A автоматически следует из условия диагонального преобладания (2.5). Действительно, пусть сперва $r \geqslant 1$. Для каждого $i \in \langle n \rangle$ мы имеем $i \in \bar{\gamma}$, где $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$. Если $2 \leqslant |\gamma| \leqslant r$, то $\gamma \in \mathfrak{R}_r(A - D_A)$, и $a_{ii} \neq 0$ в силу (2.5), поскольку для каждого $j \in \bar{\gamma}$, мы имеем $r'_j(A) > 0$. Если $|\gamma| > r$, то вершина i лежит на простом пути $\pi = (i = i_1, \ldots, i_r, i_{r+1})$ длины r, и $r'_{i_j}(A) > 0$, $j = 1, \ldots, r+1$, и опять, в силу (2.5), мы имеем $a_{ii} \neq 0$. Если $|\gamma| = 1$, то, очевидно, неравенство $a_{ii} \neq 0$ выполнено не зависимо от r. Наконец, в том случае, когда $r = 0$ и $|\gamma| \geqslant 2$, мы имеем $r'_i(A) > 0$, так что $i \in \mathfrak{R}_0(A - D_A)$, и, ввиду (2.5), диагональный элемент a_{ii} отличен от нуля.

Замечание 2.4. Ввиду неравенств (2.3), условие (2.5) в теореме 2.2 является промежуточным между условием слабого диагонального преобладания порядка r с весом α, введенным в работе [5], и условием слабого контурного диагонального преобладания

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\bar{\gamma}} r'_i(A) \qquad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A),$$

введенным в [8] (см. также [5]). Следовательно, с учетом замечания 2.3, теорема 2.2 дает улучшение теоремы 4.2 в [5] и одновременно позволяет избавиться от “длинных” контуров $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ в теореме Бруальди, которые заменяются на простые пути фиксированной длины r.

Рассмотрим некоторые специальные случаи теоремы 2.2.

При $r = 0$ условие (2.5) равносильно стандартным условиям слабого диагонального преобладания

$$|a_{ii}| \geqslant r_i'(A), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

и теорема 2.2 сводится к следующему результату.

Теорема 2.3. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, *удовлетворяет условиям* (2.9). *Тогда* A *является* H-*матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) *если матрица* A *имеет строгое диагональное преобладание, то она невырождена;*

(ii) *если матрица* A *неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда все неравенства в* (2.9) *являются равенствами и*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii} > 0 \qquad \textit{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A);$$

(iii) (полная версия теоремы Таусски) *если матрица* A *неприводима, то она невырождена тогда и только тогда, когда*

- *либо одно из неравенств в* (2.9) *выполняется строго,*
- *либо* $n \geqslant 2$ *и для некоторого контура* $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ *число*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii}$$

не является вещественным и положительным.

Заметим, что утверждения (ii) и (iii) впервые были получены Ю. А. Альпиным и были опубликованы как теоремы 2.4 и 2.5 в работе [11] (см. также [5, теорема 3.1 и следствие 3.1]).

При $r = n$, мы имеем $\mathfrak{R}_r(A) = \mathfrak{C}(A)$, и, как было показано в [5], из теоремы 2.2 вытекает следующая полная версия теоремы Бруальди [8], которая была установлена для неприводимых матриц в работе [2, теорема 6.2] и обобщена на случай квазинеприводимых матриц в работе [5, теорема 6.4].

Теорема 2.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– квазинеприводимая матрица и пусть*

$$\prod_{i\in\bar\gamma} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(A) \quad \text{для каждого} \ \ \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \tag{2.10}$$

Тогда A *является* H*-матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $\mathfrak{C}(A - D_A) = \varnothing$ *или все неравенства в* (2.10) *выполняются строго, то матрица* A *невырождена;*

(ii) *если матрица* A *неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда* $n \geqslant 2$ *и*

$$(-1)^{|\gamma|}\frac{\Pi_\gamma(A)}{\Pi_\gamma(|A|)} = \prod_{i\in\bar\gamma} \frac{a_{ii}}{r_i'(A)} \quad \text{для каждого} \ \ \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \tag{2.11}$$

Наконец, для $r = 1$ теорема 2.2 с учетом замечания 2.3 приводит к следующему результату.

Теорема 2.5 [5, теорема 5.1]. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– квазинеприводимая матрица и пусть*

$$|a_{ii}|^\alpha |a_{jj}|^{1-\alpha} \geqslant r_i'(A)^\alpha r_j'(A)^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \ \ i \neq j \ \text{таких, что} \ a_{ij} \neq 0. \tag{2.12}$$

Тогда A *является* H*-матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) (вариант теоремы Островского–Браура, учитывающий структуру разреженности) *если матрица* A *диагональна или все неравенства в* (2.12) *являются строгими, то* A *невырождена;*

(ii) *если матрица* A *неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

- $n \geqslant 2$,
- *все неравенства в* (2.12) *являются равенствами,*
- *для каждого контура* $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ *справедливо неравенство*

$$(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii} > 0 \ ;$$

(iii) *если матрица A неприводима и $n \geqslant 2$, то A невырождена тогда и только тогда, когда*

- *либо по крайней мере одно из неравенств в* (2.12) *является строгим,*
- *либо для некоторого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ число $(-1)^{|\gamma|}\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii}$ не является вещественным и положительным.*

Заметим, что, по следствию 5.1 в [3] в применении к матрице $|D_A^{-1}R|$, условие

$$|a_{ii}|^\alpha |a_{jj}|^{1-\alpha} = r_i'(A)^\alpha r_j'(A)^{1-\alpha}$$
$$\text{для всех } i \neq j \text{ таких, что } a_{ij} \neq 0,$$

необходимое для того, чтобы неприводимая матрица A, удовлетворяющая условию (2.12), была вырожденной, выполняется тогда и только тогда, когда либо

$$r_i'(A) = |a_{ii}|, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

либо одновременно выполнены следующие условия:
- $\alpha = 1/2$;
- $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$, где при некотором $c > 1$

$$S_1 = \{i \in \langle n\rangle : \ r_i'(A) = c|a_{ii}|\}, \qquad S_2 = \{i \in \langle n\rangle : \ r_i'(A) = c^{-1}|a_{ii}|\};$$

- обе главные подматрицы $A[S_1]$ и $A[S_2]$ диагональны.

Нашей следующей целью является вывод так называемых смешанных достаточных условий невырожденности, обобщающих условия теоремы 2.2. Для этого нам понадобится следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.6 (ср. [6, следствие 3.2]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $s \geqslant 1$ и пусть D_q, $q = 1, \ldots, s$, – произвольные диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. Если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то для любого*

α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *произвольных* $\beta_q \geqslant 0$, $q = 1, \ldots, s$, *таких, что*

$$\sum_{q=1}^{s} \beta_q = 1,$$

и любого p, $0 \leqslant p \leqslant s$, *перроновский корень матрицы* A *удовлетворяет верхней оценке*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{R}_r(A)} \left\{ \prod_{q=1}^{p} \left[w_{\alpha,\, r(D_q^{-1} A D_q)}(\pi) \right]^{\beta_q} \prod_{q=p+1}^{s} \left[w_{\alpha,\, c(D_q^{-1} A D_q)}(\pi) \right]^{\beta_q} \right\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n. \qquad (2.13)$$

В формулировке теоремы 2.6 и ниже вектор $c(B) = r(B^T)$ – это вектор абсолютных столбцовых сумм матрицы B.

Доказательство. Для $1 \leqslant r < \mathfrak{c}(G_A)$ неравенство (2.13) было установлено в [6], см. следствие 3.2.

При $r = 0$ формула (2.13) принимает вид

$$\rho(A) \leqslant \max_{i:\, r_i(A) > 0} \left\{ \prod_{q=1}^{p} \left[r_i(D_q^{-1} A D_q) \right]^{\beta_q} \prod_{q=p+1}^{s} \left[c_i(D_q^{-1} A D_q) \right]^{\beta_q} \right\}$$

и легко выводится из следствия 4.2 в [3], если предварительно перейти к наибольшей главной подматрице матрицы A, не имеющей нулевых строк.

Наконец, при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ оценка (2.13) совпадает с частным случаем смешанной контурной оценки теоремы 3.1 в [4], соответствующим выбору

$$\Delta_q = \begin{cases} \operatorname{diag}\,(r_1(D_q^{-1} A D_q), \ldots, r_n(D_q^{-1} A D_q)), & q \leqslant p, \\ \operatorname{diag}\,(c_1(D_q^{-1} A D_q), \ldots, c_n(D_q^{-1} A D_q)), & q \geqslant p+1. \end{cases}$$

$\square$

С помощью теоремы 2.6 мы получим следующее достаточное условие невырожденности, которое представляет собой смешанное обобщение утверждения (i) теоремы 2.2 для тех матриц A, для которых $\mathfrak{R}_r(A - D_A) \neq \varnothing$.

Теорема 2.7. *Пусть* $A = D_A - R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть* $0 \leqslant r \leqslant n$. *Предположим, что матрица* D_A *невырождена. Пусть* $s \geqslant 1$ *и пусть* D_q, $q = 1,\ldots,s$, *– произвольные невырожденные диагональные матрицы порядка* n. *Если* $\mathfrak{R}_r(A - D_A) \neq \varnothing$ *и при некотором* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *некоторых* $\beta_q \geqslant 0$, $q = 1,\ldots,s$, *таких что* $\sum\limits_{q=1}^{s} \beta_q = 1$, *и некотором* p, $0 \leqslant p \leqslant s$, *выполнено условие*

$$w_{\alpha,\, d(|A|)}(\pi) > \prod_{q=1}^{p} \left[w_{\alpha,\, r'(D_q^{-1}AD_q)}(\pi)\right]^{\beta_q} \prod_{q=p+1}^{s} \left[w_{\alpha,\, c'(D_q^{-1}AD_q)}(\pi)\right]^{\beta_q}$$

$$\text{для всех } \pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A), \quad (2.14)$$

то матрица A *является невырожденной* H*-матрицей. (Через* c' *обозначается вектор усеченных абсолютных столбцовых сумм матрицы.)*

Доказательство. Поскольку матрица D_A невырождена, ввиду леммы 2.1(i) и замечания 2.2, нам достаточно показать, что $\rho(|D_A^{-1}R|) < 1$. Для этого заметим, что условие (2.14) равносильно условию

$$\prod_{q=1}^{p}\left[w_{\alpha,\, r(D_q^{-1}|D_A^{-1}R|D_q)}(\pi)\right]^{\beta_q} \prod_{q=p+1}^{s}\left[w_{\alpha,\, c((D_A^{-1}D_q)^{-1}|D_A^{-1}R|(D_A^{-1}D_q))}(\pi)\right]^{\beta_q} < 1,$$

$$\pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A).$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь заметить, что, по теореме 2.6, из последнего условия вытекает неравенство $\rho(|D_A^{-1}R|) < 1$. $\square$

Замечание 2.5. Если матрица A квазинеприводима, то, как нетрудно убедиться, невырожденность матрицы D_A автоматически следует из условия (2.14).

В связи с теоремой 2.7 кажутся уместными следующие замечания. Во-первых, заметим, что при $p = s = 1$ неравенство в (2.14) – это в точности строгий вариант неравенства в (2.5). Далее, при $r = 0$, $r = 1$ (и $\alpha = 1/2$) и $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ теорема 2.7 с учетом замечания 2.5 сводится соответственно к теореме 3.2, следствию 5.3 и теореме 6.5 в [5]. Наконец, при $r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$ и $\alpha = 1$ теорема 2.7 совпадает с теоремой 4.3 в [5].

Теперь в обозначениях теоремы 2.7 положим $s = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$, $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 1 - \beta$. В этом случае строгие условия типа диагонального преобладания (2.14) зависят от диагональных элементов матрицы A, а также от ее усеченных строчных и столбцовых сумм, и теорема 2.7 сводится к следующему утверждению.

Следствие 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $0 \leqslant r \leqslant n$. Предположим, что матрица D_A невырождена и что $\mathfrak{R}_r(A - D_A) \neq \varnothing$. Если для некоторых α и β, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, выполнено условие*

$$w_{\alpha,\, d(|A|)}(\pi) > \left[w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi)\right]^{\beta} \left[w_{\alpha,\, c'(A)}(\pi)\right]^{1-\beta} \quad \text{для всех} \ \ \pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A), \tag{2.15}$$

то A является невырожденной H*-матрицей.*

В частности, в том простейшем случае, когда $r = 0$, следствие 2.1 сводится к следующим хорошо известным смешанным достаточным условиям невырожденности Островского [14].

Следствие 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если*

$$|a_{ii}| > [r'_i(A)]^{\alpha}\, [c'_i(A)]^{1-\alpha}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

то A – невырожденная H*-матрица.*

В заключение этого параграфа отметим, что некоторые нетривиальные способы выбора диагональных масштабирующих матриц D_q, фигурирующих в теореме 2.7, указаны в [5].

§3. Области локализации собственных значений

В этом параграфе мы приводим новые результаты о локализации собственных значений, усиливающие ранее известные, а для неприводимых матриц мы также приводим и описание собственных значений, являющихся граничными точками рассматриваемых областей локализации.

Пусть $A = D_A - R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – точка комплексной плоскости. По определению, λ есть собственное значение матрицы A, т.е. $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, тогда и только тогда, когда матрица

$$A_\lambda = A - \lambda I_n = (D_A - \lambda I_n) - R$$

вырождена.

Предположим сперва, что $\lambda \neq a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае матрица $D_{A_\lambda} = D_A - \lambda I_n$ невырождена, и, по теореме 2.2, если $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, то матрица A_λ не может иметь строгого диагонального преобладания в смысле неравенства (2.5). Таким образом, для произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и некоторого пути $\pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A)$ мы необходимо имеем

$$w_{\alpha,\, d(|A-\lambda I_n|)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi). \tag{3.1}$$

Теперь пусть $\lambda = a_{i_0 i_0}$. В этом случае либо $a_{i_0 i_0}$ является неприводимой компонентой матрицы A, либо найдется такой контур $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$, что $i_0 \in \bar{\gamma}$. В последнем случае для любого $r \geqslant 0$ вершина i_0 лежит на некотором пути $\pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A)$ (который либо совпадает с γ при $|\gamma| \leqslant r$, либо является простым путем, лежащим на γ при $|\gamma| > r$). Для этого пути π неравенство (3.1) выполняется тривиальным образом, поскольку его левая часть обращается в ноль.

Итак, нами установлен следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, и произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, справедливо включение*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A \subseteq & \bigcup_{\pi \in \mathfrak{R}_r(A-D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ w_{\alpha,\, d(|A-zI_n|)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi) \right\} \\ & \cup \ \left\{ a_{ii} :\ a_{ii} \text{ -- \textit{неприводимая компонента} } A \right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, во-первых, что для матрицы, не имеющей неприводимых компонент порядка один, т.е. для слабо неприводимой матрицы A, множество, стоящее в правой части включения (3.2), упрощается и сводится к объединению по путям из $\mathfrak{R}_r(A - D_A)$.

Заметим также, что, ввиду неравенств (2.3), справедливы включения

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\pi \in \mathfrak{P}_r(A-D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ w_{\alpha,\, d(|A-zI_n|)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi) \right\} \\ \supseteq & \bigcup_{\pi \in \mathfrak{R}_r(A-D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ w_{\alpha,\, d(|A-zI_n|)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, r'(A)}(\pi) \right\} \\ \supseteq & \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{C}(A-D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ w_{d(|A-zI_n|)}(\gamma) \leqslant w_{r'(A)}(\gamma) \right\} \\ = & \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{C}(A-D_A)} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \prod_{i \in \bar{\gamma}} |a_{ii} - z| \leqslant \prod_{i \in \bar{\gamma}} r'_i(A) \right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, множество локализации собственных значений, фигурирующее в теореме 3.1, всегда содержит контурное множество Бруальди, но, с другой стороны, само содержится в множестве локализации, отвечающем всем путям длины r. В частности, при $\alpha = 1$, множество из теоремы 3.1 является подмножеством множества $P_r(A)$, фигурирующего в теореме 1.1.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 3.1.

При $r = 0$ в соответствии с (1.13) и (1.7) мы имеем

$$\mathfrak{R}_0(A - D_A) = \{i : \ r'_i(A) > 0\},$$

так что, по теореме 3.1,

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A \subseteq & \bigcup_{i:\, r'_i(A)>0} \{z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z| \leqslant r'_i(A)\} \\ \cup \quad & \{a_{ii} : \ a_{ii} \text{ – неприводимая компонента } A\} \\ = & \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \{z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z| \leqslant r'_i(A)\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тем самым, при $r = 0$ теорема 3.1 сводится к теореме Гершгорина.

При $r = 1$ мы имеем

$$\mathfrak{R}_1(A - D_A) = \{(i, j) : \ i \neq j \text{ и } a_{ij} \neq 0\},$$

и теорема 3.1 дает нам включение

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A \subseteq & \bigcup_{i\neq j:\, a_{ij}\neq 0} \left\{z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z|^{\alpha} \ |a_{jj} - z|^{1-\alpha} \leqslant r'_i(A)^{\alpha} \ r'_j(A)^{1-\alpha}\right\} \\ \cup \quad & \{a_{ii} : \ a_{ii} \text{ – неприводимая компонента } A\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Этот результат совпадает с формулой (7.12) в [5] и улучшает (а также обобщает) множество локализации Островского–Брауэра $C(A)$, см. §1.

При $r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$ множество $\mathfrak{R}_r(A - D_A) = \mathfrak{P}_r(A - D_A)$ совпадает с множеством всех путей длины r в графе матрицы $A - D_A$. Следовательно, при таких значениях r теорема 3.1 дает обобщение теоремы 1.1, в котором α может варьироваться от 0 до 1.

Наконец, при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ мы имеем $\mathfrak{R}_r(A-D_A) = \mathfrak{C}(A)$, и включение (3.2) принимает вид

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{\gamma\in\mathfrak{C}(A-D_A)} \left\{ z\in\mathbb{C} : \prod_{i\in\bar\gamma} |a_{ii}-z| \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(A) \right\} \tag{3.6}$$

$$\cup \quad \{a_{ii} : a_{ii} \text{ – неприводимая компонента } A\}.$$

Таким образом, при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ теорема 3.1 обобщает теорему Бруальди [8], см. (1.5), на случай произвольных матриц.

Полагая в теореме 3.1 $\alpha = 1$ (только лишь для упрощения записи формулы) и используя определение множества $\mathfrak{R}_r(A-D_A)$, мы приходим к следующей более наглядной формулировке.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любого r, $1 \leqslant r \leqslant n$,*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathfrak{C}(A-D_A)\\ |\gamma|\leqslant r}} \left\{ z\in\mathbb{C} : \prod_{i\in\bar\gamma} |a_{ii}-z| \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(A) \right\}$$

$$\cup \bigcup_{(i_1,\dots,i_r,i_{r+1})\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}_r(A-D_A)} \left\{ z\in\mathbb{C} : \prod_{j=1}^{r} |a_{i_j i_j}-z| \leqslant \prod_{j=1}^{r} r_{i_j}'(A) \right\}$$

$$\cup \quad \{a_{ii} : a_{ii} \text{ – неприводимая компонента } A\}. \tag{3.7}$$

Для полноты изложения приведем также множество локализации собственных значений, даваемое теоремой 2.7.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, любых $s \geqslant 1$ и p, $0 \leqslant p \leqslant s$, произвольных невырожденных диагональных матриц D_q, $q = 1,\dots,s$, любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и произвольных β_q, $q = 1,\dots,s$, таких что $\sum_{q=1}^{s} \beta_q = 1$, имеет место включение*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \{a_{ii} : a_{ii} \text{ – неприводимая компонента } A\} \quad \cup$$

$$\bigcup_{\pi\in\mathfrak{R}_r(A-D_A)} \left\{ z\in\mathbb{C} : w_{\alpha,\, d(|A-zI_n|)}(\pi) \right. \tag{3.8}$$

$$\left. \leqslant \prod_{q=1}^{p} \left[w_{\alpha,\, r'(D_q^{-1}AD_q)}(\pi) \right]^{\beta_q} \prod_{q=p+1}^{s} \left[w_{\alpha,\, c'(D_q^{-1}AD_q)}(\pi) \right]^{\beta_q} \right\}.$$

В заключение этого параграфа мы приведем описание собственных значений неприводимой матрицы, которые являются граничными точками множества локализации из (3.2). Это описание легко следует из утверждения (ii) теоремы 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– неприводимая матрица, пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и пусть либо* $0 \leqslant r \leqslant \mathfrak{g}(G_A)$, *либо* $\mathfrak{c}(G_A) \leqslant r \leqslant n$. *Тогда точка* $\lambda \in \mathbb{C}$, *для которой неравенство*

$$w_{\alpha,\ d(|A-\lambda I_n|)}(\pi) \geqslant w_{\alpha,\ r'(A)}(\pi) \tag{3.9}$$

выполняется при всех $\pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A)$, *является собственным значением матрицы* A *тогда и только тогда, когда*

(i) *при всех* $\pi \in \mathfrak{R}_r(A - D_A)$ *неравенство* (3.9) *является равенством и*

(ii) *для всех* $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ *справедливо неравенство*

$$\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma}(\lambda - a_{ii}) > 0\ ,$$

где $\Pi_\gamma(A)$ *– контурное произведение, определенное в* §2.

При $r = 0$ теорема 3.3 дает описание собственных значений, являющихся граничными точками кругов Гершгорина, впервые представленное в [11, теорема 3.2]; при $r = 1$ она описывает собственные значения, лежащие на границе овалов Кассини, ассоциированных с множеством дуг в ориентированном графе матрицы (относительно более точной формулировки в этом случае см. [12, теорема 3.1] и [5, теорема 7.4]), а при $r \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ теорема 3.3 сводится к описанию собственных значений, являющихся граничными точками множества Бруальди $B(A)$, см. (1.5). Заметим, что, как показано в [2, теорема 3.2], в последнем случае условия (i) и (ii) теоремы 3.3 в совокупности могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\Pi_\gamma(A)}{\Pi_\gamma(|A|)} = \prod_{i\in\bar\gamma}\frac{\lambda - a_{ii}}{r_i'(A)} \qquad \text{для каждого } \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A).$$

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *Несимметричная проблема собственных значений*. Наука, М., 1991.

2. Л. Ю. Колотилина, *О теореме Бруальди.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 48–63.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 60–88.
5. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 40–83.
6. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 69–93.
7. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix.* II. — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
8. R. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear Multilinear Algebra **11** (1982), 143–165.
9. M. Fiedler, V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 428–450.
10. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985.
11. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **359** (2003), 133–159.
12. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
13. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
14. A. M. Ostrowsky, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* (Springer Series Comput. Math. **36**) Springer, 2004.
16. R. S. Varga, A. Krautstengl, *On Geršgorin-type problems and ovals of Cassini.* — ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) **8** (1999), 15–20.

Kolotilina L. Yu. Filling the gap between the Gerschgorin and Brualdi theorems.

The paper presents new diagonal dominance type nonsingularity conditions for $n \times n$ matrices formulated in terms of circuits of length not exceeding a fixed number $r \geqslant 0$ and simple paths of length r in the digraph of the matrix. These conditions are intermediate between the diagonal dominance conditions in terms of all paths of length r and Brualdi's diagonal dominance conditions, involving all the circuits. For $r = 0$, the new conditions reduce to the standard row diagonal dominance conditions $|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,\ i = 1, \ldots, n$, whereas for $r = n$ they coincide with the Brualdi circuit conditions. Thus, they connect the classical Lévy–Desplanques theorem and the Brualdi theorem, yielding a family of sufficient nonsingularity conditions. Further, for irreducible matrices satisfying the new diagonal dominance conditions with nonstrict inequalities, the singularity/nonsingularity problem is solved. Also the new sufficient diagonal dominance conditions are extended to the so-called mixed conditions, simultaneously involving the deleted row and column sums of an arbitrary finite set of matrices diagonally conjugated to a given one, which, in the simplest nontrivial case, reduce to the old-known Ostrowski conditions $|a_{ii}| > (\sum_{j \neq i} |a_{ij}|)^{\alpha} (\sum_{j \neq i} |a_{ji}|)^{1-\alpha},\ i = 1, \ldots, n,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. The nonsingularity conditions obtained are used to provide new eigenvalue inclusion sets, depending on r, which, as r varies from 0 to n, serve as a bridge connecting the union of Gerschgorin's disks with the Brualdi inclusion set.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 28 апреля 2006 г.