Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

**Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов**

# НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ТЕПЛИЦЕВЫХ И ГАНКЕЛЕВЫХ ЦИРКУЛЯНТАХ

**1.** Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Теплицевой называется матрица $T \in M_n(\mathbf{C})$, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

а ганкелевой – матрица $H \in M_n(\mathbf{C})$ вида

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & h_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n-1} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Теплицева матрица (1) называется циркулянтом, если

$$t_{-i} = t_{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Будем называть матрицу (2) *ганкелевым циркулянтом*, если

$$h_{n+i} = h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что и теплицев, и ганкелев циркулянты однозначно определяются элементами своих первых строк.

Матрица-перестановка

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

называется перъединичной матрицей. Для циркулянта $T \in M_n(\mathbf{C})$ с первой строкой

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

матрицы $\Pi_n T$ и $T\Pi_n$ суть ганкелевы циркулянты с первыми строками

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Всякий теплицев циркулянт является нормальной матрицей. Множество $\mathcal{T}_n$ всех циркулянтов порядка $n$ замкнуто относительно умножения и, следовательно, может рассматриваться как алгебра. Более того, эта алгебра коммутативна. Все эти замечательные (и хорошо известные) свойства циркулянтов суть следствия следующего (также хорошо известного) факта: для всякого циркулянта $T \in \mathcal{T}_n$ справедливо представление

$$T = F_n^* D F_n, \tag{4}$$

где $F_n$ – матрица дискретного преобразования Фурье, т.е.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ есть первообразный корень $n$-й степени из единицы. Матрица $D$ в (4) диагональная, и ее диагональные элементы связаны специальным образом с компонентами строки (3). Последнее обстоятельство не используется в дальнейшем изложении.

Зададимся таким вопросом: какой класс матриц будет получен, если для произвольных диагональных матриц $D \in M_n(\mathbf{C})$ мы заменим унитарное подобие в (4) унитарной конгруэнцией, сохраняя $F_n$ в качестве трансформирующей матрицы? Иными словами, требуется описать матрицы вида

$$H = F_n^\top D F_n. \tag{6}$$

Поскольку матрица (5) симметрична, матрицу $H$ можно записать и как

$$H = F_n D F_n.$$

Ответ на поставленный вопрос дается следующим предложением.

**Предложение 1.** *Класс матриц вида* (6) *совпадает с классом* $\mathcal{H}_n$ *ганкелевых циркулянтов порядка* $n$.

**Доказательство.** Полагая

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

имеем

$$(H)_{kl} = (F_n D F_n)_{kl} = \sum_{j=1}^{n} (F_n)_{kj} d_j (F_n)_{jl}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \epsilon^{(k-1)(j-1)} \epsilon^{(j-1)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \epsilon^{(j-1)(k+l-2)}. \qquad (7)$$

Таким образом, элементы матрицы $H$ зависят от суммы $k + l$, а не от индексов $k$ и $l$ по отдельности. Это означает, что $H$ – ганкелева матрица.

Из выражения (7) для элементов $h_{kl}$ следует, что

$$h_{i+1,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \epsilon^{(j-1)(n+i-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \epsilon^{(j-1)(i-1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \epsilon^{(j-1)(1+i-2)} = h_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

В этих выкладках использовано равенство $\epsilon^n = 1$. Соотношения

$$h_{i+1,n} = h_{1,i}, \; i = 1, 2, \dots, n-1,$$

означают, что $H$ – ганкелев циркулянт.

То обстоятельство, что всякий ганкелев циркулянт может быть представлен в виде (6), вытекает из простых размерностных соображений. Очевидно, что преобразование

$$D \longrightarrow F_n D F_n$$

алгебры $\mathcal{D}_n$ диагональных $n\times n$ матриц в линейное пространство $\mathcal{H}_n$ невырожденно. Поэтому

$$n = \dim \mathcal{D}_n = \dim F_n D_n F_n.$$

Так как

$$\dim \mathcal{H}_n = n,$$

то линейные пространства $F_n D_n F_n$ и $\mathcal{H}_n$ должны совпадать.

**2.** Пусть $H$ – ганкелев циркулянт порядка $n$ и

$$H = F_n \Lambda F_n \tag{8}$$

есть представление типа (6). Как отмечено в разделе 1, матрица $\Pi_n H$ есть теплицев циркулянт и, следовательно, допускает представление (4). Как связаны между собой диагональные матрицы $\Lambda$ и $D$?

**Предложение 2.** *Матрицы $\Lambda$ и $D$ удовлетворяют соотношению*

$$WD = \Lambda, \tag{9}$$

*где*

$$W = \operatorname{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}). \tag{10}$$

Это утверждение основано на следующей лемме, устанавливающей одно из свойств матрицы дискретного преобразования Фурье.

**Лемма.** *Выполняются равенства*

$$\Pi_n F_n = F_n^* W^{-1} = F_n^* W^*. \tag{11}$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\Pi_n F_n)_{kl} &= \sqrt{n}(F_n)_{n+1-k,l} = \epsilon^{(n-k)(l-1)},\\ \sqrt{n}(F_n^* W^{-1})_{kl} &= \sqrt{n}\ \overline{(F_n)_{kl}}\ \overline{\epsilon^{l-1}}\\ &= \overline{\epsilon^{(k-1)(l-1)}}\ \overline{\epsilon^{l-1}} = \overline{\epsilon^{(l-1)k}} = \bar{\epsilon}^{(l-1)k}\\ &= \epsilon^{(n-1)(l-1)k} = \epsilon^{-k(l-1)} = \epsilon^{(n-k)(l-1)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует (11).

Возвращаясь к предложению 2, имеем

$$\Pi_n H = \Pi_n F_n \Lambda F_n = F_n^* W^{-1} \Lambda F_n = F_n^* D W_n,$$

где

$$D = W^{-1}\Lambda.$$

Таким образом, соотношение (9) доказано.

**3.** Если $D$ в формуле (4) – *вещественная* диагональная матрица, то циркулянт $T$ есть эрмитова матрица, а получаемые из него ганкелевы циркулянты $\Pi_n T$ и $T\Pi_n$ являются центроэрмитовыми. Напомним, что $n \times n$-матрица $A$ называется центроэрмитовой, если

$$a_{n+1-i,n+1-j} = \overline{a_{ij}}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

или

$$A^* = \Pi_n A \Pi_n.$$

Очевидно, что и, наоборот, всякий центроэрмитов ганкелев циркулянт $H$ может быть получен из эрмитова циркулянта $T = \Pi_n H$ перестановкой строк в обратном порядке. Если $H$ представлен в виде (6), а $T$ – в виде (4), то, согласно предложению 2,

$$WD = \Lambda.$$

Поскольку $D$ – вещественная матрица, диагональные элементы матрицы $\Lambda$ имеют (с точностью до кратного числа $\pi$) аргументы

$$0, \ \frac{2\pi}{n}, \ \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

**4.** И алгебра $\mathcal{T}_n$ теплицевых циркулянтов, и линейное пространство $\mathcal{H}_n$ ганкелевых циркулянтов имеют размерность $n$. Легко видеть, что пересечение $\mathcal{T}_n \bigcap \mathcal{H}_n$ одномерно и состоит из всех кратных матрицы

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что размерность суммы $\mathcal{L}_n = \mathcal{T}_n + \mathcal{H}_n$ равна $2n - 1$.

Известно (см. [1]), что $\mathcal{L}_n$ является алгеброй. Впрочем, это легко следует из сказанного выше. В самом деле, произведение любых двух циркулянтов есть циркулянт. Если $T \in \mathcal{T}_n$, а $H \in \mathcal{H}_n$, то

$$TH = T(H\Pi_n)\Pi_n$$

и

$$HT = \Pi_n(\Pi_n H)T$$

суть ганкелевы циркулянты. Наконец, произведение матриц $H_1$, $H_2 \in \mathcal{H}_n$ есть обычный циркулянт, поскольку

$$H_1 H_2 = (H_1 \Pi_n)(\Pi_n H_2).$$

Матрицы из $\mathcal{L}_n$ называют $(T+H)$-циркулянтами.

Попробуем обобщить ситуацию, приведшую к алгебре $\mathcal{L}_n$, пользуясь результатами раздела 1.

Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра в $M_n(\mathbf{C})$, замкнутая относительно (поэлементной) операции сопряжения. Фиксируем унитарную матрицу $Q$ и рассмотрим множество

$$\mathcal{B} = Q^* \mathcal{A} Q.$$

Очевидно, что $\mathcal{B}$ — алгебра. Предположим, что $\mathcal{B}$ тоже замкнута относительно поэлементного сопряжения. Наконец, определим линейное пространство

$$\mathcal{C} = Q^\top \mathcal{A} Q.$$

Потребуем, чтобы и $\mathcal{C}$ было замкнуто относительно поэлементного сопряжения.

Покажем, что сумма

$$\mathcal{G} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$$

является алгеброй. Действительно, пусть $B = Q^* A_1 Q \in \mathcal{B}$ и $C = Q^\top A_2 Q \in \mathcal{C}$. Тогда

$$CB = Q^\top A_2 Q Q^* A_1 Q = Q^\top (A_2 A_1) Q \in \mathcal{C}.$$

По предположению, $\overline{B} \in \mathcal{B}$; следовательно, найдется матрица $A_3 \in \mathcal{A}$ такая, что

$$\overline{B} = Q^* A_3 Q,$$

откуда

$$B = Q^\top \overline{A}_3 \overline{Q}.$$

Поэтому

$$BC = Q^\top \overline{A}_3 \overline{Q} Q^\top A_2 Q = Q^\top (\overline{A}_3 A_2) Q \in \mathcal{C}.$$

Пусть, наконец, $C_1 = Q^\top A_1 Q \in \mathcal{C}$ и $C_2 = Q^\top A_2 Q \in \mathcal{C}$. Согласно предположению, $\overline{C}_1 \in \mathcal{C}$, т.е. найдется матрица $A_3 \in \mathcal{A}$ такая, что

$$\overline{C}_1 = Q^\top A_3 Q,$$

откуда

$$C_1 = Q^* \overline{A}_3 \overline{Q}.$$

Следовательно,

$$C_1 C_2 = Q^* \overline{A}_3 \overline{Q} Q^\top A_2 Q = Q^* (\overline{A}_3 A_2) Q \in \mathcal{B}.$$

Итак, $\mathcal{G}$ действительно является алгеброй.

Сформулированные выше условия выполнены, в частности, в случае, когда $\mathcal{B}$ – алгебра косых циркулянтов (см., например, [2, с. 47]), а $\mathcal{C}$ – соответствующее линейное подпространство комплексных ганкелевых матриц (косых ганкелевых циркулянтов).

Работа второго автора была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 04-07-90336 и 05-01-00721) и программой фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы в интегральных и дифференциальных уравнениях”.

## Литература

1. E. Bozzo, *Algebras of higher dimension for displacement decompositions and computation with Toeplitz plus Hankel matrices.* — Linear Algebra Appl. **230** (1995), 120–150.
2. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* Наука, М., 1987.

Ikramov Kh. D., Chugunov V. N. Several observations on Toeplitz and Hankel circulants.

An application of the unitary similarity with the discrete Fourier transform to the algebra of diagonal matrices yields the algebra of circulants. It turns out that if, in this construction, the unitary similarity is replaced by the unitary congruence, then the class of the so-called Hankel circulants is obtained. The causes and certain effects of this fact are discussed.

Московский
государственный университет
*E-mail*: ikramov@cs.msu.su

Поступило 27 марта 2006 г.

Институт
вычислительной математики РАН
*E-mail*: vadim@bach.inm.ras.ru