Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

Х. Д. Икрамов

О ПСЕВДОСОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЛАХ КОМПЛЕКСНОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. Введение

Говорят, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ псевдоподобны, если $A = SB\overline{S}^{-1}$ для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbf{C})$. Здесь, как обычно, черта над символом матрицы обозначает взятие покомпонентного сопряжения. Важным частным случаем псевдоподобия является унитарная конгруэнция, получаемая в случае, когда $S = U$ есть унитарная матрица: $A = UBU^T$.

Согласно определению из [1, раздел 4.6] (несколько измененному в соответствии с нашими целями), число $\mu \in \mathbf{C}$ и ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}_n$ называются соответственно псевдособственным значением и (ассоциированным) псевдособственным вектором матрицы A, если

$$Ax = \mu\overline{x}. \tag{1}$$

Можно показать (см. снова [1, раздел 4.6]), что μ тогда и только тогда является псевдособственным значением матрицы A, когда $|\mu|^2$ является (обычным) собственным значением матрицы $\overline{A}A$. Таким образом, если $\overline{A}A$ не имеет вещественных неотрицательных собственных значений, то псевдособственных значений у A не может быть. Если же A имеет псевдособственное значение μ, то и всякое число вида $e^{i\theta}\mu$, где $\theta \in \mathbf{R}$, также является псевдособственным значением для A. Стало быть, если A имеет псевдособственные значения, то их всегда бесконечно много. Получается, что, в отличие от обычных собственных значений, которых у матрицы порядка n ровно n (с учетом кратностей), с псевдособственными значениями попросту неудобно работать.

В разделе 2 настоящей статьи мы принимаем иное определение псевдособственных значений. В соответствии с этим определением, всякая матрица порядка n имеет (с учетом кратностей) ровно n псевдособственных значений. При этом оказывается, что на определенные таким образом псевдособственные значения переносится ряд соотношений, связывающих (обычные) собственные значения и (многие) матричные нормы, а также ряд соотношений между собственными значениями и сингулярными числами.

Такие классические неравенства, как неравенство Шура или неравенства Вейля, превращаются в равенства, если A – нормальная матрица. В разделе 3 мы показываем, что аналогичный факт по отношению к псевдособственным значениям имеет место для сопряженно-нормальных матриц. Этот матричный класс играет в теории унитарных конгруэнций такую же роль, какую обычные нормальные матрицы играют в теории унитарного подобия. Есть и другие параллели между свойствами этих двух классов, которые также указаны в разделе 3.

2. Неравенства между псевдособственными значениями и сингулярными числами

Сопоставим матрице $A \in M_n(\mathbf{C})$ матрицы

$$A_L = \overline{A}A \tag{2}$$

и

$$A_R = A\overline{A}. \tag{3}$$

Хотя в общем случае произведения AB и BA не обязаны быть подобными матрицами, $\overline{A}A$ всегда подобна матрице $A\overline{A}$ (см. [1, раздел 4.6, задача 9]). Поэтому в дальнейшем обсуждении спектральных свойств можно рассматривать лишь одну из этих матриц, для определенности, A_L.

Спектр матрицы A_L имеет два следующих замечательных свойства.

1. Он симметричен по отношению к вещественной оси. Кроме того, собственные значения λ и $\overline{\lambda}$ имеют одинаковую кратность.
2. Если у A_L есть отрицательные собственные значения, то они обязательно имеют четную алгебраическую кратность.

Доказательства этих утверждений можно найти в [1, раздел 4.6, задачи 5–7].

Пусть

$$\lambda(A_L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \tag{4}$$

есть спектр матрицы A_L. Символ

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \lambda(A)\}$$

используется для обозначения спектрального радиуса матрицы A.

Определение 1. *Псевдособственными значениями матрицы A называются n чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$, получаемых следующим образом:*

- *Если $\lambda_i \in \lambda(A_L)$ не лежит на вещественной отрицательной полуоси, то соответствующее псевдособственное значение μ_i определяется как квадратный корень из λ_i, имеющий неотрицательную вещественную часть:*

$$\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re} \mu_i \geq 0. \tag{5}$$

  Кратность числа μ_i полагается равной кратности λ_i.
- *С вещественным отрицательным числом $\lambda_i \in \lambda(A_L)$ мы связываем два сопряженных чисто мнимых псевдособственных значения*

$$\mu_i = \pm\lambda_i^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

  Кратность каждого из них считается равной половине кратности собственного значения λ_i.

Множество

$$c\lambda(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \tag{7}$$

называется псевдоспектром матрицы A.

Существует еще одна интерпретация псевдособственных значений. Положим

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ \overline{A} & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Предложение 1. *Если $n\times n$-матрица A имеет псевдособственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$, то*

$$\lambda(\widehat{A}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n\}. \tag{9}$$

Доказательство. Требуемое утверждение вытекает из следующих двух наблюдений: во-первых, $\widehat{A}^2 = A_R \oplus A_L$, откуда следует, что всякое собственное значение матрицы $\widehat{A}$ является квадратным корнем из некоторого собственного значения матрицы A_L. Во-вторых, характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ матрицы $\widehat{A}$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - \widehat{A}) = \det(\lambda^2 I_n - A_L) = \det(\lambda^2 I_n - A_R).$$

Таким образом, если λ есть собственное значение матрицы $\widehat{A}$, то $-\lambda$ также является собственным значением этой матрицы, и оба числа имеют одинаковую кратность. □

До конца данного раздела мы будем придерживаться следующих соглашений.

1. Сингулярные числа матрицы A упорядочены по невозрастанию:

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_n(A). \tag{10}$$

   Таким образом,

$$\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) = ||A||_2. \tag{11}$$

2. Псевдособственные значения матрицы A упорядочены по невозрастанию модулей:

$$|\mu_1(A)| \geq |\mu_2(A)| \geq \ldots \geq |\mu_n(A)|. \tag{12}$$

3. Те же договоренности применяются к сингулярным числам и собственным значениям матрицы $\widehat{A}$:

$$\sigma_1(\widehat{A}) \geq \sigma_2(\widehat{A}) \geq \ldots \geq \sigma_{2n}(\widehat{A}), \tag{13}$$

$$|\lambda_1(\widehat{A})| \geq |\lambda_2(\widehat{A})| \geq \ldots \geq |\lambda_{2n}(\widehat{A})|. \tag{14}$$

В силу (9), имеем

$$|\lambda_{2i-1}(\widehat{A})| = |\lambda_{2i}(\widehat{A})| = |\mu_i(A)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Заметим, что $\widehat{A}$ имеет те же сингулярные числа, что и $A \oplus \overline{A}$, а $\overline{A}$ имеет те же сингулярные числа, что и A. Отсюда следует, что сингулярными числами матрицы $\widehat{A}$ являются повторенные дважды сингулярные числа матрицы A. Тем самым

$$\sigma_{2i-1}(\widehat{A}) = \sigma_{2i}(\widehat{A}) = \sigma_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Наконец, определим псевдоспектральный радиус матрицы A соотношением

$$c\rho(A) = |\mu_1(A)|. \tag{17}$$

Предложение 2. *Пусть* $||\cdot||$ – *произвольная абсолютная матричная норма. Тогда*

$$c\rho(A) \le ||A||. \tag{18}$$

Доказательство. Имеем

$$c\rho^2(A) = |\mu_1(A)|^2 = \rho(\overline{A}A) \le ||\overline{A}A|| \le ||\overline{A}||\ ||A|| = ||A||^2.$$

□

Спектральная норма не является абсолютной. Тем не менее неравенство (18) справедливо и для спектральной нормы.

Предложение 3. *Имеет место неравенство*

$$c\rho(A) \le ||A||_2. \tag{19}$$

Доказательство. Для всякой (мультипликативной) матричной нормы $||\cdot||$ выполняется соотношение $\rho(\widehat{A}) \le ||\widehat{A}||$. Поэтому

$$|\lambda_1(\widehat{A})| \le \sigma_1(\widehat{A}).$$

Согласно (11) и (15)–(17), это и есть требуемое неравенство (19), записанное в несколько иной форме. □

Замечание. В личной переписке Р. Хорн указал автору, что предложения 2 и 3 могут быть объединены и усилены общим предположением о матричной норме, а именно $||A|| = ||\overline{A}||$. Действительно, доказательство предложения 2 проходит в этом более общем случае без каких-либо изменений. Он охватывает, в частности, все унитарно инвариантные нормы, а не только спектральную норму.

Предложение 4. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i(A)|^2 \le ||A||_F^2. \tag{20}$$

Доказательство. Применяя хорошо известное неравенство Шура к матрице $\widehat{A}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i(\widehat{A})|^2 \le ||\widehat{A}||_F^2. \tag{21}$$

Очевидно, что

$$||\widehat{A}||_F^2 = 2||A||_F^2.$$

Учитывая (15), видим, что (21) эквивалентно требуемому неравенству (20). □

Поскольку

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A),$$

мы можем рассматривать (20) как неравенство между псевдособственными значениями матрицы A и ее сингулярными числами. С этой точки зрения, следующая теорема является обобщением предложения 4.

Теорема 1. *Для произвольного целого m в интервале $1 \le m \le n$ и любого вещественного неотрицательного δ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu_i(A)|^\delta \le \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^\delta(A). \tag{22}$$

Доказательство. Применяя к матрице $\widehat{A}$ аддитивные неравенства Вейля (см. [2, раздел II.4.2]), получаем

$$\sum_{i=1}^{\ell} |\lambda_i(\widehat{A})|^\delta \le \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i^\delta(\widehat{A}), \quad 1 \le \ell \le 2n. \tag{23}$$

Полагая в (23) $\ell = 2m$ $(1 \le m \le n)$ и принимая во внимание (15) и (16), приходим к соотношению (22). □

Закончим этот раздел простым, но полезным фактом.

Предложение 5. *Пусть A – блочно-треугольная матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$c\lambda(A) = c\lambda(A_{11}) \cup c\lambda(A_{22}). \tag{24}$$

Разумеется, соотношение (24) выполнено и для нижней треугольной матрицы. Более того, аналогичные равенства имеют место для всех блочных порядков (а не только 2×2 блочных матриц).

3. Сопряженно-нормальные матрицы

Хорошо известна роль, которую в теории унитарного подобия играют нормальные матрицы. Она основывается на том, что именно нормальные матрицы приводятся к простейшей – диагональной – форме посредством унитарных подобий. В теории унитарных конгруэнций аналогичную роль играют сопряженно-нормальные матрицы (с.н. матрицы).

Определение 2. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется сопряженно-нормальной, если*

$$AA^* = \overline{A^*A}. \tag{25}$$

По-видимому, класс с.н. матриц был впервые введен в [3]. Там же была найдена каноническая форма с.н. матриц относительно унитарных конгруэнций.

Теорема 2. *Всякая сопряженно-нормальная матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ посредством подходящей унитарной конгруэнции может быть приведена к блочно-диагональному виду с диагональными блоками порядков 1 и 2. Блоки порядка 1 суть неотрицательные псевдособственные значения этой матрицы. Блоки порядка 2 соответствуют парам сопряженных комплексных псевдособственных значений $\mu_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \overline{\mu}_j$ и имеют вид*

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho_j \\ \rho_j e^{-i2\theta_j} & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & \mu_j \\ \overline{\mu}_j & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Блочно-диагональная матрица, описанная в теореме 2, называется канонической формой с.н. матрицы A. Вид (26) ее 2×2 блоков используется в [3], а вид (27) – в [4].

Специальными случаями с.н. матриц являются комплексные симметричные, кососимметричные и унитарные матрицы. Из классической теоремы Такаги (см. [1, раздел 4.4]) следует, что сингулярные числа симметричной матрицы совпадают с ее псевдособственными значениями. Псевдособственные значения унитарной матрицы U, будучи квадратными корнями из (обычных) собственных значений унитарной матрицы $\overline{U}U$, имеют модуль 1; в то же время, и все сингулярные числа U равны единице. Это соотношение между псевдособственными значениями и сингулярными числами справедливо для всего класса с.н. матриц.

Предложение 6. *Сингулярные числа сопряженно-нормальной матрицы A совпадают с модулями ее псевдособственных значений.*

Доказательство. Требуемое утверждение легко вытекает из рассмотрения канонической формы матрицы A. Действительно, неотрицательные псевдособственные значения (т.е. 1×1 блоки канонической формы) являются одновременно сингулярными числами. В то же время, очевидно, что сингулярные числа матрицы (27) – это дважды повторенное число $|\mu_j|$. $\square$

Следствие 1. *Неравенства* (19), (20) *и* (22) *превращаются в равенства, если A – сопряженно-нормальная матрица.*

Замечание. В [5] показано, что равенство в (20) возможно только в случае сопряженно-нормальной матрицы A.

В заключение, обсудим еще одно любопытное свойство с.н. матриц. Чтобы сформулировать его, напомним, что теплицевым (или декартовым) разложением квадратной комплексной матрицы A называется ее представление

$$A = B + C, \qquad B = B^*, \quad C = -C^*. \tag{28}$$

Матрицы B и C называются соответственно вещественной и мнимой частями матрицы A и определены единственным образом:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

Полезность теплицева разложения связана с тем обстоятельством, что оно согласовано с унитарными подобиями в следующем смысле: для всякой унитарной матрицы U матрицы U^*BU и U^*CU являются соответственно вещественной и мнимой частями матрицы U^*AU; при этом все три преобразованные матрицы сохраняют свои собственные значения.

Аналогом теплицева разложения в теории унитарных конгруэнций является представление матрицы A, которое мы будем называть ее SSS-разложением (от Symmetric-Skew-Symmetric decomposition):

$$A = S + K, \tag{29}$$

где

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{2}(A - A^T) \tag{30}$$

суть симметричная и кососимметричная матрицы, называемые соответственно симметричной и кососимметричной частями матрицы A.

Разложение (29), (30) согласовано с унитарными конгруэнциями в следующем смысле: для всякой унитарной матрицы U матрицы U^TBU и U^TCU являются соответственно симметричной и кососимметричной частями матрицы U^TAU; при этом все три преобразованные матрицы сохраняют свои псевдособственные значения.

Теорема 3. *Пусть A – сопряженно-нормальная матрица с SSS-разложением* (29), (30). *Тогда псевдособственные значения матрицы S (матрицы K) являются вещественными (мнимыми) частями псевдособственных значений матрицы A.*

Доказательство. И это утверждение можно получить, рассматривая каноническую форму матрицы A. Если μ – 1×1 блок канонической формы, то его SSS-разложением, очевидно, будет

$$\mu = \mu + 0.$$

Пусть $\mu_j = x_j + iy_j$ – комплексное псевдособственное значение матрицы A. Тогда SSS-разложение матрицы (27) имеет вид

$$S_j + K_j,$$

где

$$S_j = \begin{bmatrix} 0 & x_j \\ x_j & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

и

$$K_j = \begin{bmatrix} 0 & iy_j \\ -iy_j & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Псевдособственные значения матрицы (31) суть дважды повторенное число x_j, а псевдособственные значения матрицы (32) – это числа iy_j и $-iy_j$. □

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
2. М. Маркус, Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* Мир, М., 1972.
3. M. Vujicić, F. Herbut, G. Vujicić, *Canonical forms for matrices under unitary congruence transformations I: conjugate-normal matrices.* — SIAM J. Appl. Math. **23** (1972), 225–238.
4. E. P. Wigner, *Normal form of antiunitary operators.* — J. Math. Phys. **1** (1960), 409–413.
5. Х. Д. Икрамов, *Неравенство Шура для псевдособственных значений и сопряженно-нормальные матрицы.* — Вестн. МГУ. Серия "Вычисл. математика и кибернетика" No. 1 (1997), 3–6.

Ikramov Kh. D. On the coneigenvalues and singular values of a complex square matrix.

It is shown that the coneigenvalues of a matrix, when properly defined (in a way different from the one commonly used in the literature), obey relations similar to the classical inequalities between the (ordinary) eigenvalues and singular values. Several interesting spectral properties of conjugate-normal matrices are indicated. This matrix class plays the same role in the theory of unitary congruences as the class of normal matrices plays in the theory of unitary similarities.

Московский государственный университет

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 27 апреля 2006 г.