Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

М. Дана, Х. Д. Икрамов

ОБ ОДНОРАНГОВЫХ КОРРЕКЦИЯХ КОМПЛЕКСНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

1. Введение

В настоящей заметке мы решаем следующую задачу: пусть известно, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ является одноранговым возмущением некоторой комплексной симметричной матрицы, т.е.

$$A = X + Y, \tag{1}$$

где

$$X = X^T, \qquad \operatorname{rank} Y = 1. \tag{2}$$

Однако конкретные матрицы X и Y неизвестны. Как найти эти матрицы?

Отметим, что аналогичные задачи, где X – эрмитова либо унитарная матрица, были решены авторами в [1]. Эти задачи были мотивированы возможностью обобщения методов типа сопряженных градиентов на малоранговые возмущения некоторых классов нормальных матриц (см. [2]). Сходная возможность имеется для малоранговых возмущений комплексных симметричных матриц. При этом в качестве метода-прототипа, чье обобщение желательно построить, выступает алгоритм CSYM (см. [3]).

2. Решение задачи

Из (1) и (2) вытекает, что

$$A^T = X + Y^T$$

и

$$A - A^T = Y - Y^T.$$

Поскольку $\operatorname{rank} Y = 1$, имеем

$$\operatorname{rank}(A - A^T) \le 2.$$

Рассмотрим порознь случаи, соответствующие трем возможным значениям (0, 1 и 2) ранга матрицы $A - A^T$.

2.1. Симметричная матрица A

В этом случае Y – произвольная симметричная матрица ранга 1. Если Y выбрана, то X определяется как разность

$$X = A - Y.$$

2.2. $\operatorname{rank}(A - A^T) = 1$

Этот случай в действительности невозможен, поскольку кососимметричная матрица $A - A^T$ всегда имеет четный ранг.

2.3. $\operatorname{rank}(A - A^T) = 2$

Нам понадобится следующий факт, связанный с комплексными кососимметричными матрицами (см. [4, раздел 4.4, задача 26]): для всякой кососимметричной матрицы $K \in M_n(\mathbf{C})$ найдется унитарная матрица U, такая, что

$$UKU^T = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0, \tag{3}$$

где каждый из 2×2-блоков K_j $(1 \le j \le s)$ имеет вид

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & a_j \\ -a_j & 0 \end{pmatrix}, \quad a_j \ne 0.$$

Ранг r матрицы (3) равен $2s$.

Полагая $K = \frac{1}{2}(A - A^T)$, найдем унитарную матрицу U, которая приводит нашу матрицу K к блочно-диагональному виду (3). Поскольку $r = 2$, имеем

$$\widetilde{K} = UKU^T = K_1 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0, \tag{4}$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \ne 0. \tag{5}$$

Вводя симметричную матрицу $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$, перепишем (1) в виде

$$S + K = X + Y \tag{6}$$

и применим унитарную конгруэнцию с матрицей U к обеим частям равенства (6):

$$USU^T + UKU^T = UXU^T + UYU^T.$$

Полагая

$$\widetilde{S} = USU^T, \quad \widetilde{X} = UXU^T, \quad \widetilde{Y} = UYU^T,$$

получаем
$$\widetilde{K} + (\widetilde{S} - \widetilde{X}) = \widetilde{Y}. \tag{7}$$

Наша первоначальная задача теперь сводится к следующей: для кососимметричной $n \times n$-матрицы $\widetilde{K}$, заданной соотношениями (4) и (5), найти все симметричные матрицы $Z = \widetilde{S} - \widetilde{X}$, для которых матрица
$$\widetilde{Y} = \widetilde{K} + Z \tag{8}$$
имеет ранг 1. Покажем, что всякая матрица Z, удовлетворяющая этим условиям, должна иметь тот же блочно-диагональный вид, что и $\widetilde{K}$, т.е.
$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0. \tag{9}$$

Поскольку $\operatorname{rank}(\widetilde{K} + Z) = 1$, должно выполняться соотношение
$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} + a \\ z_{12} - a & z_{22} \end{vmatrix} = 0,$$
или
$$z_{11} z_{22} + a^2 = z_{12}^2. \tag{10}$$

Справедливость представления (9) докажем рассуждением от противного. Предположим, что в первых двух строках матрицы Z имеется еще хотя бы один ненулевой внедиагональный элемент помимо z_{12} и $z_{21} = z_{12}$. Выполняя при необходимости симметричную перестановку строк и столбцов всех трех матриц в (8), можем считать, что
$$z = \begin{pmatrix} z_{13} \\ z_{23} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Если $z_{11} \neq 0$, то из условия
$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{13} \\ z_{12} - a & z_{23} \end{pmatrix} = 1$$
выводим, что
$$\begin{pmatrix} z_{13} \\ z_{23} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} - a \end{pmatrix} \tag{12}$$
для некоторого скаляра α.

Применяя то же рассуждение к первым двум столбцам матрицы $\widetilde{K}+Z$, получим

$$(z_{31} \quad z_{32}) = (z_{13} \quad z_{23}) = \beta (z_{11} \quad z_{12}+a) \tag{13}$$

для некоторого скаляра β.

Сопоставление (12) и (13) приводит к равенствам $\alpha=\beta$ и

$$\alpha(z_{12}-a)=\alpha(z_{12}+a). \tag{14}$$

Поскольку $a \neq 0$, равенство (14) возможно лишь при $\alpha = 0$, что, ввиду (12), приводит нас к противоречию с предположением (11).

Аналогичное противоречие может быть получено, если $z_{11}=0$, но $z_{22}\neq 0$. В этом случае те же, что и выше, рассуждения нужно применять к соотношениям

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} z_{12}+a & z_{13} \\ z_{22} & z_{23} \end{pmatrix} = 1$$

и

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} z_{12}-a & z_{22} \\ z_{13} & z_{23} \end{pmatrix} = 1.$$

Пусть теперь $z_{11}=z_{22}=0$. Согласно (10),

$$z_{12}=\pm a.$$

Предположим, для определенности, что $z_{12}=a$. Тогда ведущая главная 2×2-подматрица в $\widetilde{Y}=\widetilde{K}+Z$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a\neq 0.$$

Из условия $\operatorname{rank}\widetilde{Y}=1$ выводим, что все внедиагональные элементы второй строки и первого столбца должны быть нулевыми. Поскольку $\widetilde{Y}$ может отличаться от симметричной матрицы Z только в четырех позициях (1,1), (1,2), (2,1) и (2,2), то должны быть равны нулю и внедиагональные элементы во втором столбце и первой строке, исключая элемент (1,2). Это снова приводит к противоречию с предположением (11).

Итак, установлено, что всякая симметричная матрица Z, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{rank}(\widetilde{K}+Z)=1, \tag{15}$$

должна иметь блочно-диагональный вид

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \oplus Z_{n-2},$$

где Z_{n-2} – симметричная матрица порядка $n-2$.

Покажем, что если $Z_{n-2} \neq 0$, то условие (15) не может быть выполнено. Действительно, если в Z отличен от нуля элемент z_{kl}, где $k, l > 2$ и $k \leq l$, то $\widetilde{K} + Z$ содержит ненулевой минор

$$\begin{vmatrix} z_{11} & 0 \\ z_{k1} & z_{kl} \end{vmatrix}$$

при $z_{11} \neq 0$, ненулевой минор

$$\begin{vmatrix} z_{22} & 0 \\ z_{k2} & z_{kl} \end{vmatrix}$$

при $z_{22} \neq 0$, ненулевой минор

$$\begin{vmatrix} z_{12} + a & 0 \\ z_{k2} & z_{kl} \end{vmatrix}$$

при $z_{12} + a \neq 0$ и, наконец, ненулевой минор

$$\begin{vmatrix} z_{12} - a & 0 \\ z_{k1} & z_{kl} \end{vmatrix}$$

при $z_{12} - a \neq 0$. Тем самым обосновано представление (9).

Сформулируем полученный результат в терминах исходной задачи. Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ – матрица, для которой $\operatorname{rank}(A - A^T) = 2$. Положим $K = \frac{1}{2}(A - A^T)$ и найдем представление (4), (5). Для полученного числа a выберем произвольную тройку чисел z_{11}, z_{12} и z_{22}, удовлетворяющих равенству (10). Эти числа определяют матрицу Z в (9). Теперь симметричная матрица X, решающая поставленную задачу, может быть найдена по формуле

$$X = S - U^* Z \overline{U},$$

где

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

Соответствующая одноранговая матрица Y определяется как разность

$$Y = A - X.$$

Замечание. При $z_{11} = z_{22} = 0$, $z_{12} = a$ или $z_{11} = z_{22} = 0$, $z_{12} = -a$ одноранговая матрица (8) нильпотентна. Это, однако, может быть неверно для соответствующей матрицы Y, поскольку $\widetilde{Y}$ и Y связаны унитарной конгруэнтностью, а не унитарным подобием.

Литература

1. М. Дана, Х. Д. Икрамов, *О малоранговых коррекциях эрмитовых и унитарных матриц.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **44** (2004), 1331–1345.
2. T. Barth, T. Manteuffel, *Multiple recursion conjugate gradient algorithms. Part I: Sufficient conditions.* — SIAM J. Matrix Analys. Appl. **21** (2000), 768–796.
3. A. Bunse-Gerstner, R. Stover, *On a conjugate gradient-type method for solving complex symmetric linear systems.* — Linear Algebra Appl. **287** (1999), 105–123.
4. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1990.

Dana M., Ikramov Kh. D. On rank-one corrections of complex symmetric matrices.

Let a matrix $A \in M_n(\mathbf{C})$ be a rank-one perturbation of a complex symmetric matrix, i.e., $A = X + Y$ for some unknown matrices X and Y such that $X = X^T$ and $\operatorname{rank} Y = 1$. The problem of determining the matrices X and Y is solved.

Университет Курдистана,
г. Санандадж, Исламская
Республика Иран

E-mail: mansourdana2001@yahoo.com

Поступило 16 января 2005 г.

Московский государственный
университет

E-mail: ikramov@cs.msu.su