Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина

ОБОБЩЕННОЕ СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ

§1. Введение и предварительные сведения

Базовым результатом теории неотрицательных матриц является следующая теорема Перрона–Фробениуса.

Теорема 1.1 (см., напр., [5, глава 2, теорема 1.4]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда A имеет собственное значение $\rho(A) = \max\limits_{\lambda(A)\in \operatorname{Spec} A} |\lambda(A)|$, и существует неотрицательный собственный вектор A, отвечающий $\rho(A)$. Кроме того, если матрица A неприводима, то собственное значение $\rho(A)$ является положительным и простым, и существует отвечающий ему положительный собственный вектор.*

Собственное значение $\rho(A)$ называется перроновским корнем матрицы A, а отвечающие ему неотрицательные правый и левый собственные векторы A называются перроновскими векторами.

Как хорошо известно, перроновский корень обладает важными *свойствами монотонности*, представленными в следующих теоремах.

Теорема 1.2 (см., напр., [5, глава 2, теорема 1.11]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Если для некоторого неотрицательного вектора $x \neq 0$ выполнено неравенство*

$$Ax \geqslant \alpha x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{1.1}$$

то

$$\rho(A) \geqslant \alpha, \tag{1.2}$$

а если для положительного вектора x выполнено неравенство

$$Ax \leqslant \beta x, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \geqslant 0, \tag{1.3}$$

то

$$\rho(A) \leqslant \beta. \tag{1.4}$$

Кроме того, если матрица A неприводима и неравенство (1.1) (неравенство (1.3)) справедливо для неотрицательного вектора $x \neq 0$, то неравенство (1.2) (неравенство (1.4)) является равенством тогда и только тогда, когда неравенство (1.1) (неравенство (1.3)) является равенством.

Теорема 1.3 (см., напр., [5, глава 2, следствие 1.5]). *Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядка $n \geqslant 1$. Если $A \leqslant B$, то перроновские корни A и B связаны соотношением*

$$\rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{1.5}$$

Кроме того, если матрица B неприводима и $A \neq B$, то неравенство (1.5) является строгим.

Теорема 1.4 (см., напр., [5, глава 2, следствие 1.6]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть S – непустое подмножество множества индексов $\langle n \rangle$. Тогда*

$$\rho(A[S]) \leqslant \rho(A). \tag{1.6}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то неравенство (1.6) является равенством тогда и только тогда, когда $S = \langle n \rangle$.

В теореме 1.4 и на протяжении всей статьи используется обозначение $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$, где $n \geqslant 1$. Матричные и векторные неравенства понимаются как покомпонентные. Точнее говоря, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \geqslant 1$, то неравенство $A \geqslant B$ означает, что $a_{ij} \geqslant b_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, а неравенство $A > B$ означает, что $a_{ij} > b_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

В §2 этой работы мы доказываем так называемое обобщенное свойство монотонности перроновского корня, позволяющее сравнивать перроновские корни неотрицательных матриц A и B различных порядков, сравнивая произведения AH и HB, где H – прямоугольная неотрицательная матрица. Мы показываем, что из обобщенного свойства монотонности следуют все утверждения теорем 1.2–1.4, а также двусторонние оценки для перроновского корня блочной неотрицательной матрицы, предложенные Чистяковым в работе [4]. Более того, получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы оценки Чистякова выполнялись с равенством. В §3 представлены некоторые верхние оценки для спектрального радиуса комплексной матрицы, вытекающие из результатов §2, а именно, обобщение леммы Виландта и блочные верхние оценки.

В заключение этого параграфа приведем некоторые обозначения, используемые в работе.

• Через, I_n, $n \geqslant 1$, обозначается единичная матрица порядка n.

• Для $m \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ и непустых подмножеств $R \subseteq \langle m \rangle$ и $S \subseteq \langle n \rangle$ через $A[R, S]$ обозначается подматрица $(a_{ij})_{\substack{i \in R \\ j \in S}}$, а если $R \subseteq \langle m \rangle \cap \langle n \rangle$, то через $A[R]$ обозначается главная подматрица $A[R, R]$.

• Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ через

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

обозначаются абсолютные строчные суммы матрицы A.

• Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то через $|A|$ обозначается матрица $(|a_{ij}|)$, состоящая из модулей элементов A.

• $\mathfrak{C}(A)$ – это множество всех простых контуров в ориентированном графе матрицы A, и для контура $\gamma = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{C}(A)$, где $i_{k+1} = i_1$, мы полагаем $|\gamma| = k$ и

$$\Pi_\gamma(A) = \prod_{j=1}^{k} a_{i_j i_{j+1}}; \tag{1.7}$$

множество $\{i_1, \ldots, i_k\}$ называется носителем контура γ и обозначается через $\bar{\gamma}$.

§2. Основные результаты

Обобщенное свойство монотонности перроновского корня сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядков $m, n \geqslant 1$ соответственно. Если для неотрицательной $m \times n$ матрицы H, не имеющей нулевых строк, справедливо матричное неравенство*

$$AH \leqslant HB, \tag{2.1}$$

то

$$\rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{2.2}$$

Кроме того, если обе матрицы A и B неприводимы, то неравенство (2.2) является равенством тогда и только тогда, когда неравенство (2.1) выполняется с равенством.

Доказательство. Предположим сперва, что матрица A неприводима. В этом случае, по теореме 1.1, левый перроновский вектор u матрицы A положителен, и из неравенства (2.1) следует, что

$$u^T AH = \rho(A)(u^T H) \leqslant (u^T H)B. \tag{2.3}$$

Поскольку матрица H не имеет нулевых строк, она, очевидно, ненулевая, так что вектор $v = H^T u$ неотрицательный и ненулевой. Представив неравенство (2.3) в виде

$$B^T v \geqslant \rho(A)v \tag{2.4}$$

и применив теорему 1.2, мы приходим к желаемому неравенству (2.2).

Рассмотрим теперь общий случай приводимой матрицы A. В этом случае существует непустое собственное подмножество $S \subsetneqq \langle m \rangle$ множества индексов такое, что главная подматрица $A[S]$ является неприводимой компонентой A, причем

$$\rho(A) = \rho(A[S]). \tag{2.5}$$

Как легко видеть, из неравенства (2.1) следует, что

$$A[S]\, H[S, \langle n \rangle] \leqslant (AH)[S, \langle n \rangle] \leqslant (HB)[S, \langle n \rangle] = H[S, \langle n \rangle]B. \tag{2.6}$$

Таким образом, неприводимая матрица $A[S]$ удовлетворяет условиям теоремы с неотрицательной матрицей $H[S, \langle n \rangle]$. Заметим, что матрица $H[S, \langle n \rangle]$ не имеет нулевых строк, поскольку, по предположению, H не имеет таковых. В частности, $H[S, \langle n \rangle]$ – ненулевая матрица. Следовательно, как уже установлено, из неравенства (2.6) следует, что

$$\rho(A[S]) \leqslant \rho(B), \tag{2.7}$$

и неравенство (2.2) вытекает из (2.5) и (2.7).

Пусть теперь обе матрицы A и B неприводимы. Рассмотрим случай равенства в (2.2). Пусть сперва

$$\rho(A) = \rho(B). \tag{2.8}$$

Тогда из неравенства (2.4) следует, что

$$B^T v \geqslant \rho(A)v = \rho(B^T)v.$$

Применяя теорему 1.2 к неприводимой матрице B^T, мы заключаем, что

$$B^T v = \rho(B^T)v, \tag{2.9}$$

т.е. $v = H^T u$ – левый перроновский вектор матрицы B. Поскольку матрица B неприводима, вектор v положителен.

Теперь, рассуждая от противного, допустим, что неравенство (2.1) не является равенством. В этом случае, учитывая положительность вектора u и соотношение (2.9), мы можем найти такой индекс $i \in \langle m \rangle$, что

$$(u^T AH)_i = \rho(A)(u^T H)_i = \rho(A)v_i < (u^T HB)_i = (v^T B)_i = \rho(B)v_i,$$

откуда следует, что

$$\rho(A) < \rho(B).$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$AH = HB. \tag{2.10}$$

Обратно, пусть справедливо равенство (2.10) и пусть x – (положительный) правый перроновский вектор неприводимой матрицы B. Тогда, в силу (2.10) и (2.2), мы имеем

$$AHx = HBx = \rho(B)Hx \geqslant \rho(A)Hx. \tag{2.11}$$

Поскольку матрица H отлична от нулевой, вектор $y = Hx$ неотрицателен и отличен от нулевого, а значит, по теореме 1.2 в применении к неприводимой матрице A, правое неравенство в (2.11) является равенством. Следовательно, выполняется соотношение (2.8), что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 2.1. Если в условиях теоремы 2.1 матрица A неприводима, то, как следует из приведенного доказательства, все утверждения этой теоремы верны для произвольной неотрицательной матрицы $H \neq 0$, у которой допускается наличие нулевых строк.

Замечание 2.2. Во второй части теоремы 2.1 предположение о неприводимости обеих матриц A и B не может быть опущено. Действительно, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B = 3,$$

то

$$\rho(A) = \rho(B) = 3, \quad AH = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leqslant HB = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{но} \quad AH \neq HB.$$

Аналогично, если

$$A = 2, \qquad H = [1 \quad 1], \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$\rho(A) = \rho(B) = 2, \quad AH = [2 \quad 2] \leqslant HB = [2 \quad 3], \quad \text{но} \quad AH \neq HB.$$

Транспонируя условие (2.1), мы немедленно получаем следующий результат, вытекающий из теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядков $m, n \geqslant 1$ соответственно. Если для неотрицательной $m \times n$ матрицы H, не имеющей нулевых столбцов, справедливо неравенство*

$$AH \geqslant HB, \tag{2.12}$$

то

$$\rho(A) \geqslant \rho(B). \tag{2.13}$$

Кроме того, если обе матрицы A и B неприводимы, то неравенство (2.13) *является равенством тогда и только тогда, когда неравенство* (2.12) *выполняется с равенством.*

Замечание 2.3. Если в условиях следствия 2.1 матрица B неприводима, то все утверждения остаются в силе для ненулевой неотрицательной матрицы H.

Теперь мы покажем, что из теоремы 2.1 и следствия 2.1 можно вывести свойства монотонности перроновского корня, сформулированные в теоремах 1.2–1.4.

Действительно, ввиду замечаний 2.1 и 2.3, теорема 1.2 является частным случаем теоремы 2.1 и следствия 2.1, соответствующим $n = 1$.

Для того, чтобы вывести теорему 1.4, предположим, что B – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и что $S \neq \varnothing$ – подмножество множества $\langle n \rangle$, $|S| = m \leqslant n$. Переставив, если это требуется, строки и столбцы матрицы B, можно считать, что $S = \langle m \rangle$.

Положим $A = B[S]$ и $H = [I_m \quad 0]$. Тогда неравенство (2.1) равносильно неравенству

$$[B[S] \quad 0] \leqslant [B[S] \quad B[S, \bar{S}]], \tag{2.14}$$

где $\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S$, которое очевидно верно. Следовательно, по теореме 2.1, мы имеем

$$\rho(B[S]) \leqslant \rho(B), \qquad S \subseteq \langle n \rangle. \tag{2.15}$$

Далее, если неравенство (2.15) является равенством, а матрица B неприводима, то, опять же по теореме 2.1, мы необходимо имеем $AH = HB$. Ввиду (2.14), полученное равенство означает, что либо $B[S, \bar{S}] = 0$, либо $S = \langle n \rangle$. Поскольку, в силу неприводимости матрицы B, первое невозможно, мы заключаем, что $S = \langle n \rangle$. Итак, теорема 1.4 действительно является следствием теоремы 2.1.

Наконец, теорема 1.3 выводится следующим образом. Для того, чтобы получить первое утверждение теоремы 1.3, достаточно в теореме 2.1 положить $m = n$ и $H = I_n$. Пусть теперь матрица B неприводима и пусть $S \subseteq \langle n \rangle$ – такое непустое подмножество, что матрица $A[S]$ является неприводимой компонентой A и $\rho(A[S]) = \rho(A)$. Из неравенства $A \leqslant B$ очевидно следует, что $A[S] \leqslant B[S]$, так что, в силу (1.5) и (1.6), мы имеем

$$\rho(A) = \rho(A[S]) \leqslant \rho(B[S]) \leqslant \rho(B).$$

Таким образом, если $\rho(A) = \rho(B)$, то $\rho(B[S]) = \rho(B)$, а поскольку матрица B неприводима, из теоремы 1.4 вытекает, что $S = \langle n \rangle$. Следовательно, если в условиях теоремы 1.3 матрица B неприводима и $\rho(A) = \rho(B)$, то A также неприводима, а тогда, по теореме 2.1, мы необходимо имеем $A = B$.

Ниже мы рассматриваем еще одно следствие из теоремы 2.1 и следствия 2.1, соответствующее специфическому выбору матрицы H.

Пусть

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_j, \qquad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

– разбиение множества $\langle m\rangle$ на непересекающиеся непустые подмножества. Определим матрицу $H=(h_{ij})$, положив

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\in M_j,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.16}$$

так что каждая строка H содержит в точности один единичный элемент. Заметим, что матрица H не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов. Тогда для $k\in M_i$ и $j\in\langle n\rangle$ мы имеем

$$(AH)_{kj}=\sum_{l=1}^{m}a_{kl}h_{lj}=\sum_{l\in M_j}a_{kl}$$

и

$$(HB)_{kj}=\sum_{l=1}^{n}h_{kl}b_{lj}=b_{ij}.$$

Следовательно, матричное неравенство

$$AH\leqslant HB$$

равносильно условиям

$$\sum_{l\in M_j}a_{kl}\leqslant b_{ij},\qquad k\in M_i,\quad i,j=1,\dots,n.$$

Другими словами, для матрицы H, определенной в (2.16), мы имеем

$$AH\leqslant HB\quad\Longleftrightarrow\quad \max_{k\in M_i}\sum_{l\in M_j}a_{kl}\leqslant b_{ij},\qquad i,j=1,\dots,n. \tag{2.17}$$

Обозначим

$$A_{ij}=A[M_i,M_j],\qquad i,j=1,\dots,n.$$

Тогда правую часть эквивалентности (2.17) можно записать в виде

$$\|A_{ij}\|_\infty\leqslant b_{ij},\qquad i,j=1,\dots,n. \tag{2.18}$$

Аналогично, для $n\times n$ матрицы $C=(c_{ij})$ и матрицы H, определенной в (2.16), мы имеем

$$AH\geqslant HC\quad\Longleftrightarrow\quad \min_{k\in M_i}\sum_{l\in M_j}a_{kl}\geqslant c_{ij},\qquad i,j=1,\dots,n. \tag{2.19}$$

Введем в рассмотрение $n \times n$ неотрицательные матрицы

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij}), \qquad \hat{a}_{ij} = \max_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.20}$$

и

$$\check{A} = (\check{a}_{ij}), \qquad \check{a}_{ij} = \min_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

В этих обозначениях эквивалентности (2.17) и (2.19) принимают следующий вид:

$$AH \leqslant HB \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{A} \leqslant B, \tag{2.22}$$

$$AH \geqslant HC \quad \Longleftrightarrow \quad \check{A} \geqslant C. \tag{2.23}$$

Ввиду (2.22) и (2.23), мы также имеем

$$AH = HB \quad \Longleftrightarrow \quad B = \hat{A} = \check{A}. \tag{2.24}$$

Теперь мы готовы доказать теорему о двусторонних оценках для перроновского корня неотрицательной матрицы, представленной в блочном виде.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $m \geqslant 1$ и пусть*

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_j, \qquad 1 \leqslant n \leqslant m, \tag{2.25}$$

– разбиение множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Пусть неотрицательные $n \times n$ матрицы B и C удовлетворяют условиям

$$B \geqslant \hat{A}, \qquad C \leqslant \check{A}. \tag{2.26}$$

Тогда для перроновского корня матрицы A справедливы двусторонние оценки

$$\rho(C) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{2.27}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то правое неравенство в (2.27) выполняется с равенством тогда и только тогда, когда

$$B = \hat{A} = \check{A}, \tag{2.28}$$

а левое неравенство в (2.27) выполняется с равенством тогда и только тогда, когда

$$C = \check{A} = \hat{A}. \tag{2.29}$$

В частности, любое из неравенств в цепочке

$$\rho(\check{A}) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\hat{A}) \tag{2.30}$$

является равенством тогда и только тогда, когда $\hat{A} = \check{A}$*; в противном случае оба неравенства в (2.30) выполняются строго.*

Доказательство. Ввиду (2.22) и (2.23), неравенства (2.27) немедленно вытекают из теоремы 2.1 и следствия 2.1.

Пусть теперь матрица A неприводима и предположим, что

$$\rho(A) = \rho(B). \tag{2.31}$$

Поскольку из приводимости $\hat{A}$ очевидно следует, что и A приводима, мы заключаем, что матрицы $\hat{A}$ и $B \geqslant \hat{A}$ обе неприводимы. Следовательно, в силу теоремы 2.1 и с учетом эквивалентности (2.24), равенства (2.28) имеют место.

Теперь предположим, что A неприводима и что

$$\rho(C) = \rho(A). \tag{2.32}$$

Применяя теорему 1.3 и используя (2.27) с $C = \check{A}$, мы выводим

$$\rho(C) \leqslant \rho(\check{A}) \leqslant \rho(A).$$

С учетом равенства (2.32), последние неравенства сводятся к равенствам

$$\rho(C) = \rho(\check{A}) = \rho(A). \tag{2.33}$$

Покажем, что матрица $\check{A}$ неприводима. Для этого, рассуждая от противного, допустим, что $\check{A}$ приводима. Пусть $S \subsetneqq \langle n \rangle$ – такое непустое подмножество, что подматрица $\check{A}[S]$ является неприводимой компонентой матрицы $\check{A}$ и выполнено равенство

$$\rho(\check{A}[S]) = \rho(\check{A}). \tag{2.34}$$

Определим подмножество

$$\tilde{S} = \bigcup_{i \in S} M_i.$$

Очевидно, $\tilde{S}$ – непустое собственное подмножество множества $\langle m\rangle$. Поскольку матрица A неприводима, в силу теоремы 1.4 и (2.33), мы имеем

$$\rho(A[\tilde{S}]) < \rho(A) = \rho(\check{A}).$$

Но, в силу (2.34) и теоремы 2.2 , мы также имеем

$$\rho(\check{A}) = \rho(\check{A}[S]) \leqslant \rho(A[\tilde{S}]).$$

Полученное противоречие доказывает, что матрица $\check{A}$ неприводима, откуда, опять же по теореме 2.2, следует, что из правого равенства в (2.33) вытекает равенство $\check{A} = \hat{A}$.

Наконец, в силу теоремы 1.3, из неприводимости матрицы $\check{A}$ следует, что $\rho(C) = \rho(\check{A})$ тогда и только тогда, когда $C = \check{A}$. Этим завершается доказательство теоремы 2.2. □

Замечание 2.4. В последнем утверждении теоремы 2.2 предположение о том, что матрица A неприводима, не может быть заменено на предположение о неприводимости $\check{A}$ и, тем более, на предположение о том, что матрица $\hat{A}$ неприводима, т.е. что матрица A является блочно неприводимой относительно блочного разбиения, индуцируемого (2.25). Действительно, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_1 = \{1, 2\}, \qquad M_2 = \{3\}.$$

Тогда

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \check{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\rho(A) = \rho(\hat{A}) = 2 > \rho(\check{A}).$$

Значит, для этого примера правое неравенство в (2.30) является равенством, тогда как левое неравенство выполняется строго.

Замечание 2.5. Интересно отметить тот факт, что если в условиях теоремы 2.2 имеет место равенство $\hat{A} = \check{A}$, то каждое собственное значение матрицы $\hat{A}$ является одновременно и собственным значением исходной матрицы A. Действительно, ввиду (2.24), справедливо соотношение $AH = H\hat{A}$, из которого следует, что если

$$\hat{A}x = \mu x, \qquad x \neq 0,$$

то
$$A(Hx) = \mu(Hx).$$
Теперь остается лишь заметить, что, в силу определения (2.16) матрицы H, вектор Hx отличен от нулевого, поскольку $Hx = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

В связи с теоремой 2.2 уместны следующие комментарии.
(1) Первое утверждение теоремы 2.2 – это в точности главный результат работы [4].
(2) Правое неравенство в (2.27) является частным случаем значительно более общего результата, впервые полученного Островским (см. [8, теорема 4], а также [9]).
(3) Часть теоремы 2.2, относящаяся к случаям равенства, является новой и представляет интерес. Ранее в работе [7] случай равенства $\rho(A) = \rho(B)$ был рассмотрен для другого частного случая упомянутой теоремы Островского, а именно, в предположении, что (ср. (2.18))
$$\|A_{ij}\|_2 \leqslant b_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$
а $\|\cdot\|_2$ – спектральная матричная норма. Отметим, что случай равенства в общей теореме Островского пока не исследован.
(4) При $m = 1$ теорема 2.2 сводится к следующему хорошо известному результату Фробениуса.

Следствие 2.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для ее перроновского корня справедливы двусторонние оценки*
$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A). \tag{2.35}$$
Кроме того, если матрица A неприводима, то любое из неравенств в (2.35) выполняется с равенством тогда и только тогда, когда
$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A).$$

Из теоремы 2.2 немедленно следует, что любая верхняя оценка для $\rho(\hat{A})$ и любая нижняя оценка для $\rho(\check{A})$ могут быть использованы соответственно как верхняя и нижняя оценки для $\rho(A)$. Например, комбинируя неравенства (2.30) с двусторонними контурными оценками для перроновского корня, предложенными в работе [1] (см. также [3, теорема 1.1] в этом сборнике), мы приходим к следующему результату.

Теорема 2.3. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $m \geqslant 1$ и пусть*

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_j, \qquad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

– разбиение множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Пусть матрицы $\hat{A}$ и $\check{A}$ определены, как в (2.20) и (2.21). Тогда для перроновского корня A справедливы двусторонние оценки

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(\check{A})} \left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\check{A})\right\}^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})} \left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|}. \tag{2.36}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба неравенства в (2.36) являются равенствами тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $\check{A} = \hat{A}$,
- $$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})} \left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|} = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})} \left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|};$$

в противном случае оба неравенства в (2.36) являются строгими.

Замечание 2.6. Неравенства (2.36) совпадают с частным случаем оценок (3.23) из работы [3], соответствующим $\{A^{(x)}\}_{x\in X} = \{A\}$. Утверждение, относящееся к случаю равенств в (2.36), является новым.

§3. Верхние оценки для спектрального радиуса

В этом параграфе мы выводим верхние оценки для спектрального радиуса комплексной матрицы из оценок для перроновского корня, полученных в §2.

Напомним сперва один результат, принадлежащий Виландту (см., напр., [2, с. 358]), который позволяет оценивать сверху спектральный радиус квадратной матрицы через перроновский корень подходящей неотрицательной матрицы.

Лемма 3.1. *Пусть матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяют условию*

$$|A| \leqslant P.$$

Тогда каждое собственное значение $\lambda(A) \in \operatorname{Spec} A$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda(A)| \leqslant \rho(P); \tag{3.1}$$

кроме того, если матрица P неприводима, то неравенство (3.1) является равенством тогда и только тогда, когда существует унитарная диагональная матрица D такая, что

$$A = \varepsilon D^* P D, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon = \lambda(A)/\rho(P)$.

Заметим, что из соотношения (3.2) тривиально следует равенство $P = |A|$, и напомним, что в неприводимом случае существование унитарной диагональной матрицы D, для которой справедливо равенство

$$\bar{\varepsilon} A = D^* |A| D, \tag{3.3}$$

равносильно выполнению конечного набора условий, соответствующих контурам из $\mathfrak{C}(A)$. Точнее говоря, справедлив следующий результат.

Лемма 3.2 [6, лемма (3,4)]. *Для неприводимой матрицы $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, следующие утверждения равносильны:*

(i) *$B = D^*|B|D$, где $|D| = I_n$;*

(ii) *для каждого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(B)$ имеет место неравенство*

$$\Pi_\gamma(B) > 0, \tag{3.4}$$

где контурное произведение $\Pi_\gamma(B)$ определено в (1.7).

В силу леммы 3.2, равенство (3.3) равносильно следующему условию:

$$\bar{\varepsilon}^{|\gamma|} \Pi_\gamma(A) > 0 \qquad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{3.5}$$

Теперь, комбинируя теорему 2.1 и следствие 2.1 (с учетом замечаний 2.1 и 2.3) с леммой 3.1 и используя лемму 3.2, мы приходим к следующему обобщению леммы Виландта.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, и пусть B – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Если либо*

$$|A|H \leqslant HB, \tag{3.6}$$

где H – неотрицательная $m \times n$ матрица, не имеющая нулевых строк, либо

$$H|A| \leqslant BH, \tag{3.7}$$

где H – неотрицательная $n \times m$ матрица, не имеющая нулевых столбцов, то

$$\rho(A) \leqslant \rho(B). \tag{3.8}$$

Кроме того, если обе матрицы A и B неприводимы и условие (3.6) *(условие* (3.7)*) выполнено для ненулевой неотрицательной матрицы H, то неравенство* (3.8) *является равенством тогда и только тогда, когда неравенство* (3.6) *(неравенство* (3.7)*) является равенством и для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, выполнено условие*

$$\left[\Pi_\gamma(A)/|\Pi_\gamma(A)|\right]^{1/|\gamma|} = \varepsilon \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{3.9}$$

Комбинируя теорему 2.2 с леммой 3.1 и используя лемму 3.2, мы немедленно получаем следующую блочную оценку для спектрального радиуса.

Теорема 3.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, и пусть*

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_j, \qquad 1 \leqslant n \leqslant m,$$

– разбиение множества индексов на непустые непересекающиеся подмножества. Положим

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij}), \qquad \hat{a}_{ij} = \max_{k\in M_i} \sum_{l\in M_j} |a_{kl}| = \|A[M_i, M_j]\|_\infty, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Тогда для спектрального радиуса матрицы A справедлива оценка

$$\rho(A) \leqslant \rho(\hat{A}). \tag{3.11}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то неравенство (3.11) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\hat{a}_{ij} = \min_{k\in M_i} \sum_{l\in M_j} |a_{kl}|, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

и для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, *выполнено условие* (3.9).

Наконец, теорема 2.3 в сочетании с леммами 3.1 и 3.2 дает следующий результат.

Теорема 3.3. *В условиях теоремы 3.2 спектральный радиус матрицы A удовлетворяет верхней оценке*

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})}\left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|}\\ &= \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})}\left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|A[M_i,M_j]\|_\infty\right)\right\}^{1/|\gamma|}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то неравенство в (3.13) *является равенством тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.12) *и* (3.9) *и справедливо соотношение*

$$\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})}\left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|} = \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(\hat{A})}\left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}} r_i(\hat{A})\right\}^{1/|\gamma|}.\tag{3.14}$$

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Матем. заметки **58** (1995), 635–637.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.
3. Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина, Н. Н. Корнеева, *Совместные оценки для перроновских корней неотрицательных матриц и их приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 30–56.
4. В. П. Чистяков, *К оценке перронова корня неотрицательных матриц.* — Докл. АН СССР **246** (1979), 548–550.
5. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
6. M. Fiedler, V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 428–450.
7. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **359** (2003), 133–159.
8. A. M. Ostrowski, *On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks.* — J. Math. Anal. Appl. **2** (1961), 161–209.
9. F. Robert, *Recherche d'une M-matrice parmi les minorantes d'un opérateur linéaire.* — Numer. Math. **9** (1966), 189–199.

Al'pin Yu. A., Kolotilina L. Yu. The generalized monotonicity property of the Perron root.

The paper presents a new monotonicity property of the Perron root of a nonnegative matrix. It is shown that this new property implies known monotonicity properties and also the Chistyakov two-sided bounds for the Peroon root of a block-partitioned nonnegative matrix. Moreover, based on the monotonicity property suggested, the equality cases in Chistyakov's theorem are analyzed. Applications to bounding above the spectral radius of a complex matrix are presented.

Казанский государственный
университет

E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 июня 2006 г.