Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 332, 2006 г.

Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, Ю. А. Сурков

О СОПОСТАВЛЕНИИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ УПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ТОНКОСЛОИСТЫХ СРЕДАХ. 1

Одной из последних работ Г. И. Петрашеня, оставшейся незавершенной, была статья о сопоставлении методов расчета интерференционных упругих волновых полей в тонкостоистых средах. Предполагалось проанализировать и сопоставить результаты численного моделирования волновых полей, полученных методом дисперсионного уравнения и методом наложения кратных волн. Анализ и сопоставление планировалось провести на примере простейшей задачи для тонкого упругого слоя на упругом полупространстве. В силу ряда причин незавершенной оказалась последняя часть работы, связанная с анализами расчетов, за которую отвечали соавторы. Первые два параграфа практически были закончены Г. И. Петрашенем и соавторы решили опубликовать их в виде нескольких статей, дополнив их обсуждением вычислительных проблем, возможностей их решения и актуальностью алгоритмов, предложенных Г. И. Петрашенем для интерпретации сейсмических наблюдений.

В данной статье рассматривается нестационарная задача на распространение низкочастотных волн для пачки упругих слоев, лежащей на упругом полупространстве. Построены точные математические решения в форме повторных интегралов в трех основных формах. Доказывается удовлетворение этих решений начальным условиям. Рассматривается возможность перехода к представлению решения наложением кратных волн. Обсуждается связь построенных решений.

1. Рассматривается упругая среда, состоящая из N плоско-параллельных однородных и изотропных слоев

$$H_\nu < z < H_{\nu+1} = H_\nu + h_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, N), \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 05-01-00936.

ограниченная свободной поверхностью при $z = 0$ и полупространством при $z > H_N$. Слои среды характеризуются параметрами

$$h_\nu > 0, \quad \rho_\nu, \quad v_p^{(\nu)}, \quad v_s^{(\nu)}, \quad \mu_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

или модулями μ_ν, и относмительными скоростными параметрами

$$\gamma_\nu = \frac{v_0}{v_p^{(\nu)}}, \qquad \delta_\nu = \frac{v_0}{v_s^{(\nu)}}, \tag{2'}$$

где v_0 – минимальная из поперечных скоростей в слоях $v_s^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

Предполагается, что при $t < 0$ среда находилась в покое, а при $t = 0$ в произвольно-выбранной точке прикладывается сосредоточенное воздействие вида

$$\vec{F} = \delta(x)\delta(z - z_0)f(t)\vec{q} \tag{3}$$

в плоском случае волнового поля, и вида

$$\vec{F} = \frac{\delta(r)}{\pi r}\delta(z - z_0)f(t)\vec{q} \tag{4}$$

в пространственном случае. Здесь $\vec{q} = \vec{k}$ – орт оси z, $\delta(x)$ или $\delta(r)$ – символы функции Дирака, а $f(t)$ – произвольная гладная функция от времени.

В рассматриваемом классе сред решение задач для определения упругих волновых полей при воздействии источников (3) и (4) отличаются друг от друга лишь в деталях, в основном, лишь в выборе внешнего интеграла из повторных. Так в случае (3) внешним в представлении решений является интеграл Фурье по переменной x, а в случае (4) – интеграл Фурье–Бесселя по переменной r. Внутренние же интегралы Меллина по t оказываются тождественными [1, 2]. Поэтому изложение любых принципиальных вопросов теории можно производить на простейшем примере какой-либо из плоских задач, математическое решение которой производят обычно в потенциалах $\varphi_\nu = \varphi_\nu(x, z, t)$ и $\vec{\psi}_\nu = \psi_\nu(x, z, t)\vec{j}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

В случае плоской задачи для идеальной упругой среды потенциалы в ν-ом слое среды должны удовлетворять уравнениям движения

$$\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial z^2} = \frac{1}{(v_p^{(\nu)})}\ \frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z^2} = \frac{1}{(v_s^{(\nu)})}\ \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial t^2}. \tag{5}$$

На границах раздела слоев должны выполняться те или иные (линейные) граничные условия контакта, содержащие составляющие векторов смещений и напряжений

$$\vec{u}_\nu = q_\nu \vec{i} + w_\nu \vec{k}; \qquad \vec{t}_z^{(\nu)} = t_{zx}^{(\nu)} \vec{i} + t_{zz}^{(\nu)} \vec{k}, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&q_\nu = q(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial z},\\
&w_\nu = w(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x},\\
&t_{zx}^{(\nu)} = t_{zx}(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \mu_\nu \Big(2\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial z^2} \Big),\\
&t_{zz}^{(\nu)} = t_{zz}(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \lambda_\nu \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial x^2} + (\lambda_\nu + 2\mu_\nu) \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial z^2} + 2\mu_\nu \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial x \partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Наконец, в задачах на возбуждение волн воздействиями вида (3) или (4) (включаемых в момент $t = 0$) потенциалы φ_ν и $\vec{\psi}_\nu$ должны удовлетворять нулевым начальным условиям

$$\varphi_\nu(x, z, t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad \psi_\nu(x, z, t)\Big|_{t=0} = 0 \tag{8}$$

внутри каждого из слоев $\nu = 1, 2, \ldots, N$ среды.

Здесь остается заметить, что практику, обычно интересуют поля смещений, отвечающие воздействиям (3) и (4) с непрерывной и часто с низкочастотной функцией $f(t)$ от времени. Однако в некоторых случаях, например, при решении поставленной задачи наложением множества отраженно-преломленных кратных волн может представлять интерес рассмотрение задачи при воздействиях (3) и (4), в которых временная функция $f(t)$ заменена соответственно на функцию Дирака $\delta(t-\tau)$ или функцию Хевисайда $\varepsilon(t-\tau)$. В таких случаях после построения полей $\vec{u}_\nu(x, z, t-\tau)$ и $\vec{u}_\nu(r, z, t-\tau)$ (отвечающих указанным сингулярным воздействиям), переход к полям $\vec{U}_\nu$, отвечающих воздействиям с непрерывной функцией $f(t)$, следует производить по формулам

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{U}_\nu(x, z, t) = \int_0^\infty f(\tau) \vec{u}_\nu(x, z, t-\tau) d\tau\\
&\vec{U}_\nu(r, z, t) = \int_0^\infty f'(\tau) \vec{u}_\nu(r, z, t-\tau) d\tau, \quad f(0) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

типа Дюамеля

2. Обращаясь к общей формулировке задачи из п. 1, а также к изложению возможных подходов к ее решению, будем напоминать элементы применяемого аппарата решения задач такого типа. При этом ради определенности, будем считать, что контакты на границах раздела между слоями являются жесткими и воздействия над средой определяются условиями

$$t_{zx}(\varphi_1, \psi_1) = 0, \qquad t_{zz}(\varphi_1, \psi_1) = -\delta_\beta(x) f(t) \tag{$3'$}$$

при $t \geqslant 0$ и $z = H_1 = 0$, в правую часть которых входит произвольная функция от времени $f(t)$ и δ-образная функция от переменной x, допускающая удобное интегральное представление

$$\begin{gathered} \delta_\beta(x) \equiv \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x|}{\beta}\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos kx \Phi_0(k\beta) dk, \\ \Phi_0 = \frac{1}{1+k^2}, \quad \beta > 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Такая функция удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\beta \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{\Psi(x) \delta_\beta(x - x_0) dx = \Psi(x_0)$$

при любой непрерывной функции $\Psi(x)$. Поэтому для перехода в условиях ($3'$) к воздействию типа $\delta(x)f(t)$ достаточно решить задачу при воздействии ($3'$) в случае $\beta > 0$, а затем в окончательно построенном решении совершить предельный переход при $\beta \to 0$ под знаком интегралов.

Необходимо отметить, что при жестком контакте между слоями среды должны выполняться: 1) неоднородное условие ($3'$) на свободной границе $z = H_1 = 0$, где прикладывается воздействие (3) в случае $\vec{q} = \vec{k}$ и 2) $2(N-1)$ векторных однороднах условий вида

$$\vec{u}(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \vec{u}(\varphi_{\nu+1}, \psi_{\nu+1}), \qquad t_z(\varphi_\nu, \psi_\nu) = \vec{t}_z(\varphi_{\nu+1}, \psi_{\nu+1}) \tag{11}$$

при $t > 0$ на внутренних границах $z = H_\nu$ ($\nu = 2, 3, \dots, N$) раздела слоев среды, где H_ν определено в (1).

Таким образом, при учете изложенного, задача для N-слойной упругой среды (1)–(3) может быть сформулирована следующим образом. Определить потенциалы φ_ν, ψ_ν упругих волновых полей так, чтобы в каждом слое удовлетворялись уравнения движения (5), на границах раздела выполнялись условия контакта (11), а на свободной поверхности $z = H_1 = 0$ выполнялись бы условия ($3'$), определяющие внешнее воздействие над средой и, наконец, во всех внутренних точках среда при $t = 0$ должны выполняться нулевые начальные условия (8). Така задача корректна и ее решение единственно.

Эффективные же решения подобных задач удается строить в первичной форме "(s, k)" метода контурных интегралов повторными интегралами Меллина (по переменной t) и Фурье (по переменной x) [3].

3. При указанном подходе потенциалы полей смещений в слоях среды представляются в виде повторных интегралов, например, вида

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu \\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(z,t,k)\cos kx \\ \Psi_\nu(z,t,k)\sin kx\end{matrix}\right\}\Phi_0(\beta k)dk, \tag{12}$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu \\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} + \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} \\ \widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} + \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}\,ds, \tag{13}$$

или (в символическом виде) в форме

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu \\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = L\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_\nu \\ \tilde{\psi}_\nu\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi_0(\beta k)}{2\pi i}dk \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left.\begin{matrix}\tilde{\varphi}_\nu \\ \tilde{\psi}_\nu\end{matrix}\right\} F(s)e^{st}\,ds, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\nu &= \cos kx\left[\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} + \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}\right] \\ \tilde{\psi}_\nu &= \sin kx\left[\widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} + \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

где выражения

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt, \quad (\operatorname{Re} s = \sigma > 0);$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds \tag{15'}$$

отвечают функции $f(t)$ формы импульса в источнике, а радикалы $\tilde{\alpha}_\nu$, $\tilde{\beta}_\nu$ (и встречающаяся далее величина $\tilde{g}_\nu$)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_\nu &= \tilde{\alpha}_\nu(k,s) = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{(v_p^{(\nu)})^2}}, \\ \tilde{\beta}_\nu &= \tilde{\beta}_\nu(k,s) = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{(v_s^{(\nu)})^2}}, \\ \tilde{g}_\nu &= \tilde{g}(k,s) = 2k^2 + \frac{s^2}{(v_s^{(\nu)})^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

определены на комплексной плоскости (s) с разрезами, проведенными от точек ветвления радикалов

$$s = \pm ikv_p^{(\nu)} \quad \text{и} \quad s = \pm ikv_s^{(\nu)} \tag{16'}$$

на бесконечность вдоль прямых, параллельных отрицательной части $s < 0$ вещественной оси. На основном листе плоскости (s) ветви радикалов фиксируются условиями

$$\arg \tilde{\alpha}_\nu = \arg \tilde{\beta}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad s = 0.$$

Искомыми величинами в формулах (12)–(15) являются коэффициенты $\widetilde{A}_\nu^\pm$ и $\widetilde{B}_\nu^\pm$, определяющие значения потенциалов поля смещений в ν-ом слое среды. При этом коэффициенты при экспонентах

$$\exp\Big[\pm(z - H_\nu)\widetilde{\alpha}_\nu\Big] \quad \text{и} \quad \exp\Big[\pm(z - H_\nu)\widetilde{\beta}_\nu\Big]$$

отвечают соответственно p и s волнам, распространяющимся в ν-ом слое в сторону возрастающих значений переменной z (коэффициенты при экспонентах с индексом $(-)$ и в обратную сторону (индекс $(+)$). Такое заключение является следствием известного свойства интегралов Меллина J, содержащих радикалы $\widetilde{\alpha}_\nu$ и $\widetilde{\beta}_\nu$ из (13), обращаться тождественно в нуль

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\exp\left[st - \sum_\nu h_\nu(n_\nu\widetilde{\alpha}_\nu + m_\nu\widetilde{\beta}_\nu)\right]ds = 0 \qquad (17)$$

при выполнении одного из (эквивалентных) неравенств

$$\left.\begin{aligned} t &< \sum_\nu\left(n_\nu\frac{h_\nu}{v_p^{(\nu)}} + m_\nu\frac{h_\nu}{v_s^{(\nu)}}\right) \\ v_0 t &< \sum_\nu(n_\nu h_\nu\gamma_\nu + m_\nu h_\nu\delta_\nu) \end{aligned}\right., \qquad (17')$$

где n_ν и m_ν (целые) положительные числа, а γ_ν и δ_ν – параметры из $(2')$. При этом предполагается, что при $s \to 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ регулярная функция $F(s)$ стремится к нулю “достаточно быстро” (например, как $|s|^{-\alpha}$ $\alpha > 0$).

При функциональных коэффициентах $\widetilde{A}_\nu^\pm$ и $\widetilde{B}_\nu^\pm$, убывающих при $s \to \infty$ достаточно быстро, удовлетворение всем условиям задачи из п. 2 сводится к удовлетворению подобным же условиям подынтегральными функциями из (12)–(14). Это сразу же позволяет убедиться в удовлетворении уравнениям движения, а также приводит к подобным же представлениям для составляющих смещений и напряжений в слоях среды

$$\left.\begin{aligned} q_\nu(\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\psi}_\nu) &= \sin kx\Big[-k\Big(\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} + \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}\Big) + \\ &\quad + \widetilde{\beta}_\nu\Big(\widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} - \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\Big)\Big] \\ w_\nu(\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\psi}_\nu) &= \cos kx\Big[-\widetilde{\alpha}_\nu\Big(\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} - \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}\Big) + \\ &\quad + k\Big(\widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} + \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\Big)\Big] \end{aligned}\right\}, \qquad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} t_{zx}^{(\nu)}(\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\psi}_\nu) &= \mu_\nu \sin kx\Big[2k\widetilde{\varphi}_\nu\Big(\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} - \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}\Big) \\ &\quad - \widetilde{g}_\nu\Big(\widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} + \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\Big)\Big] \\ t_{zz}^{(\nu)}(\widetilde{\varphi}_\nu, \widetilde{\psi}_\nu) &= \mu_\nu \cos kx\Big[\widetilde{g}_\nu\Big(\widetilde{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} + \widetilde{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}\Big) \\ &\quad - 2k\widetilde{\beta}_\nu\Big(\widetilde{B}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu} - \widetilde{B}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\beta}_\nu}\Big)\Big] \end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

При помощи таких выражений выписываются подынтегральные функции

$$q(\widetilde{\varphi}_\nu,\widetilde{\psi}_\nu)=q(\widetilde{\varphi}_{\nu+1},\widetilde{\psi}_{\nu+1}),\qquad w(\widetilde{\varphi}_\nu,\widetilde{\psi}_\nu)=w(\widetilde{\varphi}_{\nu+1},\widetilde{\psi}_{\nu+1})$$

интегральных выражений вида (11) при ($\nu=1,2,\ldots,N-1$), учитывающих (в интегральной форме) условия контакта на внутренних границах $z=H_{\nu+1}$ раздела слоев среды. В подынтегральных функциях они сводятся к системе равенств

$$\left.\begin{aligned}
&-k\Big(\widetilde{A}^-_\nu e^{-a_\nu}+\widetilde{A}^+_\nu e^{a_\nu}\Big)+\widetilde{\beta}_\nu\Big(\widetilde{B}^-_\nu e^{-b_\nu}-\widetilde{B}^+_\nu e^{b_\nu}\Big)=\\
&=-k\Big(\widetilde{A}^-_{\nu+1}+\widetilde{A}^+_{\nu+1}\Big)+\widetilde{\beta}_{\nu+1}\Big(\widetilde{B}^-_{\nu+1}+\widetilde{B}^+_{\nu+1}\Big)\\
&-\widetilde{\alpha}_\nu\Big(\widetilde{A}^-_\nu e^{a_\nu}-\widetilde{A}^+_\nu e^{a_\nu}\Big)+k\Big(\widetilde{B}^-_\nu e^{-b_\nu}+\widetilde{B}^+_\nu e^{b_\nu}\Big)=\\
&=-\widetilde{\varphi}_{\nu+1}\Big(\widetilde{A}^-_{\nu+1}-\widetilde{A}^+_{\nu+1}\Big)+k\Big(\widetilde{B}^-_{\nu+1}+\widetilde{B}^+_{\nu+1}\Big)\\
&\mu_\nu\Big[2k\widetilde{\alpha}_\nu\Big(\widetilde{A}^-_\nu e^{-a_\nu}-\widetilde{A}^+_\nu e^{a_\nu}\Big)-\widetilde{g}_\nu\Big(\widetilde{B}^-_\nu e^{-b_\nu}+\widetilde{B}^+_\nu e^{b_\nu}\Big)\Big]\\
&=\mu_{\nu+1}\Big[2k\widetilde{\alpha}_{\nu+1}\Big(\widetilde{A}^-_{\nu+1}-\widetilde{A}^+_{\nu+1}\Big)-\widetilde{g}_{\nu+1}\Big(\widetilde{B}^-_{\nu+1}+\widetilde{B}^+_{\nu+1}\Big)\Big]\\
&\mu_\nu\Big[\widetilde{g}_\nu\Big(\widetilde{A}^-_\nu e^{-a_\nu}+\widetilde{A}^+_\nu e^{a_\nu}\Big)-2k\widetilde{\beta}_\nu\Big(\widetilde{B}^-_\nu e^{-b_\nu}-\widetilde{B}^+_\nu e^{b_\nu}\Big)\Big]\\
&=\mu_{\nu+1}\Big[\widetilde{g}_{\nu+1}\Big(\widetilde{A}^-_{\nu+1}+\widetilde{A}^+_{\nu+1}\Big)-2k\widetilde{\beta}_{\nu+1}\Big(\widetilde{B}^-_{\nu+1}+\widetilde{B}^+_{\nu+1}\Big)\Big]
\end{aligned}\right\},\qquad(21)$$

где, ради упрощения записи, положено

$$h_\nu\widetilde{\alpha}_\nu\equiv kh_\nu\widehat{\alpha}_\nu(\eta)=a_\nu,\qquad h_\nu\widetilde{\beta}_\nu\equiv kh_\nu\widehat{\beta}_\nu(\eta)=b_\nu\qquad(22)$$

при обозначениях $\widetilde{\alpha}_\nu$ и $\widetilde{\beta}_\nu$ из (16) и значениях $\widehat{\alpha}_\nu(\eta)$ и $\widehat{\beta}_\nu(\eta)$ из (25′) в форме метода контурных интегралов. При этом для экономии места при дальнейших матричных записях системы уравнений движения, используются следующие сокращенные обозначения

$$\exp(\pm kh_\nu\widehat{\alpha}_\nu)\equiv e^{\pm a_\nu},\qquad \exp(\pm kh_\nu\widehat{\beta}_\nu)\equiv e^{\pm b_\nu}\qquad(22)$$

или эквивалентные им обозначения

$$e^{\pm a_\nu}\equiv\exp(\pm k_\nu\alpha_\nu),\qquad e^{\pm b_\nu}\equiv\exp(\pm k_\nu\beta_\nu),$$

где положено

$$k_\nu=h_\nu\frac{\omega}{v_0},\quad \alpha_\nu(\zeta)=\sqrt{\zeta^2-\gamma_\nu^2},\quad \beta_\nu(\zeta)=\sqrt{\zeta^2-\delta_\nu^2},\qquad(23)$$

а описание волновых полей производится в переменных ω и ζ из (26) метода Лэмба. Заметим, что в дальнейшем существенными окажутся следующие предельные соотношения

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(kh_\nu\widehat{\alpha}_\nu(\eta)) = kh_\nu\gamma_\nu \operatorname{Re}\eta \to \infty, \quad \operatorname{Re} a_\nu \to \infty, \quad e^{-a_\nu} \to 0; \\ &\operatorname{Re}(kh_\nu\widehat{\beta}_\nu(\eta)) = kh_\nu\delta_\nu \operatorname{Re}\delta \to \infty, \quad \operatorname{Re} b_\nu \to \infty, \quad e^{-b_\nu} \to 0, \end{aligned} \tag{23$'$}$$

справедливые при $\operatorname{Re}\eta \to \infty$ на основном листе плоскости (η).

4. В связи с изложенным следует еще отметить следующее: во-первых, учет условий $(3')$ на границе $z = H_1 = 0$, где прилагается внешнее воздействие над средой, приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} &2\widetilde{\alpha}_1 k\widetilde{A}_1^- - \widetilde{g}_1\widetilde{B}_1^- - 2\widetilde{\alpha}_1 k\widetilde{A}_1^+ - \widetilde{g}_1\widetilde{B}_1^+ = 0, \\ &\widetilde{g}_1\widetilde{A}_1^- - 2\widetilde{\beta}_1 k\widetilde{B}_1^- + \widetilde{g}_1\widetilde{A}_1^+ + 2\widetilde{\beta}_1 k\widetilde{B}_1^+ = -\frac{1}{\mu_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Во-вторых, точки ветвления радикалов $\widetilde{\alpha}_\nu$ и $\widetilde{\beta}_\nu$ при $\nu = 1, 2, \ldots, N-1)$, отвечающие внутренним слоям среды, не являются точками ветвления выражений из (15). Действительно, рассмотрим какой-либо “внутренний радикал”, например, $\widetilde{\alpha}_\nu$. При обходе любой одной его точки ветвления $s = \pm iv_p^\nu$ радикал изменяет знак, вследствие чего меняются ролями слагаемые суммы

$$\widehat{A}_\nu^- e^{-(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu} + \widehat{A}_\nu^+ e^{(z-H_\nu)\tilde{\alpha}_\nu}$$

из (13) и (15) (но не вся сумма!). Одноваременно с этим меняются ролями и слагаемые сумм вида

$$\widetilde{A}_\nu^- + \widetilde{A}_\nu^+, \quad \widetilde{A}_\nu^- e^{-a_\nu} + \widetilde{A}_\nu^+ e^{a_\nu}, \quad \widetilde{\alpha}_\nu\big(\widetilde{A}_\nu^- e^{-a_\nu} - \widetilde{A}_\nu^+ e^{a_\nu}\big)$$

из граничных условий (20) и (21), однако так, что сами суммы остаются неизменными. А отсюда следует, что фактически неизменными остаются все соотношения, содержащие амплитудные множители $A_\nu^\pm$ и $\widetilde{B}_\nu^\pm$.

И, наконец, в-третьих, из соотношений (20)–(24) непосредственно следует свойство четности относительно аргумента k при фиксированном аргументе s амплитудных множителей $\widetilde{A}_\nu^\pm \equiv \widetilde{A}_\nu^\pm(k, s)$ и свойство нечетности $\widetilde{B}_\nu^\pm \equiv \widetilde{B}_\nu^\pm(k, s)$. Эти свойства нам понадобятся при переходе к представлению полей в форме метода Лэмба. Однако сначала сделаем ряд замечаний по поводу решений задачи из п. 2, представленных в форме (12) при подчинении амплитудных множиьелей $\widetilde{A}_\nu^\pm$ и $\widetilde{B}_\nu^\pm$ из (12) граничным соотношениям (20)–(23) нулевым начальным данным (8), а также условию

$$\widetilde{A}_N^+ = \widetilde{B}_\nu^+ = 0,$$

выражающему отсутствие волн, приходящих к слоистой среде из бесконечности ($z = \infty$).

5. Оперировать с интегральными представлениями из (13), в которых переменные k и s разделены, не удобно. Более эффективные представление получаются при переходе к новым переменным интегрирования, или

1) по формулам метода контурных интегралов, когда полагают

$$k \geqslant 0, \quad s = kv_0\eta, \quad \widetilde{\alpha}_\nu = \widetilde{\alpha}_\nu(k,s) = k\widehat{\alpha}_\nu(\eta),$$
$$\widetilde{\beta}_\nu = \widetilde{\beta}_\nu(k,s) = k\widehat{\beta}_\nu(\eta), \quad \widehat{\alpha}_\nu = \sqrt{1+\gamma_\gamma^2\eta^2}, \quad \widehat{\beta}_\nu = \sqrt{1+\delta_\gamma^2\eta^2}, \tag{25'}$$

причем разрезы от точек ветвления $\eta = \pm\frac{i}{\gamma_\nu}$, $\eta = \pm\frac{i}{\delta_\nu}$ проводят параллельно отрицательной части вещественной оси, а на основаном листе плоскости (η) ветви радикалов определяются условиями

$$\arg\widehat{\alpha}_\nu(\eta) = \arg\widehat{\beta}_\nu(\eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0.$$

Если же желательно придать большую комплексную “свободу изменения” переменной k, то вместо нее

2) полагают (где сначаал $\omega > 0$)

$$k = \frac{\omega}{v_0}\zeta, \quad \text{где} \quad s = i\omega. \tag{26}$$

При этом для радикалов получаются следующие выражения

$$\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{(v_p^\nu)^2}} = \frac{\omega}{v_0}\alpha_\nu(\zeta), \qquad \alpha_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2},$$
$$\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{(v_s^\nu)^2}} = \frac{\omega}{v_0}\beta_\nu(\zeta), \qquad \beta_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2},$$

а разрезы на плоскости (ζ) проводятся от точек ветвления $\zeta = \pm\gamma_\nu$ и $\zeta = \pm\delta_\nu$ на бесконечность вдоль вещественной оси без пересечения мнимой оси. Ветвь же радикалов на основном листе плоскости (ζ) определяется условиями

$$\arg \alpha_\nu(\zeta) = \arg \beta_\nu(\zeta) = \frac{\pi}{2}, \quad (\zeta = 0). \tag{26$'$}$$

Что же касается четности или нечетности относительно переменной k, то в методе Лэмба они сохраняются относительно переменной ζ.

В случае метода контурных интегралов соотношения метода вытекают из вышеизложенного лишь заменой в формулах (13), (15), (17)–(19), (21)–(23) величин $\widetilde{\alpha}_\nu$, $\widetilde{\beta}_\nu$, $\widetilde{g}_\nu$ из (15) на величины

$$\widehat{\alpha}_\nu = \sqrt{1+\gamma_\nu^2\eta^2}, \qquad \widehat{\beta}_\nu = \sqrt{1+\delta_\nu^2\eta^2}, \qquad \widehat{g}_\nu = 2+\delta_\nu^2\eta^2 \tag{27}$$

в соответствии со схемой (при $k > 0$)

$$\widetilde{\alpha}_\nu = k\hat{\alpha}_\nu, \qquad \widetilde{\beta}_\nu = k\hat{\beta}_\nu, \qquad \widehat{g}_\nu = 2k^2 + \frac{s^2}{(v_p^{(\nu)})^2} = k^2\hat{g}_\nu \tag{27$'$}$$

с последующим сокращением всех равенств на k^2.

Таким образом, переход к новым переменным настолько прост, что он фактически не требует переписывания предыдущих формул. Получающиеся представления решения оказываются наиболее удобными при изучении неинтерференционных волновых полей, возбуждаемых подходяще-выбранными сингулярными воздействиями (по пространственной и временной переменным) вида

$$\vec{F} = \delta(x)\delta(z-z_0)\delta(t)\vec{q} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \frac{\delta(r)}{\pi r}\delta(z-z_0)\varepsilon(t)\vec{q}.$$

Применению метода контурный интегралов в интерференционных задачах (типа задач из п. 2) мешают два обстоятельства.

Во-первых, непрямой физический смысл корней $\eta = \eta_0(k)$ дисперсионного уравнения задачи, из которых важнейший частотный параметр ω волнового поля получается лишь в форме произведения

$$\omega_n = k \operatorname{Im} \eta_n(k). \tag{28}$$

Во-вторых, неудобное расположение на комплексной плоскости (η) корней $\eta = \eta_n(k)$ дисперсионных уравнений задач, рассматриваемого типа затрудняет, как численную оценку корней, так и получение разложение полей в интегралы типа Фурье по частоте ω, имеющие фундаментальные значения для всех физических исследований.

В проблеме обоснования правильности представления решения задачи из п. 2 в форме повторных интегралов из (12), (13) осталось фактически лишь доказать, что выражения φ_ν и ψ_ν из (14) допускают двукратное дифференцирование под знаками интегрирования по переменным k и s. При наличии под знаками интегралов фактора "улучшения сходимости" $F_0(k\beta)$ из (10), а также достаточно гладкой функции $f(t)$ из (15$'$), этот вопрос можно было бы считать почти очевидным. Однако "для порядка" мы все же остановимся в п. 7 на доказательстве возможности двукратного дифференцирования под знаками интегрирования в (12) (что и снимет все стоящие проблемы). Помимо этого остановимся и на прямом доказательстве удовлетворении решения нулевым начальным данным.

6. Сначала покажем, что из соотношения (21), выражающего граничные условия задачи (из которых должны определяться амплитудные множители $\widehat{A}^{\pm}_{\nu}$ и $\widehat{B}^{\pm}_{\nu}$), вытекает удовлетворение полей из (12) нулевым начальным данным (8). При этом будем учитывать, во-первых, что первичными представлениями упомянутых граничных условий следует считать равенство интегралов Меллина вида

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma_\nu(\widetilde{A}^{\pm}_{\nu}, \widetilde{B}^{\pm}_{\nu}) e^{st} ds = \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma_\nu(\widetilde{A}^{\pm}_{\nu+1}, \widetilde{B}^{\pm}_{\nu+1}) e^{st} ds,$$

подынтегральные функции которых как раз и образуют правые и левые части условий (21). И, во-вторых, будем пользоваться свойствами интегралов Меллина, выраженными соотношениями (17) и (17$'$).

Полагая в соотношениях (21)–(22$'$)

$$\widetilde{A}^{+}_{\nu} = \widetilde{A}_{\nu} e^{-a_\nu}, \qquad \widetilde{B}^{+}_{\nu} = \widetilde{B}_{\nu} e^{-b_\nu}, \tag{29}$$

будем рассматривать упомянутые соотношения шагами при возрастающих значениях $\nu \geqslant 1$. При текущем значении $\nu = \nu_0$ мы будем делать предположения о поведении величин $\widetilde{A}_{\nu_0}$ и $\widetilde{B}_{\nu_0}$ при $s \to \infty$, а на следующем шаге $\nu = \nu_0 + 1$ рассуждений будем оправдывать сделанное предположение, и будем делать подобное же предположение относительно следующих величин $\widetilde{A}_{\nu_0+1}$ и $\widetilde{B}_{\nu_0+1}$.

Если воспользоваться формулами перехода (29) от коэффициентов $\widetilde{A}_\nu^+$ и $\widetilde{B}_\nu^+$ к вспомогательным коэффициентам $\widetilde{A}_\nu$ и $\widetilde{B}_\nu$ (имеющим на бесконечности ($s \to \infty$) такой же порядок малости, как и коэффициенты $\widetilde{A}_\nu^-$ и $\widetilde{B}_\nu^-$, то на первом шаге рассуждений ($\nu = 1$) первое соотноошение из (24) фактически представит равенство

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(2\widetilde{\alpha}_1 k\widetilde{A}_1^- - \widetilde{g}_1\widetilde{B}_1^- - 2\widetilde{\alpha}_1 k\widetilde{A}_1 e^{-a_1} - \widetilde{g}_1\widetilde{B}_1 e^{-b_1}\Big) e^{st} ds = 0. \qquad (30)$$

Учитывая обозначение (22) и предполагая, что величины $\widetilde{A}_1^-$, $\widetilde{B}_1^-$, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$ достаточно быстро стремятся к нулю при $s \to 0$, при выполнении неравенства

$$0 < v_0 t < \gamma_1 h_1 \qquad (30')$$

третье и четвертое слагаемые в (30) дадут нуль (в силу соотношений (17), (17′)), а первые два слагаемые приведут к равенству

$$2\widetilde{\alpha}_1 k\widetilde{A}_1^- - \widetilde{g}_1\widetilde{B}_1^- = 0.$$

Совершенно так же второе соотношение из (24) приведет к подобному же равенству

$$\widetilde{g}_1\widetilde{A}_1^- - 2\widetilde{\beta}_1 k\widetilde{B}_1^- = -\frac{1}{\mu_1},$$

из которого следует (как и в случае полупространства $z > 0$)

$$\widetilde{A}_1^- = -\frac{\widetilde{g}_1}{\mu_1\widetilde{R}}, \qquad \widetilde{B}_1^- = -\frac{-2\widetilde{\alpha}_1 k}{\mu_1\widetilde{R}}, \qquad (\widetilde{R} = \widetilde{g}_1^2 - 4k^2\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\beta}_1). \qquad (31)$$

На втором шаге нужно рассматривать соотношение (21) при $\nu = 1$, допускающие при учете обобзначений (29) матричную перезапись в виде

$$\begin{bmatrix} k & -\widetilde{\beta}_1 & -k & \widetilde{\beta}_2 \\ \widetilde{\alpha}_1 & -k & -\widetilde{\alpha}_2 & k \\ -2\mu_1 k\widetilde{\alpha}_1 & \mu_1\widetilde{g}_1 & 2\mu_2 k\widetilde{\alpha}_2 & -\mu_2\widetilde{g}_2 \\ -\mu_1\widetilde{g}_1 & 2\mu_1 k\widetilde{\beta}_1 & \mu_2\widetilde{g}_2 & -2\mu_2 k\widetilde{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}_1 \\ \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{A}_2 \\ \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -k & -\widetilde{\beta}_1 & k & \widetilde{\beta}_2 \\ \widetilde{\alpha}_1 & k & -\widetilde{\alpha}_2 & -k \\ -2\mu_1 k\widetilde{\alpha}_1 & -\mu_1\widetilde{g}_1 & 2\mu_2 k\widetilde{\alpha}_2 & \mu_2\widetilde{g}_2 \\ \mu_1\widetilde{g}_1 & 2\mu_1 k\widetilde{\beta}_1 & \mu_2\widetilde{g}_2 & -2\mu_2 k\widetilde{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}_1^- e^{-a_1} \\ \widetilde{B}_1^- e^{-b_1} \\ \widetilde{A}_2^- e^{-a_2} \\ \widetilde{B}_2^- e^{-b_2} \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Если учесть, что равенство (32) фактически должно стоять под знаком интеграла Меллина вида (30), а также, если рассматривать моменты времени, удовлетворяющие более сильному неравенству

$$0 < v_0 t < \mathrm{Inf}(h_1\gamma_1, h_2\gamma_2)$$

и полагать величины $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{B}_2$ достаточно малывми при $s \to \infty$, то в соответствии с (17) и (17′), правую часть равенства (32) можно заменить нулем. Но это приводит к однородной алгебраической системе уравнений (для левой части соотношения (32)) относительно величин $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{A}_2^-$ и $\widetilde{B}_2^-$, из которых следует

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{B}_1 = \widetilde{A}_2^- = \widetilde{B}_2^- = 0,$$

что оправдывает, в частности, и сделанное выше предположение о малости величин $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$.

Учет условий контакта на границе $z = H_3$ (на основании соотношений (21) при $\nu = 2$) сводится к соотношениям (32), если индексы у всех входящих в них величин увеличить на единицу. Из таких невыписанных соотношений совершенно так же, как и из (32) следует, что при значениях t, удовлетворяющих неравенству

$$0 < v_0 t < \mathrm{Inf}(h_1\gamma_1, h_2\gamma_2, h_3\gamma_3),$$

и в предположении малости значений $\widetilde{A}_3$ и $\widetilde{B}_3$ при $s \to \infty$, правую часть невыписанного равенства можно заменить нулем. Но тогда из получившегося однородного уравнения для величин $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{A}_3^-$ и $\widetilde{B}_3^-$ следует

$$\widetilde{A}_2 = \widetilde{B}_2 = \widetilde{A}_3^- = \widetilde{B}_3^- = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Подобный процесс рассуждений продолжается до последней границы $z = H_N$ среды, в условиях контакта, на которой величины величины $\widetilde{A}_N^+ = \widetilde{A}_N e^{-a_N}$ $\widetilde{B}_N^+ = \widetilde{B}_N e^{-b_N}$ (равные нулю) отсутствуют, вследствие чего делать предположение об их равенстве нулю не приходится.

Таким образом, из приведенного рассмотрения вытекает, что при $t = 0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, выполняются все выполненные равенства

$$\widetilde{A}_1^\pm = \widetilde{B}_1^\pm = \widetilde{A}_\nu^\pm = \widetilde{B}_\nu^\pm = 0, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, N).$$

Из них, равно как и из равенств (31), нулевые начальные условия (8) вытекают с очевидностью.

7. Чтобы завершить обсуждение задачи из пп. 1 и 2 на распространение низкочастотных волн в N-слойной упругой среде, остается рассмотреть амплитудные множители $\widetilde{A}_\nu^{\pm}$ и $\widetilde{B}_\nu^{\pm}$ из представлений (12)–(15) потенциалов волнового поля. Такая задача требует выписывания в матричном виде на основании соотношений (21) полной системы алгебраических уравнений для $(4N-2)$ неизвестных коэффициентов $\widetilde{A}_\nu^{\pm}$ и $\widetilde{B}_\nu^{\pm}$ (или лучше, для коэффициентов $\widetilde{A}_\nu^{-}$, $\widetilde{B}_\nu^{-}$, $\widetilde{A}_\nu$ и $\widetilde{B}_\nu$, в которых уже совершен переход по формулам (29) к вспомогательным коэффициентам $\widetilde{A}_\nu$ и $\widetilde{B}_\nu$), расположенным, например, в порядке следования элементов матрицы стобца из (33), выписанной здесь, ради удобства, в виде транспонированной матрицы строки

$$\chi = \left(\widetilde{A}_1^-, \widetilde{B}_1^-, \widetilde{A}_1, \widetilde{B}_1, \widetilde{A}_2^-, \widetilde{B}_2^-, \widetilde{A}_2, \widetilde{B}_2, \ldots, \widetilde{A}_{4N-2}^-, \widetilde{B}_{4N-2}^-\right)^+. \qquad (33)$$

Общая структура квадратной матрицы L полной системы уравнений представлена на рис. 1.

$$\begin{bmatrix}
x & x & -a_1 & -b_1 & & & & & & & & & & \\
x & x & -a_1 & -b_1 & & & & & & & & & & \\
-a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_2 & -b_2 & & & & & & \\
-a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_2 & -b_2 & & & & & & \\
-a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_2 & -b_2 & & & & & & \\
-a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_2 & -b_2 & & & & & & \\
 & & & & -a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_3 & -b_3 & & \\
 & & & & -a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_3 & -b_3 & & \\
 & & & & -a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_3 & -b_3 & & \\
 & & & & -a_1 & -b_1 & x & x & x & x & -a_3 & -b_3 & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & & & -a_{N-1} & -b_{N-1} & x & x & x & x \\
 & & & & & & & & -a_{N-1} & -b_{N-1} & x & x & x & x \\
 & & & & & & & & -a_{N-1} & -b_{N-1} & x & x & x & x \\
 & & & & & & & & -a_{N-1} & -b_{N-1} & x & x & x & x
\end{bmatrix}$$

Рис. 1

Матрица L "почти" квазидиагональна. В верхнем левом ее углу расположена матрица 2×4), представленная на рис. 2а.

$$\begin{bmatrix}
2k\widetilde{\alpha}_1 & -\widetilde{g}_1 & -2k\widetilde{\alpha}_1 e^{-a_1} & -\widetilde{g}_1 e^{-b_1} \\
\widetilde{g}_1 & -2k\widetilde{\beta}_1 & \widetilde{g}_1 e^{-a_1} & 2k\widetilde{\beta}_1 e^{-b_1}
\end{bmatrix}$$

Рис. 2а

Она состоит из двух матриц (2×2) правой и левой, причем элементы правой матрицы содержат экспоненциальные множители $\exp(-a_1)$ и $\exp(-b_1)$, а элементы левой матрицы – не содержат.

Снизу к этой матрице примыкает матрица $(4 \times 8; \nu = 1)$, приведенная на рис. 2b в общем виде. Эта матрица состоит из центральной части, т.е. из центарльной матрицы (4×4), элементы которой не содержат экспоненциальных множителей $\exp(-a_1)$ и $\exp(-b_1)$, а также из матриц $(4 \times 2; \nu + 1)$ и $(4 \times 2; \nu + 2)$ бокового окаймления. При этом матрица $(4 \times 4; \nu = 1)$ центральной части лежит строго на диагонали матрицы L.
К матрице $(4 \times 8; \nu = 1)$ на рис. 1 примыкает снизу (со сдвигом на 4 элемента вправо) аналогичная же матрица $(4 \times 8; \nu = 2)$, центральная часть которой $(4 \times 4; \nu = 2)$ лежит строго на диагонали матрицы L. К матрице $(4 \times 8; \nu = 2)$ на рис. 1 примыкает снизу (со сдвигом на 4 элемента вправо) аналогичная же матрика $(4 \times 8; \nu = 3)$ и т.д. На последнем шаге описания структуры матрицы L в правый нижний ее угол строго попадает центральная часть $(4 \times 4; \nu = N - 1)$ матрицы $(4 \times 8; \nu = N - 1)$, правое боковое окаймление которой (с экспонентами $\exp(-a_N)$ и $\exp(-b_N)$ выходит за пределы таблицы матрицы L.

$$\begin{bmatrix} ke^{-a_1} & -\tilde{\beta}_1 e^{-b_1} & k & \tilde{\beta}_1 & -k & \tilde{\beta}_2 & -ke^{-a_2} & -\tilde{\beta}_2 e^{-b_2} \\ -\tilde{\alpha}_1 e^{-a_1} & ke^{-b_1} & \tilde{\alpha}_1 & k & \tilde{\alpha}_2 & -k & -\tilde{\alpha}_2 e^{-a_2} & -ke^{-b_2} \\ 2k\mu_1\tilde{\alpha}_1 e^{-a_1} & -\mu_1\tilde{g}_1 e^{-b_1} & -2k\mu_1\tilde{\alpha}_1 & -\mu_1\tilde{g}_1 & -2k\mu_2\tilde{\alpha}_2 & \mu_2\tilde{g}_2 & 2k\mu_2\tilde{\alpha}_2 e^{-a_2} & \mu_2\tilde{g}_2 e^{-b_2} \\ \mu_1\tilde{g}_1 e^{-a_1} & -2k\mu_1\tilde{\beta}_1 e^{-b_1} & \mu_1\tilde{g}_1 & 2k\mu_1\tilde{\beta}_1 & -\mu_2\tilde{g}_2 & 2k\mu_2\beta_2 & -\mu_2\tilde{g}_2 e^{-a_2} & -2k\mu_2\beta_2 e^{-b_2} \end{bmatrix}$$

Рис. 2b

Таким образом, строго на диагонали матрицы L располагаются вспомогательные центральные матрицы (2×2), $(4 \times 4; \nu = 1)$, $(4 \times 4; \nu = 2), \ldots, (4 \times 4; \nu = N - 1)$ из рис. 1 и 2, не содержащие экспоненциальных множителей. Последние же входят только в правые и левые окаймления матриц, стоящих на диагонали.

После описания структуры матрицы L, определяющей систему уравнений

$$L \times \chi = P \tag{34}$$

для коэффициентов из (33), в которой матрица столбец P имеет вид

$$P = (0, p, 0, 0, \ldots, 0)^{+}, \qquad p = -\frac{1}{\mu_1}, \tag{34'}$$

следует сделать несколько замечаний по поводу решения такой системы.

На основании теоремы Крамера решение системы (34) может быть представлено отношением определителей

$$\widetilde{A}_\nu^\pm = \frac{\Delta_{A_\nu}}{\Delta_0}, \qquad \widetilde{B}_\nu^\pm = \frac{\Delta_{B_\nu}}{\Delta_0},$$

где $\Delta_0(s,k)$ – детерминант матрицы L из (34), определяющий левую часть дисперсионного уравнения

$$\Delta_0(s,k) = 0 \tag{36}$$

задачи из п. 2. В детерминантах из числителей отношений из (35) один из столбцов, отвечающих тому элементу матрицы столбца из (33), для которого выписывается отношение (35), заменен матрицей столбцом из (34′). В результате, в определителях из числителей выражений (35) на один столбец, содержащий величины $\widetilde{\alpha}_\nu$, β_ν и $\widetilde{g}_\nu$ с соответствующими индексами ν, становиться меньше. Это и приводит в конце концов к требуемой оценке вида $O(\eta^2)$ для порядка убывания коэффициентов $\widetilde{A}_\nu^-$, $\widetilde{B}_\nu^-$, $\widetilde{A}_\nu$ и $\widetilde{B}_\nu$ при $\eta \to \infty$. Заметим, что при таких оценках следует учитывать экспоненциальную малось величин типа $\exp(-a_\nu)$ и $\exp(-b_\nu)$, позволяющую элементы (матрицы L), содержащие экспоненты, заменять нулями при $\operatorname{Re}\eta \to \infty$. Это предельно упрощает все оценки, так как матрица L становится строго квазидиагональной.

Что же касается возможности представления решения задачи из п. 2 (записанного в форме повторных интегралов (12)–(15) наложением множества кратных волн), то по этому поводу следует отметить следующее.

Если учесть обычное определение понятия "определитель квадратной матрицы" и воспользоваться представлением матрицы L из рис. 1, то нетрудно заметить, что: 1) определитель $\Delta_0(s,k)$ матрицы L имеет слагаемые, не содержащие множителей $\exp(-a_\nu)$ и $\exp(-b_\nu)$ (отвечающие центральной – строго квазидиагональной – ее части). 2) Он имеет слагаемые, содержащие по два таких множителя с фиксированным индексом ν_0 или с каждым из таких индексов $\nu = 1, 2, \ldots, N-1$. И, наконец, 3) определитель имеет слагаемые, содержащие по 4 таких множителя с каждым значением ν. Поэтому $\Delta_0(s,k)$ допускает представление вида

$$\begin{gathered} \Delta_0(s,k) = D_0(s,k)[1 - Q(s,k)], \qquad (D_0(s,k) \neq 0), \\ Q(s,k) = \frac{q}{D_0(s,k)}\Omega(s,k), \end{gathered} \tag{37}$$

где $\Omega(s,k)$ обозначает сумму всех слагаемых определителя $\Delta_0(s,k)$, содержащих не менее двух экспоненциальных множителей $\exp(-a_{\nu_0})$ и $\exp(-b_{\nu_0})$. А отличие выражения $D_0(s,k)$ от нуля есть следствие прямого вычисления D_0 как определителя квазидиагональной части матрицы L. Наконец, из конструкции функции $Q(s,k)$ (описанной выше), следует существование такого числа $R_0 \gg 1$, что при $\operatorname{Re} s = \sigma_0 > R_0$ выполняется неравенство $|Q(s,k)| \leqslant q_0 < 1$, позволяющее воспользоваться равномерно сходящимся разложением в ряд прогрессии

$$\frac{1}{\Delta_0(s,k)} = \frac{1}{D_0(s,k)} \sum_{n=0}^{\infty}]Q(s,k)]^n \tag{38}$$

основного сомножителя из выражений (34). На основе такого разложения удается построить подобные же разложения для коэффициентов $\widetilde{A}_\nu^\pm$ и $\widetilde{B}_\nu^\pm$ из (34), входящих в подынтегральные функции представлений для потенциалов φ_ν, ψ_ν поля смещений в ν-ом слое среды. Как нетрудно видеть, подстановка таких разложений в формулы (12) приводит к представлению полей φ_ν и ψ_ν выражениями (12), интегралы Меллина которых имеют качественно такую же структуру.

В заключении отметим, что для двухслойной среды ($\nu = 1$ и $\nu = 2$) была составлена программа и проведено большое количество расчетов [4–6]. На основе этих расчетов были обнаружены новые типы модальных волн, распространяющихся в глубь срежы. Генезис этих волн тесно связан с комплексными корнями дисперсионного уравнения задачи.

Литература

1. Г. И. Петрашень, Б. М. Каштан, Ю. В. Киселев, *Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановка задач и рациональные методы их решения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **214** (1994), 10–77.
2. Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучнию интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках*

тонких упругих слоев. (I) (Построение волновых полей типа SV и обсуждение рациональных методов их количественно оценки).
3. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах.* Наука, Л. (1982).
4. В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев. (II). (Численные методы оценки полей. Краткий обзор получаемых результатов).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **253** (1999), 137–161.
5. В. В. Решетников, Ю. А. Сурков, *О новых явлениях в упругих средах, состоящих из тонкого слоя, контактирующего с полупространством.* — СПбГУ, Вопросы геофизики **36** (2004), 35–51.
6. Ю. А. Сурков, В. В. Решетников, *Численные исследования свойств квазилокальных плоских волн модального типа в случае тонкого низклскоростного упругого слоя, контактирующего с упругим полупространством.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), 182–196.

Petrashen G. I., Reshetnikov V. V. Surkov Yu. A. On the comparison of methods of computation of interference elastic wave fields in thin-layered media. 1.

A nonstationary problem on propagation of low-frequency waves for a model that consists of a packet of elastic layers lying on the elastic half-space is considered, exact mathematical solutions in the form of iterated integrals are constructed in three basic forms. It is proved that these solutions satisfy initial conditions. The possibility of the passage to the representation of the solution by a superposition of multiple waves is considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 июня 2006 г.