Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 332, 2006 г.

Л. А. Молотков, М. Н. Перекарева

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ УПРУГО-ЖИДКУЮ СЛОИСТУЮ СРЕДУ

Для изучения распространения волн в периодических средах, состоящих из чередующихся упругих и жидких слоев, была предложена в 1979 г. двухфазная эффективная модель, описываемая специальными уравнениями [1]. Эта модель является особым частным случаем известной модели пористой среды Био [2]. На основе модели чередующихся слоев, было построено и исследовано волновое поле, были построены фронты от точечного источника и определены скорости распространения волн вдоль осей [3]. Эффективная модель получила экспериментальное подтверждение в лабораторных опытах с пластинами из алюминия и плексиглаза и с водой [4, 5]. Введенная эффективная модель была обобщена на случаи, когда упругие слои являются анизотропными и могут обладать общей анизотропией [6]. В последние годы в уравнения этой модели были введены дополнительные члены, описывающие затухание, связанное с вязким трением между упругими и жидкими слоями [7].

В предлагаемой работе выводится новое представление для волнового поля от точечного источника в двумерном случае. Особенность этого представления состоит в том, что оно не содержит интегралов Фурье и Меллина и выражается через вычеты в комплексных или вещественных полюсах. Это представление соответствует решениям, полученным методом Смирнова–Соболева в случае упругих сред.

§1. Волновое поле в эффективной модели

Пусть задана полуплоскость $z \geqslant 0$, описываемая уравнения-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 06-05-64252.

ми [6]

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx1} = [((1-\varepsilon)b_1^2\widetilde{\lambda} + a_1]\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + b_1\varepsilon\widetilde{\lambda}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + b_1\widetilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\tau_{xx2} = \tau_{zz} = \tau_{zz1} = \tau_{zz2} = (1-\varepsilon)b_1\widetilde{\lambda}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon\widetilde{\lambda}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \widetilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xx2}}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

эффективной двухфазной модели среды, в которой чередуются упругие и жидкие слои. В уравнениях (1.1) использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda_2(\lambda_1+2\mu_1)}{\varepsilon(\lambda_1+2\mu_1)+\lambda_2(1-\varepsilon)}, \quad a_1 = \frac{4\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}{\lambda_1+2\mu_1},\\
&b_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}, \quad \overline{\rho} = \rho_1(1-\varepsilon)+\rho_2\varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ε – пористость, λ_1, μ_1 – коэффициенты Ламе упругой среды, λ_2 – модуль жидкой среды, ρ_1, ρ_2 – плотности упругой и жидкой сред, u_{x1}, u_{x2} – смещения вдоль оси x в упругих и жидких средах, u_z, τ_{zz} – общие для обеих сред смещения и напряжения вдоль оси z, τ_{xx1}, τ_{xx2} – напряжения вдоль оси x в упругих и жидких средах. При этом, согласно закону Паскаля, напряжения в жидкой среде вдоль осей x и z совпадают ($\tau_{xx2} = \tau_{zz}$). На границе полуплоскости $z = 0$ задается условие

$$\tau_{zz} = A\delta(x)f(t), \tag{1.3}$$

в котором $\delta(x)$ – функция Дирака, а $f(t)$ – функция, определяющая временную зависимость источника и равная тождественно нулю при $t < 0$.

Для определения волнового поля полезно представить условие (1.3) в виде равенства

$$\tau_{zz} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\cos kx dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta)e^{kt\eta}d\eta, \tag{1.4}$$

где

$$F(k\eta) = \int_0^\infty f(t)e^{-k\eta t}dt, \tag{1.5}$$

а смещения и напряжения выразить соотношениями

$$\begin{aligned}
u_{xi} &= \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widetilde{u}_{xi} e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta, \\
u_z &= \int\limits_0^\infty \frac{\cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widetilde{u}_z e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta, \qquad (1.6) \\
\tau_{xxi} &= \int\limits_0^\infty \frac{k\cos kx dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widetilde{\tau}_{xxi} e^{k(t\eta - z\alpha)} d\eta \quad (i=1,2).
\end{aligned}$$

После подстановки равенств (1.6) в уравнение (1.1) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&[(1-\varepsilon)b_1^2\widetilde{\lambda} + a_1]\widetilde{u}_{x1} + \varepsilon b_1 \widetilde{u}_{x2} + b_1\widetilde{\lambda}\alpha\widetilde{u}_z - \widetilde{\tau}_{xx1} = 0, \\
&(1-\varepsilon)b_1\widetilde{\lambda}\widetilde{u}_{x1} + \varepsilon\widetilde{\lambda}\widetilde{u}_{x2} + \widetilde{\lambda}\alpha\widetilde{u}_z - \widetilde{\tau}_{xx2} = 0, \\
&\rho_1\eta^2\widetilde{u}_{x1} + \widetilde{\tau}_{xx1} = 0, \qquad (1.7) \\
&\rho_2\eta^2\widetilde{u}_{x2} + \widetilde{\tau}_{xx2} = 0, \\
&\overline{\rho}\eta^2\widetilde{u}_z - \alpha\widetilde{\tau}_{xx2} = 0.
\end{aligned}$$

Условие существования ненулевого решения системы состоит в равенстве нулю ее определителя и приводит к уравнению

$$\overline{\rho}\,[\rho_1\rho_2\eta^4 + (a_1\rho_2 + (1-\varepsilon)b_1^2\widetilde{\lambda}\rho_2 + \varepsilon\widetilde{\lambda}\rho_1)\eta^2 + \varepsilon a_1\widetilde{\lambda}] - \\ - \alpha^2\widetilde{\lambda}\rho_2(\rho_1\eta^2 + a_1) = 0. \quad (1.8)$$

Решая уравнение (1.8), приходим к соотношению

$$\alpha = \eta\sqrt{\overline{\rho}\Big[\frac{1}{\widetilde{\lambda}} + \frac{(1-\varepsilon)b_1^2}{\rho_1\eta^2 + a_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_2\eta^2}\Big]}, \qquad (1.9)$$

определяющему характеристическую функцию $\alpha(\eta)$.

Из граничного условия (1.3) с учетом формул (1.4), (1.6), а также равенства $t_{zz} = t_{xx2}$ следует соотношение

$$\widetilde{\tau}_{xx2} = \frac{2}{\pi}F(k\eta) \qquad (1.10)$$

для подынтегральной функции $\widetilde{\tau}_{xx2}$. Остальные подынтегральные функции в равенствах (1.6) выражаются на основании системы уравнений (1.7) соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{u}_{x1} = \frac{1 - \frac{\widetilde{\lambda}\alpha^2}{\overline{\rho}\eta^2} + \frac{\varepsilon\widetilde{\lambda}}{\rho_2\eta^2}}{(1-\varepsilon)b_1\widetilde{\lambda}}\widetilde{\tau}_{xx2}, \qquad \widetilde{u}_{x2} = -\frac{\widetilde{\tau}_{xx2}}{\rho_2\eta^2},\\
&\widetilde{\tau}_{xx1} = -\rho_1\eta^2\frac{1 - \frac{\widetilde{\lambda}\alpha^2}{\overline{\rho}\eta^2} + \frac{\varepsilon\widetilde{\lambda}}{\rho_2\eta^2}}{(1-\varepsilon)b_1\widetilde{\lambda}}\widetilde{\tau}_{xx2}, \qquad \widetilde{u}_z = \frac{\alpha\widetilde{\tau}_{xx2}}{\overline{\rho}\eta^2}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

через функцию $\widetilde{\tau}_{xx2}$. Формулы (1.10) и (1.11) совместно с равенствами (1.6) определяют образующееся волновое поле.

§2. Стационарные контуры и контур λ

Для преобразования полученного решения полезно предварительно исследовать подынтегральные функции интегралов Меллина. С этой целью представим функцию $\alpha(\eta)$, как и в монографии [6], формулой

$$
\alpha = \frac{1}{v_4}\sqrt{\frac{(\eta^2+v_1^2)(\eta^2+v_3^2)}{\eta^2+v_2^2}}, \tag{2.1}
$$

в которой

$$
\begin{aligned}
v_{1,3}^2 = \Big[\pm \sqrt{[\varepsilon\rho_1\widetilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b_1^2\rho_2\widetilde{\lambda} + a_1\rho_2]^2 - 4\varepsilon\rho_1\rho_2\widetilde{\lambda}a_1} + \\
+ \varepsilon\rho_1\widetilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b_1^2\rho_2\widetilde{\lambda} + a_1\rho_2\Big]/(2\rho_1\rho_2),\\
v_2^2 = a_1/\rho_1, \quad v_4^2 = \widetilde{\lambda}/\overline{\rho}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Как показано в работе [3], величины v_1, v_2, v_3 – скорости волн вдоль оси x, а v_4 – скорость волны вдоль оси z. Величины v_1, v_2, v_3 удовлетворяют условиям

$$
v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3. \tag{2.3}
$$

Подынтегральные функции интегралов Меллина имеют точки ветвления $\eta = \pm iv_1$, $\eta = \pm iv_2$ и $\eta = \pm iv_3$. Для однозначности функции $\alpha(\eta)$ из этих точек ветвления проведены в левую полуплоскость разрезы и основная ветвь фиксирована условием

$$
\alpha(\eta) > 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{2.4}
$$

Свойства интегралов Меллина определяются фазовой функцией

$$f(\eta) = t\eta - z\alpha. \tag{2.5}$$

Мнимая часть фазовой функции на мнимой оси $\eta = i\tau$ имеет график (рис. 1), симметричный относительно прямой $\tau = 0$. Так как в интервалах $v_3 < \tau < v_2$ и $v_1 < \tau$ $\operatorname{Re} f(i\tau) = 0$, то из рисунка 1 видно, что на мнимой оси расположены три пары седловых точек $\eta_1 = \pm i\tau_1$, $\eta_2 = \pm i\tau_2$, $\eta_3 = \pm i\tau_3$, в которых $f'(\eta) = 0$.

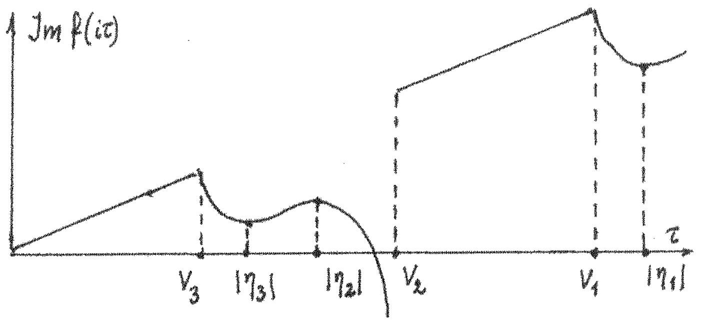

Рис. 1.

Стационарные контуры

$$\operatorname{Im} f(\eta) = \operatorname{Im} f(\eta_i) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.6}$$

проходящие через седловые точки, показаны на рис. 2. Стрелки на рис. 2 указывают направления, в которых $\operatorname{Re} f(\eta)$ возрастает. Из рис. 2 видно, что стационарные контуры или уходят на другие листы, или оканчиваются на бесконечности, или в особой точке $\eta = iv_2$.

Чтобы исследовать стационарные контуры вблизи мнимой оси в окрестности точки $\eta = iv_2$, полезно записать соотношение

$$\eta - iv_2 = |\eta - iv_2| e^{i(\pi/2 - \varphi)}. \tag{2.7}$$

Фазовая фунция в указанной области представляется приближенным равенством

$$f(\eta) = itv_2 - \frac{z}{v_4} \sqrt{\frac{(v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2)}{2v_2|\eta - v_2|}}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}. \tag{2.8}$$

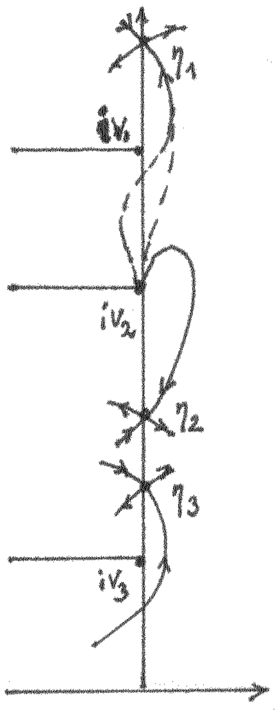

Рис. 2. Стационарные контуры

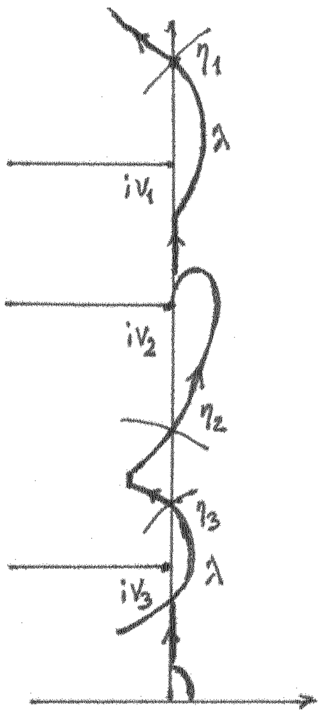

Рис. 3. Контур λ.

Угол φ, определяющий стационарные контуры в окрестности точки $\eta = iv_2$, выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2v_4}{z}\sqrt{\frac{2|\eta - iv_2|v_2}{(v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2)}}\big[v_2 t - \operatorname{Im} f(\eta_1)\big], \\ \varphi &= \frac{2v_4}{z}\sqrt{\frac{2|\eta - iv_2|v_2}{(v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2)}}\big[v_2 t - \operatorname{Im} f(\eta_2)\big] \end{aligned} \tag{2.9}$$

соответственно для стационарных контуров, проходящих через седловые точки $\eta = i\tau_1$ и $\eta = i\tau_2$. Из равенств (2.9) следует, что оба стационарных контура выходят из точки $\eta = iv_2$ сперва вверх, а затем отклоняются вправо или влево в зависимости от знака квадратных скобок. В случае

$$v_2 t > \operatorname{Im} f(\eta_1) \tag{2.10}$$

контур приходит в седловую точку η_1 по правой плоскости, а при обратном соотношении

$$v_2 t < \operatorname{Im} f(\eta_1) \tag{2.11}$$

контур сперва отклоняется в левую полуплоскость, а затем пересекает мнимую ось. Оба возможных положения стационарного контура показаны на рис. 2 штрихованными линиями. Так как неравенство

$$v_2 t > \operatorname{Im} f(\eta_2) \tag{2.12}$$

выполняется всегда, то стационарный контур, идущий в седловую точку η_2, проходит только по правой полуплоскости.

На основании проведенных исследований построим контур λ (рис. 3), на котором выполняется условие

$$\operatorname{Re} f(\eta) \leqslant 0, \tag{2.13}$$

при этом равенство выполняется только в трех седловых точках, а в остальных точках контура λ справедливо неравенство. Чтобы в дальнейшем не учитывать особенность в точке $\eta = 0$, будем предполагать, что контур λ обходит эту точку справа и при этом обходе условие (2.13) выполняется. Стационарный контур симметричен относительно вещественной оси.

§3. Перестановка порядка интегрирования и вычисление внутренних интегралов

Используя условие (2.13), полезно в интегралах Меллина, входящих в формулы (1.6), заменить контур интегрирования на контур λ. После такой замены в этих формулах удается переставить порядок интегрирования и выразить смещения u_{x1}, u_{x2} и u_z равенствами

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{1}{\pi^2 i}\int\limits_{(\lambda)} A_{xi}(\eta)\,d\eta \int\limits_0^\infty \sin kx e^{k(t\eta - z\alpha)} F(k\eta)\,dk \quad (i = 1, 2), \\ u_z &= \frac{1}{\pi^2 i}\int\limits_{(\lambda)} B_z(\eta)\,d\eta \int\limits_0^\infty \cos kx e^{k(t\eta - z\alpha)} F(k\eta)\,dk, \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которых

$$A_{x1} = \frac{\overline{\rho}\rho_2\eta^2 - \widetilde{\lambda}\rho_2\alpha^2 - \varepsilon\widetilde{\lambda}\overline{\rho}}{\overline{\rho}\rho_2(1-\varepsilon)b_1\widetilde{\lambda}\eta^2}, \quad A_{x2} = -\frac{1}{\rho_2\eta^2}, \quad B_z = \frac{\alpha}{\overline{\rho}\eta^2}. \tag{3.2}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда

$$f(t) = \delta(t), \quad F(k\eta) = 1. \tag{3.3}$$

В этом случае внутренние интегралы вычисляются элементарно и формулы (3.1) заменяются равенствами

$$u_{xi} = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{(\lambda)} A_{xi}(\eta)d\eta\Big[\frac{1}{z\alpha - \eta t + ix} - \frac{1}{z\alpha - \eta t - ix}\Big] \quad (i = 1, 2),$$
$$u_z = \frac{1}{2\pi^2 i}\int\limits_{(\lambda)} B_z(\eta)d\eta\Big[\frac{1}{z\alpha - \eta t + ix} + \frac{1}{z\alpha - \eta t - ix}\Big]. \tag{3.4}$$

Вычисление интегралов (3.4) может быть сведено к учету особенностей подынтегральных функций, расположенных справа от пути интегрирования λ. Такими особенностями являются полюса, совпадающие с корнями уравнений

$$\eta t - z\alpha - ix = 0, \quad \eta t - z\alpha + ix = 0. \tag{3.5}$$

Все корни уравнений (3.5) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned}&(v_4^2t^2 - z^2)\eta^4 - i2xtv_4^2\eta^3 + [v_4^2(v_2^2t^2 - x^2) - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\eta^2 - \\ &- i2xtv_2^2v_4^2\eta - (x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2) = 0,\\ &(v_4^2t^2 - z^2)\eta^4 + i2xtv_4^2\eta^3 + [v_4^2(v_2^2t^2 - x^2) - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\eta^2 + \\ &+ i2xtv_2^2v_4^2\eta - (x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2) = 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

§4. Исследование корней уравнений (3.5)

Остановимся на исследовании корней уравнений (3.6). Оба уравнения являются уравнениями четвертого порядка и имеют по 4 корня. Корни первого уравнения (3.6) $\eta_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ и корни второго уравнения (3.6) $\eta_j^{(2)}$ связаны между собой соотношениями

$$\eta_j^{(1)} = -\eta_j^{(2)}, \tag{4.1}$$

которые показывают, что корни первого и второго уравнений (3.6) расположены симметрично относительно начала координат. Для выяснения расположения корней уравнений (3.6) полезно произвести замену

$$\eta = i\zeta, \tag{4.2}$$

после которой уравнения (3.6) переходят в уравнения

$$\begin{aligned} &(v_4^2t^2 - z^2)\zeta^4 - 2xtv_4^2\zeta^3 - [v_4^2(v_2^2t^2 - x^2) - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\zeta^2 - \\ &+ i2xtv_2^2v_4^2\zeta - (x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2) = 0, \\ &(v_4^2t^2 - z^2)\zeta^4 + 2xtv_4^2\zeta^3 - [v_4^2(v_2^2t^2 - x^2) - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\zeta^2 - \\ &- 2xtv_2^2v_4^2\zeta - (x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

с вещественными коэффициентами. Из принципа симметрии следует, что мнимые и комплексные корни обоих уравнений (4.3) являются симметричными относительно вещественной оси. Если вернуться к переменной η, то придем к выводу, что вещественные и комплексные корни уравнений (3.6) симметричны относительно мнимой оси.

Оба уравнения (4.3) на положительной и отрицательной частях вещественной оси имеют по крайней мере по одному корню. В этом легко убедиться, если учесть, что левые части обоих уравнений (4.3) являются при $\zeta = \pm\infty$ положительными, а при $\zeta = 0$ отрицательными. На плоскости η соответствующие корни уравнения (3.6) расположены на положительной и отрицательной частях мнимой оси. Эти корни находятся на интервалах (iv_3, iv_2) и $(-iv_2, -iv_3)$ мнимой оси основного или второго листа, если рассматривать уравнения (3.5). В самом деле, первое уравнение (3.5) на промежутке (iv_3, iv_2) имеет корень на основном листе при условии $v_3t - x > 0$, а при условии $v_3t - x < 0$ на втором листе, где $\operatorname{Im}\alpha < 0$. Второе уравнение (3.5) на том же промежутке имеет корень на основном листе при условии $v_3t + x > 0$, а при условии $v_3t + x < 0$ на втором листе.

Остальные два корня уравнений (3.6) могут быть вещественными, комплексными и мнимыми. При $x = 0$ оба уравнения (3.6) становятся одинаковыми и биквадратными уравнениями и представляются равенством

$$(v_4^2t^2 - z^2)\eta^4 + [v_2^2v_4^2t^2 - (v_1^2 + v_3^2)z^2]\eta^2 - z^2v_1^2v_3^2 = 0. \tag{4.4}$$

Корни уравнения (4.4) выражаются формулами

$$\begin{gathered}
\eta_{1,2}^{(1)} = \pm d, \quad \eta_{3,4}^{(1)} = \pm ia, \\
a = \sqrt{\frac{A^0 + \sqrt{B^0}}{C^0}}, \quad d = \sqrt{\frac{\sqrt{B^0} - A^0}{C^0}}, \\
A^0 = v_2^2 v_4^2 t^2 - (v_1^2 + v_3^2) z^2, \quad C^0 = 2(v_4^2 t^2 - z^2), \\
B^0 = v_2^4 v_4^4 t^4 + 2 v_4^2 (2 v_1^2 v_3^2 - v_1^2 v_2^2 - v_2^2 v_3^2) z^2 t^2 + (v_1^2 - v_3^2)^2 z^4.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Корни (4.5) следует рассматривать при условии

$$v_4 t \geqslant z, \tag{4.6}$$

при котором точки наблюдения на прямой $x = 0$ расположены за фронтом или на фронте. Если выполняется условие (4.6), то величины a и d являются положительными, два корня лежат на вещественной оси и два корня чисто мнимые.

При условии $z = v_4 t$, когда точка наблюдения находится на фронте, оба вещественных корня расположены на бесконечности, $\eta_{1,2}^{(i)} = \pm\infty$, а мнимые корни выражаются соотношениями

$$\eta_{3,4}^{(i)} = \pm \frac{i v_1 v_3}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2 + v_3^2}}, \tag{4.7}$$

в которых модуль правой части удовлетворяет неравенствам

$$v_3 < \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2 + v_3^2}} < v_2. \tag{4.8}$$

В случае $z = 0$, когда точка наблюдения совпадает с источником,

$$\eta_{1,2}^{(1)} = 0, \quad \eta_{3,4}^{(1)} = \pm i v_2. \tag{4.9}$$

Дополнительные исследования показывают, что между указанными крайними значениями корней корни монотонно двигаются по вещественной и мнимой осям по мере перемещения точки наблюдения вдоль оси z от источника до фронта.

При $x \neq 0$ корни уравнений (3.6) не могут быть расположены на вещественной оси. С увеличением x от 0 вещественные корни первого уравнения (3.6) смещаются в верхнюю полуплоскость, а корни второго уравнения (3.6) – в нижнюю полуплоскость.

Наоборот, при уменьшении x от 0, вещественные корни первого уравнения смещаются в нижнюю полуплоскость, а вещественные корни второго уравнения (3.6) – в верхнюю полуплоскость. В обоих случаях все эти четыре комплексных корня располагаются симметрично относительно вещественной и мнимой осей (рис. 4). Мнимые корни уравнения (3.6) с ростом или с убыванием x от 0 смещаются по мнимой оси, остаются в интервалах (iv_3, iv_2), $(-iv_2, -iv_3)$ и удовлетворяют условиям (4.1).

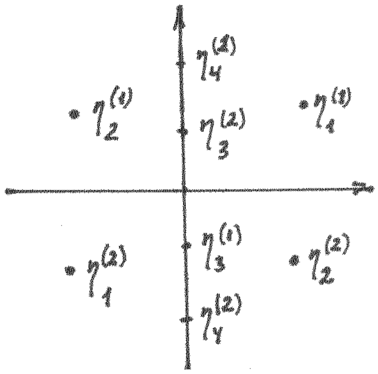

Рис. 4.

Уравнения (3.5) не могут удовлетворяться в точках стационарных контуров за исключением точек ветвления. В этом легко убедиться, если учесть, что на стационарных контурах величины $\mathrm{Im}(t\eta - z\alpha \mp ix)$ фиксированы, а

$$\mathrm{Re}(t\eta - z\alpha \mp ix) \leqslant 0, \tag{4.10}$$

при этом равенство выполняется только в точках ветвления. Таким образом, корни уравнения (3.6) с ростом $|x|$ не могут пересечь стационарные контуры и контур λ в правой полуплоскости. Комплексные корни с ростом величины $|x|$ могут выходить на мнимую ось. Так как корни первого уравнения (3.6) расположены симметрично относительно мнимой оси, то на положительную часть мнимой оси выходят одновременно два корня, образуя двойной корень. Вследствие симметрии корней уравнений (3.6) относительно вещественной оси (рис. 4) на отрицательной части мнимой оси при тех же значениях x также образуется двойной корень. В этих двойных корнях выполняются соответственно две системы уравнения

$$t\eta - z\alpha(\eta) \mp ix = 0, \tag{4.11}$$

$$t - z\alpha'(\eta) = 0. \tag{4.12}$$

Так как уравнение (4.12) определяет седловые точки, то приходим к выводу, что комплексные корни выходят на мнимую ось только в седловых точках.

Если решить системы уравнений (4.11) и (4.12) относительно x и z, то придем к равенствам

$$x = \mp it\Big(\eta - \frac{\alpha(\eta)}{\alpha'(\eta)}\Big), \qquad z = \frac{t}{\alpha'(\eta)}, \tag{4.13}$$

определяющим координаты точек фронтов в зависимости от положения седловых точек [3]. Седловые точки в верхней полуплоскости могут находиться в интервалах

$$v_3 < \operatorname{Im}\eta < v_2, \qquad \operatorname{Im}\eta > v_1, \tag{4.14}$$

а формулы (4.13) могут рассматриваться как параметрическое задание фронтов.

На основании исследований, проведенных по формулам (4.13), были построены фронты волн, возбужденных точечным источником, расположенным в начале координат [3] (рис. 5). Передний фронт описывается седловой точкой η_1, которая может находиться в любой точке интервала $(iv_1, i\infty)$. “Треугольный” фронт, состоящий из вогнутой и выпуклой частей, описывается соответственно седловыми точками η_2 и η_3. Эти седловые точки лежат в интервале (iv_3, iv_2), который разделяется точкой $\eta = i\tau_0$. В точке $\eta = i\tau_0$ обращается в нуль вторая производная фазовой функции и выполняется условие

$$\alpha''(i\tau_0) = 0 \tag{4.15}$$

в промежутке $v_3 < \tau_0 < v_2$.

Дальнейшие исследования корней (3.6) проводятся по-разному в зависимости от того, какое из двух условий

$$z < t/\tau_0, \tag{4.16}$$

$$t/\tau_0 < z < t/v_4 \tag{4.17}$$

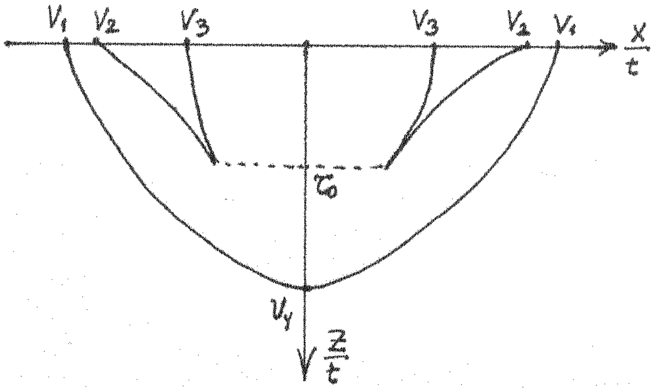

Рис. 5.

выполняется. В случае выполнения условия (4.16) полезно привести пять графиков левой части первого уравнения (3.5) (рис. 6) и пронаблюдать за перемещением корней в промежутке $v_3 < \tau < v_2$ с ростом x. Каждому графику соответствует определенная точка наблюдения на рис. 5.

1-ый график. На промежутке (iv_3, iv_2) расположен один корень. Остальные корни в верхней полуплоскости – комплексные. Точка наблюдения 1 находится за "треугольным" фронтом.

2-ой график. Комплексные корни вышли на мнимую ось, и образовался двойной корень в седловой точке $\eta = \eta_3$. Третий мнимый корень расположен выше седловой точки $\eta = \eta_2$ и с ростом x двигается вниз. Точка наблюдения 2 находится на выпуклой части "треугольного" фронта.

3-ий график. Двойной корень разделился на два мнимых корня, из которых с ростом x один спускается по мнимой оси, а другой поднимается. Последний расположен между седловыми точками $\eta = \eta_2$ и $\eta = \eta_3$ и находится справа от контура λ (рис. 3). Два других корня расположены слева от контура λ. Точка наблюдения 3 лежит внутри "треугольного" контура.

4-ый график. Два верхних корня на мнимой оси сливаются и образуют двойной корень в точке $\eta = \eta_2$. Нижний корень остается на мнимой оси. Точка наблюдения расположена на вогнутом участке "треугольного" фронта.

5-ый график. Двойной корень разделился на два комплексных корня. Корень в правой полуплоскости расположен справа от контура λ. На мнимой оси остается один корень. Этот корень с ростом x может переходить через точку $\eta = iv_3$ на второй лист. Точка наблюдения 5 расположена между “треугольным” и передним фронтами.

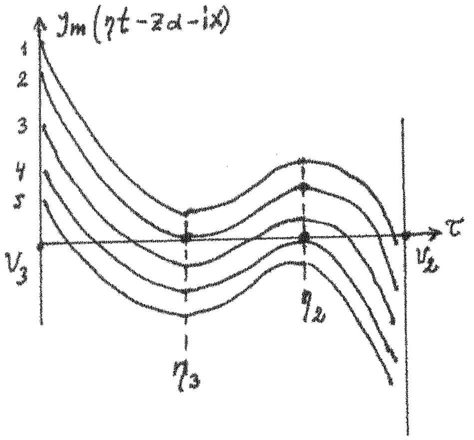

Рис. 6.

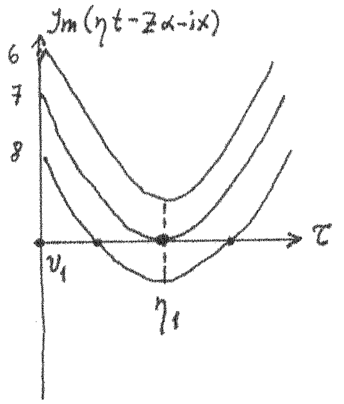

Рис. 7.

Исследование корней первого уравнения (3.5) для точек, лежащих между “треугольным” и передним фронтами (рис. 5), и для точек, удовлетворяющих условиям (4.17), проводится теми же методами, как и при условии (4.16). В обоих случаях с ростом координаты x комплексные корни первого уравнения (3.5) приближаются к мнимой оси (рис. 7, график 6) и затем выходят на мнимую ось, образуя двойной корень $\eta = \eta_1$ (рис. 7, график 7). Соответствующая точка наблюдения оказывается на переднем фронте. С последующим ростом x точка наблюдения располагается впереди переднего фронта (рис. 5), а двойной корень разделяется на два мнимых корня, при этом один из них поднимается по мнимой оси, а другой спускается (рис. 7, график 8). Поднимающийся мнимый корень расположен справа от контура λ (рис. 3) и поэтому должен быть учтен при исследовании волнового поля.

§5. Вычисление волнового поля

На основании проведенных в §4 исследований приходим к выводу, что каждое из двух уравнений (3.5) имеет справа от контура λ по одному корню $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_2^{(2)}$. Эти корни расположены симметрично относительно вещественной оси (рис. 4) и могут быть комплексными, вещественными и мнимыми. Интегралы в формулах (3.4) вычисляются по вычетам в полюсах, которые совпадают с корнями уравнения (3.5). В результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} u_{xi} &= -\frac{i}{\pi}\left[\frac{A_{xi}(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} - \frac{A_{xi}(\eta_2^{(2)})}{z\alpha'(\eta_2^{(2)}) - t}\right], \\ u_z &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t} + \frac{B_z(\eta_2^{(2)})}{z\alpha'(\eta_2^{(2)}) - t}\right]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Так как на вещественной оси величины $A_{xi}(\eta)$, $B_z(\eta)$ и $\alpha'(\eta)$ являются вещественными, то равенства (5.1) могут быть заменены формулами

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{A_{xi}(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t}, \\ u_z &= -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Волновому полю на оси z соответствует случай, когда величина $\eta_1^{(1)}$ является вещественной. Соотношения (5.2) в этом случае заменяются равенствами

$$u_{xi} = 0, \qquad u_z = -\frac{2}{\pi}\,\frac{B_z(\eta_1^{(1)})}{z\alpha'(\eta_1^{(1)}) - t}. \tag{5.3}$$

При рассмотрении случая, когда точка $\eta_1^{(1)}$ расположена на мнимой оси, отметим, что на мнимой оси величины $A_{xi}(\eta)$ и $\alpha'(\eta)$ являются вещественными, а $B_z(\eta)$ мнимой. Из этих фактов, согласно равенству (5.2), следует, что в случае мнимых $\eta_1^{(1)}$ смещения u_{xi} и u_z обращаются в нули. Таким образом, волновое поле внутри “треугольного” фронта и впереди переднего фронта отсутствует. За передним фронтом и вне “треугольного” фронта и оси z волновое поле определяется формулами (5.2), в которых величина $\eta_1^{(1)}$ является комплексной и решением первого уравнения (3.5).

Таким образом, волновое поле в эффективной модели выражается формулами (5.2) или (5.3) и определяется величиной $\eta_1^{(1)}$, которая является одним из корней первого уравнения (3.6). Для точек, лежащих на оси z, первое уравнение (3.6) переходит в биквадратное (4.4), вещественное решение которого $\eta_1^{(1)}$ выражается формулами (4.5). При $x \neq 0$ для определения волнового поля необходимо найти комплексный корень $\eta_1^{(1)}$.

Для нахождения этого комплексного корня предлагается некоторый подход. Корни первого уравнения (3.6)

$$\begin{gathered} \eta_1^{(1)} = \overline{A} + i\overline{B}, \quad \eta_2^{(1)} = -\overline{A} + i\overline{B}, \quad \eta_3^{(1)} = i\overline{C}, \quad \eta_4^{(1)} = -i\overline{D} \\ (\overline{A} > 0, \overline{B} > 0, \overline{C} > 0, \overline{D} > 0) \end{gathered} \tag{5.4}$$

удовлетворяют, согласно обобщенной теореме Виета, уравнениям

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}\eta_3^{(1)}\eta_4^{(1)} &= -(\overline{A}^2 + \overline{B}^2)\overline{C}\overline{D} = -\frac{x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2}{v_4^2t^2 - z^2}, \\ \eta_1^{(1)} + \eta_2^{(1)} + \eta_3^{(1)} + \eta_4^{(1)} &= i(2\overline{B} + \overline{C} - \overline{D}) = \frac{i2xtv_4^2}{v_4^2t^2 - z^2}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из равенств (5.5) можно выразить реальную $\overline{A}$ и мнимую $\overline{B}$ части комплексного числа $\eta_1^{(1)}$, если известны значения величин $\overline{C}$ и $\overline{D}$. Для нахождения последних величин необходимо найти значения мнимых корней уравнений (3.6) $\eta_3^{(1)} = i\overline{C}$ и $\eta_4^{(2)} = -\eta_4^{(1)} = i\overline{D}$

в интервале (iv_3, iv_2), при этом полезно провести замену $\eta = i\tau$ и использовать уравнения

$$z^2(v_1^2 - \tau^2)(\tau^2 - v_3^2) - v_4^2(t\tau \mp x)^2(v_2^2 - \tau^2) = 0, \qquad (5.6)$$

равносильные уравнениям (3.6). Левые части обоих уравнений (5.6) являются отрицательными при $\tau = v_3$ и положительными при $\tau = v_2$. С помощью метода деления отрезка пополам можно найти корни обоих уравнений $\tau = \overline{C}$ и $\tau = \overline{D}$. Используя вычисленные значения $\overline{C}$ и $\overline{D}$, получаем формулы

$$\overline{B} = \frac{\overline{D} - \overline{C}}{2} + \frac{xtv_4^2}{v_4^2t^2 - z^2}, \qquad \overline{A} = \sqrt{\frac{x^2v_2^2v_4^2 + z^2v_1^2v_3^2}{(v_4^2t^2 - z^2)\overline{C}\,\overline{D}} - \overline{B}^2}, \qquad (5.7)$$

определяющие комплексную величину $\eta_1^{(1)}$.

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда временная функция $f(t)$ является произвольной функцией, а не задается формулой (3.3). Используя теорему свертки, получаем соотношения

$$\begin{aligned} U_{xi}(t,x,z) &= \int_0^t u_{xi}(\tau,x,z)f(t-\tau)d\tau \quad (i=1,2), \\ U_z(t,x,z) &= \int_0^t u_z(\tau,x,z)f(t-\tau)d\tau \end{aligned} \qquad (5.8)$$

для смещений U_{xi} и U_z в случае произвольной функции $f(t)$. Особенность волнового поля в этом случае состоит в том, что оно не обращается в нуль внутри "треугольного" фронта.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
2. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 172–195.
3. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–123.

4. M. Schoenberg, *Wave propagating in alternating fluid and solid layers.* — Wave Motion **6** (1984), 303–320.
5. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers.* — J. Acoust. Soc. Amer **81, No. 5** (1987), 1227–1234.
6. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб (2001).
7. Л. А. Молотков, *О затухании волн в эффективной модели, описывающей пористые и трещиноватые среда, насыщенные жидкостью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003), 216–229.
8. С. Л. Соболев, *Некоторые вопросы теории распространения колебаний,* гл. XII. – В кн.: Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.-М. (1937), 468–617.

Molotkov L. A., Perekareva M. N. Investigation of wave field in effective model of layered elastic-fluid medium.

For the medium consisting of alternating elastic and fluid layers, the effective model is constructed and investigated. This model is a special case of the Biot medium. The wave field is represented as Fourier and Mellin integrals. In the Mellin integral we replace contour of integration by a stationary contour. In the obtained expressions, we rearrange the integrals and calculate the inner integral. The external integral is equal to two residues. The corresponding poles are roots of two equations of fourth order. These roots are situated at the right half-plane and can be complex or real. The obtained representation for the wave field corresponds to the expressions derived by the method of Smirnov–Sobolev.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский государственный
Морской технический университет

Поступило 25 апреля 2006 г.