Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 332, 2006 г.

Н. Я. Кирпичникова, С. Ю. Фадеева, В. Б. Филиппов

ДИФРАКЦИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

1. Постановка задачи и нахождение поля точечного источника

Рассмотрим двумерное полупространство $-\infty < x < \infty, z \geqslant 0$, состоящее из двух сред Ω_i с различными скоростями $c_i = c_i(z)$, $i = 1, 2$, распространения волн. Среды Ω_1 $(x \leqslant 0)$ и Ω_2 $(x \geqslant 0)$ разделены вертикальной линией $x = 0$, $z \geqslant 0$, на которой заданы условия жесткого контакта и происходит скачок скоростей. Пусть со стороны полупространства $x < 0$ (со стороны среды Ω_1) набегает волна (рис. 1), излучаемая точечным источником M_0 с координатами $(-x_0, z_0)$, $x_0 > 0$, $z_0 = 0$. Точечный источник находится в среде Ω_1 на границе полупространства $z = 0$.

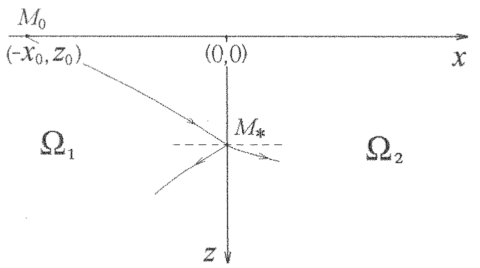

Рис. 1.

В данной работе по заданному падающему полю отыскиваются отраженное (в среде Ω_1) и преломленное (в среде Ω_2) волновые поля. Среды $\Omega_i, i = 1, 2$, предполагаются либо однородными, т.е. с постоянными, но различными скоростями распространения волн в них, либо градиентными с положительными (с отрицательными) изменениями градиентов скоростей, либо комбинациями перечисленных сред. На всей границе $z = 0$ задано условие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 05-01-00936).

Неймана. Аналогично может быть решена задача с другими граничными условиями при $z = 0$.

Исследуются приповерхностные волны ($z \geqslant 0$), т.е. волны, существенно отличные от нуля в слое вблизи границы $z = 0$ и быстро убывающие при удалении от этого слоя. В неоднородной среде с положительным (соответственно, с отрицательным) изменением градиента скорости в слое $z \sim O(k^{-2/3})$ распространяются известные волны шепчущей галереи (соответственно, волны соскальзывания). В однородной среде существуют волны, осциллирующие вблизи поверхности $z = 0$ в более широком (по порядку степени асимптотического параметра $k \to \infty$) слое $z \sim O(k^{-1/2})$, чем для волн шепчущей галереи или волн соскальзывания.

Будем считать, что на границе $z = 0$ неоднородного полупространства $z \geqslant 0$ скорость $c_j(z)$ имеет минимум (соответственно, максимум), например, $(c_j)'_z = \frac{\partial c_j}{\partial z} > 0$, $j = 1, 2$, для $z > 0$ (соответственно, $(c_j)'_z = \frac{\partial c_j}{\partial z} < 0$, $j = 1, 2, z > 0$).

Падающее поле $u_1^{\text{inc}}(x, z)$ в области Ω_1 порождается точечным источником в точке $M_0 = (-x_0, 0)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_1^{\text{inc}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^{\text{inc}}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2(z)} u_1^{\text{inc}} = 0; \quad x \leqslant 0,\, z > 0; \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1(0)}; \tag{1.1}$$

и условию Неймана на границе $z = 0,\ x \leqslant 0$

$$\left.\frac{\partial u_1^{\text{inc}}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\delta(x + x_0). \tag{1.2}$$

В соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.2) следует добавить условие излучения u_1^{inc} при $r = \sqrt{(x + x_0)^2 + z^2} \to \infty$:

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_1^{\text{inc}}}{\partial r} - i k_1 u_1^{\text{inc}} \right) = 0. \tag{1.3}$$

Это условие обеспечивает однозначную разрешимость задачи.

Будем рассматривать простейшие возможные варианты изменения скоростей $c_i(z)$ в областях Ω_i, $i=1,2$, $z>0$:

$$\begin{array}{llll} A_1: & c_1=\mathrm{const}; & A_2: & c_2=\mathrm{const}; \\ B_1: & \dfrac{\partial c_1}{\partial z}>0; & B_2: & \dfrac{\partial c_2}{\partial z}>0; \\ C_1: & \dfrac{\partial c_1}{\partial z}<0; & C_2: & \dfrac{\partial c_2}{\partial z}<0. \end{array} \tag{1.4}$$

Выпишем выражение для падающего волнового поля u_1^{inc} в случае всех трех рассматриваемых нами вариантов изменения скорости $c_1(z)$ в области Ω_1.

В случае A_1 постоянной скорости из области Ω_1 на вертикальную границу раздела набегает волна $u_{1A}^{\mathrm{inc}}(x,z,k_1)$ следующего вида

$$u_{1A}^{\mathrm{inc}}(x,z,k_1)=\frac{e^{i\,\pi/4}e^{i\,k_1\,(x+x_0)}e^{i\,k_1\,\dfrac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}\left(1-\frac{z^2}{2\,(x+x_0)^2}+\ldots\right)\sim$$

$$\sim e^{i\,k_1\,x}U_{1A}^{\mathrm{inc}}. \tag{1.5}$$

При нахождении решения задачи используется метод пограничного слоя [1], [2]. В соответствии с этим методом, введем в окрестности границы $z=0$ следующие локальные координаты σ_j и ν_j:

$$\sigma_j=\left(\frac{k_j}{2}\right)^{1/3}x\,\psi_j^2,\quad \nu_j=k_j^{2/3}\,2^{1/3}\,\psi_j\,z,\quad \sigma_0=\left(\frac{k_1}{2}\right)^{1/3}x_0\,\psi_1^2. \tag{1.6}$$

Отметим, что в случае постоянной скорости распространения величины $\psi_j=1$ и введены здесь для сопряжения с неоднородной средой (см. случаи B_j и C_j). Выражения для значений ψ_j в случаях зависимости скорости от координаты z будут даны позже.

Функция $U_{1A}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)$ является асимптотическим решением уравнения

$$L_a\,U_{1A}^{\mathrm{inc}}\equiv i\frac{\partial U_{1A}^{\mathrm{inc}}}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial^2 U_{1A}^{\mathrm{inc}}}{\partial\nu_1^2}=0, \tag{1.7}$$

при $x<0$.

В координатах σ_1 и ν_1 функция $U_{1A}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1)$ запишется следующим образом

$$U_{1A}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1) = \frac{e^{i\,\pi/4} e^{ik_1x_0} e^{i\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{\pi\,(\sigma_1+\sigma_0)}\,2^{2/3}\,k_1^{1/3}}\Big(1+O\big(k_1^{-1}\big)\Big) \sim$$

$$\sim \mathcal{A}\frac{e^{i\dfrac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)}}, \quad \mathcal{A} = \frac{e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2^{2/3}k_1^{1/3}\sqrt{\pi}}. \tag{1.8}$$

Отметим, что имеет место предельная формула

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-i\,\pi/4}e^{i\dfrac{\nu^2}{4\,\sigma}}}{2\sqrt{\pi\,\sigma}} = \delta(\nu).$$

Волновое поле $u_{1B}^{\rm inc}(x,z,k_1)$ при $x<0$, падающее на вертикальную границу раздела, для случая B_1 в области Ω_1 найдено в работе [3] в виде следующего выражения

$$u_{1B}^{\rm inc}(x,z,k_1) = \frac{\psi_{1B}\,e^{ik_1(x+x_0)}}{2\,\pi\,2^{2/3}\,k_1^{1/3}}\int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i\,(\sigma_1+\sigma_0)\,\zeta}\times$$

$$\times\left[\frac{v(\zeta+\nu_1)}{v'(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta+\nu_1)}{w_2'(\zeta)}\right]\big[1+O(k_1^{-1/3})\big]\,d\zeta, \tag{1.9}$$

где

$$(\psi_{1B})^3 = \left(\frac{(c_1)_z'(0)}{c_1(0)}\right) > 0;$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{k_1}{2}\right)^{1/3} x\,(\psi_{1B})^2; \quad \nu_1 = k_1^{2/3}\,2^{1/3}\,\psi_{1B}\,z > 0. \tag{1.10}$$

Контур $\mathcal{L}$ проведен так, что он проходит через начало координат на плоскости комплексного переменного ζ и справа от него на луче $\arg\zeta = -\pi/3$ лежат корни функции $w_2'(\zeta)$, как на рис. 2. Слева от контура интегрирования $\mathcal{L}$ на линии $\arg\zeta = \pi$ располагаются корни функции $v'(\zeta)$. В верхней полуплоскости комплексного переменного ζ интеграл (1.9) сходится за счет экспоненты

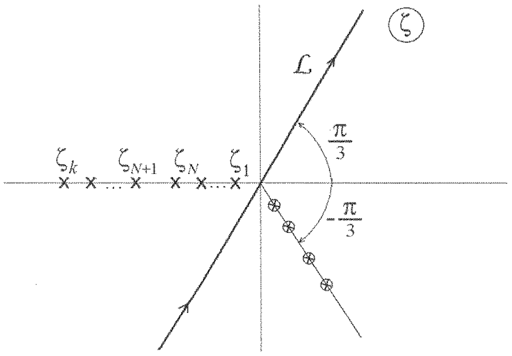

Рис. 2

$\exp\{i\sigma_1\zeta\}$, а в нижней полуплоскости он сходится за счет функций Эйри.

Используя теорему о вычетах, запишем интеграл (1.9) в виде ряда по вычетам:

$$u_{1B}^{\mathrm{inc}}(x,z,k_1) \sim \frac{i\,\psi_{1B}\,e^{ik_1(x+x_0)}}{2^{2/3}\,k_1^{1/3}} \sum_{p=1} e^{-i(\sigma_1+\sigma_0)\zeta_p'} \frac{v(-\zeta_p'+\nu_1)}{(-\zeta_p')v(-\zeta_p')}, \qquad (1.11)$$

причем $v'(-\zeta_p') = 0,\ p = 1,2,3,\ldots$.

Выпишем окончательный вид p-ой волны шепчущей галереи u_{1Bp}^{inc}, набегающей на вертикальную границу раздела $x = 0$ со стороны среды $x < 0$:

$$u_{1Bp}^{\mathrm{inc}} = e^{ik_1x}U_{1Bp}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_{1B}), \qquad (1.12)$$

где амплитуда $\mathcal{B}_p^{\mathrm{inc}}$ волны u_{1Bp}^{inc} равна

$$\mathcal{B}_p^{\mathrm{inc}} = \frac{i\psi_{1B}\,e^{ik_1x_0}e^{-i\sigma_0\zeta'_p}}{2^{2/3}k_1^{1/3}(-\zeta_p')v(-\zeta_p')}, \qquad (1.13)$$

а U_{1Bp}^{inc} определена формулой

$$U_{1Bp}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{B}_p^{\mathrm{inc}}e^{-i\sigma_1\zeta'_p}v(-\zeta_p'+\nu_1). \qquad (1.14)$$

Функция $U_{1Bp}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)$ является асимптотическим решением уравнения Леонтовича–Фока [1]

$$L_b\,U_{1Bp}^{\mathrm{inc}} \equiv i\frac{\partial U_{1Bp}^{\mathrm{inc}}}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial^2 U_{1Bp}^{\mathrm{inc}}}{\partial\nu_1^2} - \nu_1 U_{1Bp}^{\mathrm{inc}} = 0, \quad \nu_1 \geqslant 0, \qquad (1.15)$$

при $x < 0$.

Наконец, рассмотрим случай C_1 неоднородной по z скорости, имеющей в области Ω_1 на границе $z = 0$ максимальное значение.

Волновое поле $u_{1C}^{\rm inc}(x, z, k_1)$ при $x < 0$, падающее на вертикальную границу раздела, в этом случае имеет следующее выражение (см. [3])

$$u_{1C}^{\rm inc}(x, z, k_1) = \frac{\psi_{1C}\, e^{ik_1(x+x_0)}}{2\,\pi\, 2^{2/3}\, k_1^{1/3}} \int\limits_{\infty e^{i(\pi-\delta)}}^{\infty e^{i\varepsilon}} e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi} \times$$

$$\times \left[\frac{w_1(\xi+\nu_1)}{w_1'(\xi)}\right] \left[1 + O(k_1^{-1/3})\right] d\xi, \qquad (1.16)$$

где

$$(\psi_{1C})^3 = \left(\frac{(c_1)_z'(0)}{c_1(0)}\right) < 0;$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{k_1}{2}\right)^{1/3} x\,(\psi_{1C})^2; \quad \nu_1 = k_1^{2/3}\, 2^{1/3}\, \psi_{1C}\, z < 0. \qquad (1.17)$$

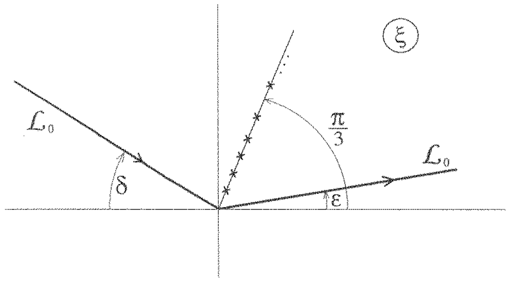

Рис. 3

Контур интегрирования $\mathcal{L}_0$ в интеграле (1.16) проведен в верхней полуплоскости комплексного переменного ξ так, что он проходит через начало координат на плоскости комплексного переменного ξ, охватывая в положительном направлении полупрямую $\arg\xi = \pi/3$, на которой лежат корни функции $w_1'(\xi)$, (см. рис. 3). Параметры ε и δ могут принимать любые значения из соответствующих промежутков

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < \delta < \frac{2\,\pi}{3}.$$

Пользуясь теоремой о вычетах, интеграл можно представить в виде ряда, просуммированного по числу корней производной функции Эйри $w_1'(\xi)$:

$$u_{1C}^{\rm inc}(x,z,k_1) \sim \frac{i\,\psi_{1C}\,e^{ik_1(x+x_0)}}{2^{2/3}\,k_1^{1/3}} \sum_{q=1} e^{i(\sigma_1+\sigma_0)\xi_q'} \left[\frac{w_1(\xi_q'+\nu_1)}{\xi_q'\,w_1(\xi_q')}\right]. \quad (1.18)$$

В этом случае падающее поле в главном приближении имеет следующее выражение

$$u_{1C}^{\rm inc}(x,z,k_1) \sim e^{i\,k_1\,x} \sum_{q=1} U_{1Cq}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1,k_1), \quad (1.19)$$

где

$$U_{1Cq}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1,k_1) = \mathcal{C}_q^{\rm inc} e^{i\,\sigma_1\,\xi_q'} w_1(\xi_q'+\nu_1),\; \mathcal{C}_q^{\rm inc} = \frac{i\,\psi_{1C}\,e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_q'}}{2^{2/3}k_1^{1/3}\xi_q' w_1(\xi_q')}. \quad (1.20)$$

Функции $U_{1Cq}^{\rm inc}$, $q = 1,2,\ldots$, также как и функции $U_{1Bp}^{\rm inc}$, $p = 1,2,3,\ldots$, удовлетворяют параболическому уравнению Леонтовича–Фока (1.15) с той лишь разницей, что $\psi_{1C} < 0$, $\arg\xi_q' = \pi/3$ и $\mathrm{Re}\,\xi_q' > 0$, $q = 1,2,\ldots$.

Падающее поле в главном приближении может быть представлено формулами (1.5)–(1.6), (1.8) (в случае A_1) и (1.19), (1.20) (в случае C_1). Волны соскальзывания номеров $q > 1$ убывают экспоненциально быстрее волн с номером $q = 1$. Поэтому асимптотически в главном приближении можно ограничиться волной соскальзывания, соответствующей первому корню ξ_1'. В то же время, для волн шепчущей галереи (формулы (1.9)–(1.14)) падающее поле представляется в виде суммы медленно убывающих слагаемых, $p = 1,2,3,\ldots$. Следовательно, в случае B_1 асимптотически в главном приближении следует учитывать серию волн шепчущей галереи, отвечающих первым корням ζ_p', $p = 1,2,3,\ldots$.

Приведем несколько первых корней функций $v'(-\zeta_p')$, $w_1'(\xi_p')$ и значение этих функций в корнях соответствующей производной, (см. формулы (1.11), (1.18)):

$$\zeta_1' = 1.019;\quad \zeta_2' = 3.248;\quad \zeta_3' = 4.820;\quad \ldots;\, v(-1.019) = 0.9494;$$

$$v(-3.248) = -0.7426;\; v(-4.820) = 0.6743;\; \ldots. \quad (1.21)$$

Если функцию $w_1(t)$ запишем через вещественную функцию Эйри $v(t)$ соотношением

$$w_1(te^{i\pi/3}) = 2e^{i\pi/6}v(-t),$$

и воспользуемся формулами (1.21), то найдем значения w_1 в корнях ее производной:

$$\xi'_s = \zeta'_s\, e^{i\pi/3}, \quad w'_1(\xi'_s) = 2\, e^{i\, 5\, \pi/6}\, v'(-\zeta'_s). \tag{1.22}$$

2. Нахождение отраженного и преломленного полей

В предыдущем пункте в области Ω_1 найдено волновое поле, излучаемое точечным источником в точке $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$, и набегающее на вертикальную границу раздела $x = 0$, $z \geqslant 0$.

Функция $u = U_1^{\rm inc}$ при $x < 0$ является асимптотическим решением уравнения Леонтовича–Фока [1] в области с неоднородной (однородной) скоростью распространения

$$L_1 u \equiv i\frac{\partial u}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu_1^2} - \nu_1 u = 0, \ \left(L_1 u_A \equiv i\frac{\partial u_A}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial^2 u_A}{\partial \nu_1^2} = 0\right), \tag{2.1}$$

но перестает быть решением уравнения (2.1) при $x > 0$, так как скорость изменяется скачком при $x = 0$.

Сделаем естественное предположение, что решение u, удовлетворяющее уравнению Леонтовича–Фока (2.1) при $x < 0$, будет удовлетворять аналогичному уравнению и при $x > 0$

$$L_2 u \equiv i\frac{\partial u}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu_2^2} - \nu_2 u = 0, \ \left(L_2 u_A \equiv i\frac{\partial u_A}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial^2 u_A}{\partial \nu_2^2} = 0\right). \tag{2.2}$$

В дальнейшем покажем, что это предположение позволит найти решение, асимптотически (при $k_j \to \infty$, $j = 1, 2$) удовлетворяющее всем условиям задачи.

Итак, предположим, что решение u_1 при $x < 0$ и решение u_2 при $x > 0$ можно представить в виде:

$$u_1 = e^{ik_1 x} U_1^{\rm inc}(\sigma_1, \nu_1) + \mathcal{R} e^{-ik_1 x} U_1^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1), \tag{2.3}$$

$$u_2 = \mathcal{T} e^{ik_2 x} U_2^{\rm tr}(\sigma_2, \nu_2). \tag{2.4}$$

Решения u_1, u_2 удовлетворяют задаче (1.1)–(1.3), причем при $x > 0$, $z = 0$, выполняется однородное условие Неймана. Функции $U_1^{\rm inc}$, $U_1^{\rm ref}$,$U_2^{\rm tr}$ являются решениями соответствующих уравнений Леонтовича–Фока (2.1), (2.2).

Коэффициенты $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ определим из условия сопряжения при $x = 0$

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Кроме того, на вертикальной границе $x = 0$ выполняются начальные условия

$$U_1^{\text{inc}} = U_1^{\text{ref}} = U_2^{\text{tr}}. \tag{2.6}$$

Тогда из условия (2.5) с учетом соотношения (2.6) найдем выражения для $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$. Коэффициенты отражения $\mathcal{R}$ и преломления $\mathcal{T}$ получаются такими же, как и в случае нормального падения волны на границу раздела $x = 0$:

$$\mathcal{R} = \frac{c_2(z) - c_1(z)}{c_2(z) + c_1(z)}; \quad \mathcal{T} = \frac{2\, c_2(z)}{c_2(z) + c_1(z)}. \tag{2.7}$$

Преломленное волновое поле u_2^{tr} в области $x > 0, z > 0$, является решением смешанной начально-краевой задачи

$$\left.\begin{array}{ll} L_2\, U_2^{\text{tr}} = 0, & \sigma_2 > 0, \quad \nu_2 > 0, \\ \dfrac{\partial U_2^{\text{tr}}}{\partial \nu_2} = 0, & \sigma_2 > 0, \quad \nu_2 = 0, \\ U_2^{\text{tr}}|_{\sigma_2 = 0} = U_1^{\text{inc}}, & \sigma_2 = 0, \quad \nu_2 > 0, \\ U_2^{\text{tr}} \to 0, & \qquad \nu_2 \to \infty. \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

Отраженное поле U_1^{ref} в области Ω_1 является решением задачи:

$$\left.\begin{array}{ll} L_1\, U_1^{\text{ref}} = 0, & \sigma_1 < 0, \quad \nu_1 > 0, \\ \dfrac{\partial U_1^{\text{ref}}}{\partial \nu_1} = 0, & \sigma_1 > 0, \quad \nu_1 = 0, \\ U_1^{\text{ref}}|_{\sigma_1 = 0} = U_1^{\text{inc}}, & \sigma_1 = 0, \quad \nu_1 > 0, \\ U_1^{\text{ref}} \to 0, & \qquad \nu_1 \to \infty. \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

Решение этих задач найдем с помощью соответствующих функций Грина $G_j(\sigma_j, \nu_j; \sigma_j', \nu_j')$:

$$U_1^{\text{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = \int\limits_0^{\infty} i\, U_1^{\text{inc}}(\sigma_1' = 0, \nu_1')\, G_1(\sigma_1, \nu_1; \sigma_1' = 0, \nu_1')\, d\nu_1', \tag{2.10}$$

$$U_2^{\rm tr}(\sigma_2,\nu_2)=\int\limits_0^\infty i\,U_1^{\rm inc}(\sigma_2'=0,\nu_2')\,G_2(\sigma_2,\nu_2;\sigma_2'=0,\nu_2')\,d\nu_2'. \qquad (2.11)$$

Выражение для функции Грина ищется стандартным образом:

$$G(\sigma,\nu;0,\nu')=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^\infty e^{i\sigma\zeta}\frac{V_1(\nu_<)V_2(\nu_>)}{W(V_1,V_2)}d\zeta. \qquad (2.12)$$

Функции $V_{1,2}$ удовлетворяют уравнению $\tilde{L}_j\,V_{1,2}=0$ и граничным условиям при $\nu=0$ и $\nu\to\infty$ соответственно, W— вронскиан, причем в случае неоднородных скоростей в средах

$$\tilde{L}_j=\frac{\partial^2}{\partial\nu_j^2}-(\nu_j+\zeta),\qquad j=1,2,$$

а для сред с постоянной скоростью распространения оператор $\tilde{L}_j$ переходит в следующий

$$\tilde{L}_j=\frac{\partial^2}{\partial\nu_j^2}-\zeta,\qquad j=1,2.$$

Выпишем функции Грина для рассматриваемых вариантов скоростей распространения (1.4) в средах Ω_j, $j=1,2$.

В средах с постоянной скоростью распространения A_j, $j=1,2$, функция Грина с однородным условием Неймана на границе $z=0$ и убывающая при $z\to\infty$ для уравнения Леонтовича–Фока (1.7) имеет следующий вид

$$G_{jA}(\sigma_j,\nu_j;0,\nu_j')=\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\sigma_j}}\left[e^{\frac{i(\nu_j-\nu_j')^2}{4\sigma_j}}+e^{\frac{i(\nu_j+\nu_j')^2}{4\sigma_j}}\right]. \qquad (2.13)$$

Для функции Грина при $\psi_j>0,\nu_j\geqslant 0$, т.е. в случае B_j, $j=1,2$, получаем выражение

$$G_{jB}(\sigma_j,\nu_j;0,\nu_j')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i\sigma_j\zeta}\left[\frac{v(\zeta+\nu_{j>})}{v'(\zeta)}-\frac{w_2(\zeta+\nu_{j>})}{w_2'(\zeta)}\right]\times$$

$$\times[v(\zeta+\nu_{j<})w_2'(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{j<})v'(\zeta)]d\zeta,\quad \nu_j\geqslant 0,\quad \nu_j'\geqslant 0. \qquad (2.14)$$

В формуле (2.14) контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 2.

И, наконец, в случае C_j, $j=1,2$, $\psi_j<0$, $\nu_j\geqslant 0$ функция Грина имеет следующее интегральное представление

$$G_{jC}(\sigma_j,\nu_j;0,\nu_j')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty e^{i(\pi-\delta)}}^{\infty e^{i\varepsilon}} e^{i\sigma_j\xi}\left[\frac{w_1(\xi+\nu_{j>})}{w_1'(\xi)}\right]\times$$

$$\times[w_2(\xi+\nu_{j<})w_1'(\xi)-w_1(\xi+\nu_{j<})w_2'(\xi)]d\xi,\quad \nu_j\leqslant 0,\quad \nu_j'\leqslant 0,\ (2.15)$$

в котором контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}_0$ формулы (1.16), (см. рис. 3).

Итак, из области Ω_1 на вертикальную границу раздела $x=0$, $z\geqslant 0$ набегает волна $u_1^{\rm inc}=e^{ik_1x}U_1^{\rm inc}$, выражение для которой выпишем в случае трех вариантов скорости (1.4).

В случае постоянной скорости в Ω_1 падающая волна определена формулой (1.8):

$$U_{1A}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1)=\mathcal{A}\frac{e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\,(\sigma_1+\sigma_0)}}}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_0)}},\quad \mathcal{A}=\frac{e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{\sqrt{\pi}\,2^{2/3}\,k_1^{1/3}}.$$

В среде Ω_1 с минимумом скорости на границе $z=0$, т.е. в случае B_1, на вертикальную границу набегает волна шепчущей галереи номера p, соответствующая выражению (1.14):

$$U_{1Bp}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1)=\mathcal{B}_p^{\rm inc}e^{-i\sigma_1\zeta_p'}v(-\zeta_p'+\nu_1),\quad p=1,2,3,\dots,$$

где

$$\mathcal{B}_p^{\rm inc}=\frac{i\psi_1\,e^{ik_1x_0}\,e^{-i\sigma_0\zeta_p'}}{2^{2/3}k_1^{1/3}(-\zeta_p')v(-\zeta_p')}.$$

Если скорость в среде Ω_1 имеет максимум при $z=0$, следовательно рассматривается случай C_1, то, набегающая на вертикальную границу раздела волна, является волной соскальзывания q-го порядка и определена формулой (1.19) :

$$U_{1Cq}^{\rm inc}(\sigma_1,\nu_1,k_1)=\mathcal{C}_q^{\rm inc}\,e^{i\,\sigma_1\,\xi_q}w_1(\xi_q+\nu_1),\quad \mathcal{C}_q^{\rm inc}=\frac{i\,\psi_1\,e^{ik_1x_0}\,e^{i\,\sigma_0\,\xi_q}}{2^{2/3}\,k_1^{1/3}\,\xi_q\,w_1(\xi_q)}.$$

Обычно $q=1$, так как слагаемые U_{1Cq} при $q>1$ экспоненциально затухают быстрее по сравнению с U_{1C1}.

Отраженное $u_1^{\mathrm{ref}} = e^{-ik_1x}\mathcal{R}U_1^{\mathrm{ref}}$ и преломленное $u_2^{\mathrm{tr}} = e^{ik_2x}\mathcal{T}U_2^{\mathrm{tr}}$ поля вычисляются по формулам (2.3), (2.4), (2.7):

$$u_1 = e^{ik_1x}U_1^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1) + \mathcal{R}e^{-ik_1x}U_1^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1),$$

$$u_2 = \mathcal{T}e^{ik_2x}U_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2),$$

где

$$\mathcal{R} = \frac{c_2(z) - c_1(z)}{c_2(z) + c_1(z)}; \quad \mathcal{T} = \frac{2\,c_2(z)}{c_2(z) + c_1(z)}.$$

Функции U_1^{inc}, U_1^{ref}, U_2^{tr} находятся в виде интегралов (2.10)–(2.11), в которые в каждом из рассматриваемых случаев (см. формулу (1.4)) следует подставлять соответствующие функции Грина, определенные формулами (2.13)–(2.15).

3. Частные случаи нахождения отраженного и преломленного полей

Перейдем к нахождению функций U_1^{ref}, U_2^{tr} по формулам (2.10)–(2.11), используя найденные нами функции Грина (2.13)–(2.15) и решения U_1^{inc} (1.8), (1.14), (1.20) для рассматриваемых случаев (1.4).

Исследуем сначала задачу об отражении и преломлении волны шепчущей галереи, набегающей на вертикальную границу раздела двух сред с различными скоростями. Причем и в среде Ω_1 и в среде Ω_2 скорости имеют минимум на границе полупространства $z = 0$. Иначе, рассматриваем случай B_1, переходящий в случай B_2. Обозначим это так: $B_1 \to B_2$.

Затем решим задачи о переходе $A_1 \to B_2$ и $C_1 \to B_2$.

Всего можно рассмотреть девять вариантов.

3.1. Преобразование волны шепчущей галереи в сумму волн шепчущей галереи: $B_1 \to B_2$.

Пусть на вертикальную границу, разделяющую две области с положительным изменением градиента скорости, набегает p-я волна шепчущей галереи. Подобный случай, однако без точечного источника в среде Ω_1 и без вычисления отраженного поля, был исследован в работе Н.В. Сивицкой, В.Б. Филиппова [4],

Если в формуле (2.11), где функция Грина имеет вид (2.14), поменять порядок интегрирования и продеформировать контур $\mathcal{L}$, (см. рис. 2) в $\mathcal{L}_N$ так, что он будет охватывать отрицательную полуось $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, начиная с $(N+1)$-го корня производной

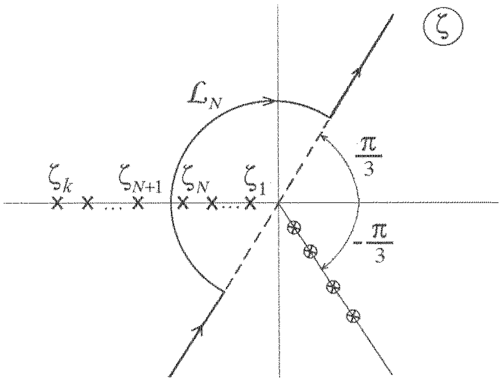

Рис. 4.

функции Эйри (см. рис. 4), то преломленная волна может быть представлена в виде

$$U^{\mathrm{tr}}_{2B}(\sigma_2,\nu_2)=\sum_{n=1}^{N}U^{\mathrm{tr}}_{2Bn}(\sigma_2,\nu_2)+\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty U^{\mathrm{inc}}_{1Bp}(\sigma_2'=0,\nu_2')d\nu_2'\int\limits_{L_N}e^{i\sigma_2\zeta}\times$$

$$\times\frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v'(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2'(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{2<})v'(\zeta)]d\zeta. \qquad (3.1.1)$$

Здесь

$$U^{\mathrm{tr}}_{2B,n}(\sigma_2,\nu_2)=T_{pn}v(-\zeta_n'+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}. \qquad (3.1.2)$$

Коэффициенты трансформации T_{pn} в случае, когда обе среды являются положительно градиентными, равны следующим выражениям

$$T_{pn}=\frac{-\mathcal{B}_p^{\mathrm{inc}}}{v^2(-\zeta_n')(-\zeta_n')}\int\limits_0^\infty v(-\zeta_p'+\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2')v(-\zeta_n'+\nu_2')d\nu_2'. \qquad (3.1.3)$$

Множитель при ν_2' в аргументе функции Эйри обозначим через α:

$$\alpha=\frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2}=\frac{c_2(0)}{c_1(0)}\left(\frac{c_1'(0)}{c_2'(0)}\right)^{1/3}.$$

Итак, в случае $B_1\to B_2$, при падении на вертикальную границу $x=0$ волны шепчущей галереи номера p:

$$u^{\mathrm{inc}}_{1Bp}=e^{i\,k_1\,x}\mathcal{B}_p^{\mathrm{inc}}e^{i\sigma_1(-\zeta_p')}v(-\zeta_p'+\nu_1), \qquad (3.1.4)$$

где

$$\mathcal{B}_p^{\rm inc}=\frac{i\psi_1\, e^{ik_1x_0}\, e^{i\sigma_0(-\zeta_p')}}{2^{2/3}k^{1/3}(-\zeta_p')v(-\zeta_p')},$$

возникает серия волн шепчущей галереи (см. рис. 5) номеров $n=1,2,3,\ldots$,

$$u_{2B}^{\rm tr}=e^{ik_2x}\mathcal{T}\left\{\sum_{n=1}^{N}T_{pn}\,v(-\zeta_n'+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}+\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\nu_2'\int\limits_{L_N}U_{1p}^{\rm inc}(0,\nu_2')\times\right.$$

$$\left.\times e^{i\sigma_2\zeta}\frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v'(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2'(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{2<})v'(\zeta)]d\zeta\right\}. \qquad (3.1.5)$$

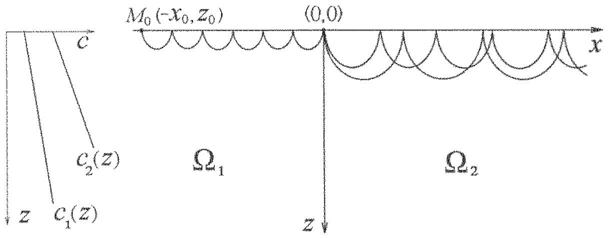

Рис. 5.

В статье [4] были проведены расчеты на ЭВМ для коэффициентов трансформации T_{pn}. Оказалось, что волны шепчущей галереи номеров $p=1,2$, отвечающие падающему полю, переходят, в главном, в волны шепчущей галереи преломленного поля номеров $n=1,2$, слабо возбуждая волны других номеров $n\geqslant 3$. Однако, при $p\geqslant 3$ главные члены асимптотических разложений, отвечающие падающему и преломленному полям, приходятся на номера $n\neq p$.

Обратимся к вычислению отраженного поля $u_{1B}^{\rm ref}=\mathcal{R}e^{-ik_1x}U_{1B}^{\rm ref}$. Оно отыскивается точно так же, как и преломленное поле. Окончательная формула намного проще, так как волны шепчущей галереи номера p возбуждают отраженные волны тоже номера p. Напишем формулу, подобную формуле (3.1.5).

Падающее на вертикальную границу $x=0$ поле шепчущей галереи $U_{1p}^{\rm inc}$, номера p определено формулой (3.1.4). Тогда отраженное поле представляется в виде

$$u_{1B}^{\rm ref}=e^{-i\,k_1\,x}\mathcal{R}U_{1Bp}^{\rm ref}(\sigma_1,\nu_1), \qquad (3.1.6)$$

где

$$U^{\text{ref}}_{1Bp}(\sigma_1,\nu_1)=\int\limits_0^\infty i\,\mathcal{B}^{\text{inc}}_p\,v(-\zeta'+\nu'_1)\,G_1(\sigma_1,\nu_1;\sigma'_1=0,\nu'_1)\,d\nu'_1. \quad (3.1.7)$$

Функция Грина в области Ω_1 выражается формулой (2.14)

$$G_{1B}(\sigma_1,\nu_1;0,\nu'_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i\sigma_1\zeta}\left[\frac{v(\zeta+\nu_{1>})}{v'(\zeta)}-\frac{w_2(\zeta+\nu_{1>})}{w'_2(\zeta)}\right]\times$$

$$\times[v(\zeta+\nu_{1<})w'_2(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{1<})v'(\zeta)]d\zeta, \quad \nu_1\geqslant 0, \quad \nu'_1\geqslant 0.$$

В последней формуле контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 2. Если теперь контур интегрирования $\mathcal{L}$ преобразовать в контур $\mathcal{L}_N$, (см. рис. 4), выделяя из интеграла конечную сумму собственных функций типа шепчущей галереи номеров $n=1,2,\ldots,N$, то

$$U^{\text{ref}}_{1Bp}(\sigma_1,\nu_1)=\sum_{n=1}^{N}U^{\text{ref}}_{1Bp,n}(\sigma_1,\nu_1)+\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\nu'_1\int\limits_{L_N}\mathcal{B}^{\text{inc}}_p v(-\zeta'_p+\nu'_1)e^{i\sigma_1\zeta}\times$$

$$\times\frac{v(\zeta+\nu_{1>})}{v'(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{1<})w'_2(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{1<})v'(\zeta)]d\zeta. \quad (3.1.8)$$

Здесь

$$U^{\text{ref}}_{1Bp,n}(\sigma_1,\nu_1)=R_{pn}v(-\zeta'_n+\nu_1)e^{i\sigma_1(-\zeta'_n)}.$$

Коэффициенты отражения R_{pn} равны [5]

$$R_{pn}=\frac{-\mathcal{B}^{\text{inc}}_p}{v^2(-\zeta'_n)(-\zeta'_n)}\int\limits_0^\infty v(-\zeta'_p+\nu'_1)v(-\zeta'_n+\nu'_1)d\nu'_1=\mathcal{B}^{\text{inc}}_p, \quad (3.1.9)$$

так как

$$\int\limits_0^\infty v(-\zeta'_p+\nu'_1)v(-\zeta'_n+\nu'_1)d\nu'_1=\begin{cases}0, & \text{для } p\neq n,\\ -v^2(-\zeta'_n)(-\zeta'_n), & \text{для } p=n.\end{cases}$$

Следовательно,

$$u^{\text{ref}}_{1Bp}=\mathcal{R}\,e^{-i\,k_1\,x}\,U^{\text{inc}}_{1Bp}. \quad (3.1.10)$$

3.2. Переход однородной приповерхностной волны в сумму волн шепчущей галереи: $A_1 \to B_2$**.**

Перейдем к рассмотрению волны, набегающей из однородной среды Ω_1 на вертикальную границу раздела со средой Ω_2, имеющей минимальное значение скорости на границе $z = 0$.

Отметим, что падающее поле $U_{1A}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1, \nu_1)$ в этом случае определено формулой (1.8) и при $\sigma_1 = 0$ равно выражению

$$U_{1A}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1, \nu_1)\Big|_{\sigma_1=0} = \mathcal{A}\,\frac{e^{i\,\frac{\nu_1^2}{4\sigma_0}}}{\sqrt{\sigma_0}}, \quad \mathcal{A} = \frac{e^{i\,\pi/4}e^{ik_1x_0}}{2^{2/3}k_1^{1/3}\sqrt{\pi}}. \qquad (3.2.1)$$

Отраженное и преломленное поля для случая $A_1 \to B_2$ (из однородной среды Ω_1 в область с положительным ростом градиента скорости от границы $z = 0$) определяются следующими формулами

$$u_{1A}^{\mathrm{ref}} = \frac{c_2(z) - c_1(z)}{c_2(z) + c_1(z)} e^{-ik_1x} U_{1A}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1, \nu_1), \qquad (3.2.2)$$

$$u_2 \equiv u_{2B}^{\mathrm{tr}} = \frac{2\,c_2(z)}{c_2(z) + c_1(z)} e^{ik_2x} U_{2B}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2). \qquad (3.2.3)$$

Найдем сначала поле, отраженное от вертикальной границы $x = 0$. Подставляя в формулу (2.10) значения функции U_{1A}^{inc} из (3.2.1) и функции Грина G_{1A}, определенной формулой (2.13), найдем функцию U_{1A}^{ref}:

$$U_{1A}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = \frac{e^{i\pi/4}\mathcal{A}}{2\sqrt{\pi\sigma_0\sigma_1}} \int\limits_0^{\infty} e^{\frac{i\nu_1'^2}{4\sigma_0}} \left[e^{\frac{i(\nu_1 - \nu_1')^2}{4\sigma_1}} + e^{\frac{i(\nu_1 + \nu_1')^2}{4\sigma_1}} \right] d\nu_1'.$$

Преобразовывая подынтегральное выражение, получим

$$U_{1A}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = \frac{e^{i\pi/2}\mathcal{A}}{\sqrt{\sigma_0 + \sigma_1}} e^{\frac{i\nu_1^2}{4(\sigma_0+\sigma_1)}}.$$

В координатах (x, z) отраженная от вертикальной границы волна при $z \ll x$ в случае $A_1 \to B_2$ запишется в виде

$$u_{1A}^{\mathrm{ref}}(x, z, k_1) \sim \frac{c_2(z) - c_1(z)}{c_2(z) + c_1(z)} e^{i\,\pi/2} e^{-i\,k_1\,x} U_{1A}^{\mathrm{inc}} =$$

$$\frac{c_2(z)-c_1(z)}{c_2(z)+c_1(z)}\frac{e^{i\,3\pi/4}e^{i\,k_1\,(-x+x_0)}e^{i\,k_1\,\frac{z^2}{2\,(x+x_0)}}}{\sqrt{2\,\pi\,k_1\,(x+x_0)}}. \qquad (3.2.4)$$

Найдем преломленное поле для случая $A_1\to B_2$. Из формулы (2.4) имеем

$$u^{\rm tr}_{2B}(x,z,k_2)=\frac{2\,c_2(z)}{c_2(z)+c_1(z)}e^{i\,k_2\,x}U^{\rm tr}_{2B}(\sigma_2,\nu_2).$$

Подставим в формулу (2.11) выражения для функции Грина G_{2B} из (2.14) и для падающего поля, определенного выражением (3.2.1). Получим функцию $U^{\rm tr}_{2B}(\sigma_2,\nu_2)$ в виде двойного интеграла.

Поменяем порядок интегрирования в этом интеграле и продеформируем контур $\mathcal{L}$ (рис. 2) в контур $\mathcal{L}_N$ (рис. 4). Тогда для поля, преломленного в среду Ω_2, получим

$$U^{\rm tr}_{2B}(\sigma_2,\nu_2)=\sum_{n=1}^{N}U^{\rm tr}_{2Bn}(\sigma_2,\nu_2)+\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\nu_2'\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\sigma_0}}e^{\frac{i\,(\nu_2')^2\,k_1^{4/3}}{4\,\sigma_0\,k_2^{4/3}\,\psi_{2B}{}^2}}\times$$

$$\times\int\limits_{L_N}e^{i\sigma_2\zeta}\frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v'(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2'(\zeta)-w_2(\zeta+\nu_{2<})v'(\zeta)]d\zeta, \quad (3.2.5)$$

где

$$U^{\rm tr}_{2Bn}(\sigma_2,\nu_2)=T_n\,v(-\zeta_n'+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}. \qquad (3.2.6)$$

Коэффициенты трансформации T_n равны (в случае $A_1\to B_2$):

$$T_n=\frac{-\mathcal{A}}{v^2(-\zeta_n')(-\zeta_n')\sqrt{\sigma_0}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{i(\nu_2')^2c_2^2}{4\sigma_0c_1^{4/3}(c_2')^{2/3}}}v(-\zeta_n'+\nu_2')d\nu_2'. \qquad (3.2.7)$$

Запишем окончательное выражение преломленной в область Ω_2 волны в главном приближении

$$u^{\rm tr}_{2B}(\sigma_2,\nu_2)\sim\frac{2\,c_2(z)}{c_1(z)+c_2(z)}\frac{e^{i3\pi/4}\,e^{ik_2x}\,e^{ik_1x_0}}{\sqrt{2\,k_1\,\pi\,x_0}}\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}}{(-\zeta_n')}\frac{v(-\zeta_n'+\nu_2)}{v(-\zeta_n')}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{\frac{i\,(\nu_2')^2\,k_1^{4/3}}{4\,\sigma_0\,k_2^{4/3}\,\psi_{2B}{}^2}}\frac{v(-\zeta_n'+\nu_2')}{v(-\zeta_n')}d\nu_2', \qquad (3.2.8)$$

3.3 Переход волны соскальзывания в сумму волн шепчущей галереи: $C_1 \to B_2$.

Перейдем к нахождению волн, отраженных и преломленных от вертикальной границы раздела между средой Ω_1 с максимумом скорости на границе $z = 0$ и средой Ω_2, имеющей минимум скорости. Падающее поле, распространяющееся от точечного источника, имеет вид волны соскальзывания (1.19), (1.20). Интенсивность волны соскальзывания наиболее существенна для первого корня производной функции Эйри w_1', т.е. для $q = 1$ (см. формулы (1.21), (1.22)):

$$u_{1C}^{\rm inc}(x, z, k_1) \sim e^{i\,k_1\,x}\,U_{1C1}^{\rm inc}(\sigma_1, \nu_1, k_1), \qquad (3.3.1)$$

где

$$U_{1C1}^{\rm inc}(\sigma_1, \nu_1, k_1) = \mathcal{C}_1^{\rm inc} e^{i\,\sigma_1\,\xi_1'} w_1(\xi_1' + \nu_1),$$

$$\mathcal{C}_1^{\rm inc} = \frac{i\,\psi_{1C}\,e^{ik_1x_0}e^{i\sigma_0\xi_1'}}{2^{2/3}k_1^{1/3}\xi_1' w_1(\xi_1')}, \quad (\psi_{1C})^3 = \left(\frac{(c_1)_z'(0)}{c_1(0)}\right) < 0. \qquad (3.3.2)$$

Отраженное поле имеет следующее выражение

$$u_1^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1) = \mathcal{R} e^{-i\,k_1\,x} U_{1C}^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1). \qquad (3.3.3)$$

Здесь функция $U_{1C}^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1)$ может быть определена по формуле (2.10)

$$U_{1C}^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1) = \int\limits_0^\infty i\,\mathcal{C}_1^{\rm inc}\,w_1(\xi_1' + \nu_1')\,G_{1C}(\sigma_1, \nu_1; 0, \nu_1')\,d\nu_1'.$$

Входящие в эту формулу функция Грина G_{1C} найдена в виде интеграла (2.15). Поменяем порядок интегрирования и продеформируем контур $\mathcal{L}_0$ для функции Грина, (см. рис. 3) в контур, охватывающий полуось $\arg\xi = \pi/3$, начиная с $Q+1$-го корня производной функции Эйри. Тогда отраженная волна может быть представлена в виде

$$U_{1C}^{\rm ref}(\sigma_1, \nu_1) \sim \sum_{q=1}^{Q} R_{1q} e^{i\sigma_1\xi_q'} w_1(\xi_q' + \nu_1). \qquad (3.3.4)$$

Коэффициенты отражения R_{1q} выражаются следующим интегралом

$$R_{1q} = \frac{-\mathcal{C}_1^{\rm inc}}{w_1^2(\xi_1')(\xi_1')} \int\limits_0^\infty w_1(\xi_1' + \nu_1') w_1(\xi_q' + \nu_1') d\nu_1' = \mathcal{C}_1^{\rm inc}, \qquad (3.3.5)$$

так как

$$\int\limits_0^\infty w_1(\xi_1'+\nu_1')w_1(\xi_q'+\nu_1')d\nu_1' = \begin{cases} 0, & \text{для } 1\neq q, \\ -w_1^2(\xi_1')(\xi_1'), & \text{для } 1=q. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u_{1C1}^{\mathrm{ref}} = \mathcal{R}\, e^{-i\,k_1\,x}\, U_{1C1}^{\mathrm{inc}}. \tag{3.3.6}$$

Рассмотрим волну, преломленную в среду Ω_2 при падении на вертикальную линию раздела волны соскальзывания. Аналогично пути, которым определено отраженное поле, найдем преломленное

$$U_{2Bq=1}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2) = \sum_{n=1}^{N} U_{2Bq=1,n}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2) + \\ + \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty U_{1C1}^{\mathrm{inc}}(\sigma_2'=0,\nu_2')d\nu_2' \int\limits_{L_0'} e^{i\sigma_2\zeta} \times \\ \times \frac{v(\zeta+\nu_{2>})}{v'(\zeta)}[v(\zeta+\nu_{2<})w_2'(\zeta) - w_2(\zeta+\nu_{2<})v'(\zeta)]d\zeta. \tag{3.3.7}$$

Здесь

$$U_{2Bq=1,n}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2) = T_{q=1,n}\, v(-\zeta_n'+\nu_2)e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}. \tag{3.3.8}$$

Коэффициенты трансформации $T_{q=1,n}$ в случае $C_1 \to B_2$, когда в среде Ω_1 скорость имеет максимум на границе полупространства, а среда Ω_2 является положительно градиентной, находятся по формуле:

$$T_{q=1,n} = \frac{-\mathcal{C}_1^{\mathrm{inc}}}{v^2(-\zeta_n')(-\zeta_n')}\int\limits_0^\infty w_1\Big(\xi_1' - \frac{k_1^{2/3}(-\psi_1)}{k_2^{2/3}\psi_2}\nu_2'\Big)v(-\zeta_n'+\nu_2')d\nu_2'. \tag{3.3.9}$$

Здесь $(-\psi_1)>0$, $\psi_2>0$ и $\nu_2'>0$. Перепишем коэффициенты $T_{q=1,n}$ в виде

$$T_{q=1,n} = \frac{-\mathcal{C}_1^{\mathrm{inc}}}{v^2(-\zeta_n')(-\zeta_n')}\int\limits_0^\infty w_1(\xi_1'-\alpha\nu_2')v(-\zeta_n'+\nu_2')d\nu_2', \tag{3.3.10}$$

где коэффициент α равен

$$\alpha = \left(\frac{-c_1'}{c_2'}\right)^{1/3} \frac{c_2}{c_1}\Big|_{z=0} > 0.$$

Для преломленного поля в ситуации, когда $C_1 \to B_2$, получим

$$u_{2B}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2) \sim \frac{-2\,\mathcal{C}_1^{\mathrm{inc}}\, e^{ik_2x}\, c_2(z)}{c_1(z)+c_2(z)} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{i\sigma_2(-\zeta_n')}}{(-\zeta_n')} \frac{v(-\zeta_n'+\nu_2)}{v(-\zeta_n')} \times$$
$$\times \int_0^\infty w_1(\xi_1' - \alpha\nu_2') \frac{v(-\zeta_n'+\nu_2')}{v(-\zeta_n')} d\nu_2'. \tag{3.3.11}$$

Литература

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.*— Журн. эксперим. и теор. физики, **16**, No. 7, (1946), 557–573.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л. (1974).
3. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, С. Ю. Фадеева, *Комбинированный метод расчета поля точечного источника в поверхностном волноводе.*— Зап. научн. семин. ПОМИ, **324**, (2005), 110–120.
4. Н. В. Сивицкая, В. Б. Филиппов, *О распространении волн шепчущей галереи в среде с вертикальной границей.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, **179**, (1989), 147–151.
5. А. А. Дородницын, *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.* — Успехи матем. наук АН СССР,**VII**, вып. 6,No. 52, (1952), 3–96.

Kirpichnikova N. Ya., Fadeeva S. Yu., Philippov V. B. Diffraction of the near-surface waves on a vertical interface of media.

The problem of diffraction of waves, raised by a point source, on a vertical interface of media is investigated. The reflected and refracted waves fields are obtained by means of the parabolic equation method. The corresponding transformation coefficients are found for the Neyman boundary condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 мая 2006 г.