Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

П. П. Никитин

ОПИСАНИЕ КОММУТАНТА ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $GL_n(\mathbb{C})$ В СМЕШАННЫХ ТЕНЗОРАХ

Введение

Работа посвящена исследованию двух семейств вложенных конечномерных алгебр – алгебр Брауэра и их важных подалгебр, разделенных алгебр Брауэра, – возникших в теории классических групп и в современных исследованиях квантовых групп.

История возникновения этих алгебр такова. Пусть классическая группа ($GL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $Sp_n(\mathbb{C})$) действует в конечномерном векторном пространстве V. Рассмотрим диагональное действие этой группы в тензорном произведении $V^{\otimes f}$, определяемое формулой

$$A \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_f) = Av_1 \otimes \ldots \otimes Av_f .$$

Рассмотрим также действие симметрической группы S_f в этом пространстве,

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_f) = (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(f)}), \quad \sigma \in S_f .$$

В теории алгебр Брауэра принято буквой n обозначать параметр алгебры (размерность пространства V), а число тензорных сомножителей – буквой f, поэтому для симметрической группы используется несколько непривычное обозначение S_f. Несложно проверить, что построенные действия групп $GL_n(\mathbb{C})$ и S_f коммутируют. На самом деле справедливо намного более сильное утверждение, именно, как доказал в 1901 году И. Шур в своей диссертации [26], эти действия порождают коммутанты друг друга. Этот факт носит название *двойственности Шура–Вейля* и является одним из центральных фактов теории представлений обеих групп.

Например, вопрос о разложении диагонального действия полной линейной группы в $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$ на неприводимые компоненты сводится к описанию коммутанта $C_f(Gl_n(\mathbb{C}))$ образа этого

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 03-51-5018 и НШ-4329.2006.1.

действия [1]. Соответственно, тот же вопрос для ортогональной группы приводит нас к рассмотрению алгебры $C_f(O_n(\mathbb{C}))$. Однако, по выражению Г. Вейля, эта последняя алгебра является "несколько загадочной", что вынудило его прибегнуть при исследовании действия ортогональной группы к другим методам.

Для изучения коммутанта $C_f(O_n(\mathbb{C}))$ Р. Брауэр [7] в 1937 году ввел ассоциативную алгебру диаграмм $Br_f(n)$ и гомоморфизм

$$br : Br_f(n) \mapsto C_f(O_n(\mathbb{C})).$$

Определение алгебры $Br_f(n)$ (*алгебры Брауэра*) имеет смысл при любом $n \in \mathbb{C}$, причем при достаточно больших по модулю числах $n \in \mathbb{Z}$ алгебра не является полупростой. Сравнительно долгое время не удавалось ни доказать, что алгебра является полупростой при $n \notin \mathbb{Z}$, ни построить описание факторалгебры по радикалу при $n \in \mathbb{Z}$. Частичные результаты были получены в 1956 году В. Брауном [8, 9], однако полное описание неприводимых представлений и ветвления для семейства алгебр $\{Br_f(n)\}$ было получено только в 1988 году Х. Венцлем [29] при помощи условных ожиданий и основной конструкции В. Джонса.

Открытие В. Джонсом и Л. Кауффманом полиномиальных инвариантов узлов (см. [12, 13]), а также исследования квантовых групп позволили обобщить эти алгебры. Дж. Бирман и Х. Венцль в 1989 году построили двупараметрическую алгебру $\mathcal{C}_n(l,m)$ *(алгебру Бирман–Венцля)*, частным случаем которой оказалась алгебра Брауэра (см. [5, 21]). Обобщение построенных инвариантов привело В. Г. Тураева к введению в том же году в работе [27] алгебр $H_{k,l}(x,y)$, описывающих инварианты *связок*. При соответствующем выборе параметров $H_{k,l}(x(n),y(n)) = H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$.

В связи с работой А. М. Вершика и А. Ю. Окунькова [2] (в ее первом варианте в Selecta Math., см. [23]) В. Г. Тураев обратил внимание А. М. Вершика на то, что алгебры, определенные им, может быть, можно изучать методами, предложенными в [2]. В то время было неясно, отличаются ли эти алгебры от групповых алгебр симметрических групп, как неизвестна была и их связь с алгебрами Брауэра. Изучение этих вопросов и было задачей, поставленной А. М. Вершиком автору.

Работа построена следующим образом. В §1 и §2 даются определения алгебры Брауэра $Br_f(n)$ и алгебры $H_{k,l}(n)$. В §3 показывается, что если рассмотреть действие группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$ и обозначить через $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$ коммутант этого действия, то

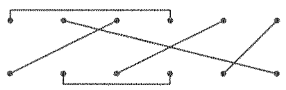
$$br(H_{k,l}(n)) \cong C_{k,l}(GL_n\mathbb{C}), \tag{1}$$

при отождествлении $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l} \cong V^{\otimes k+l}$ (здесь br – отображение, введенное Р. Брауэром, см. выше). Далее в §4 алгебра $H_{k,l}(n)$ задается через образующие и соотношения. В §5 мы вводим понятие основной конструкции Джонса, необходимое для описания в §6 неприводимых представлений и графа ветвления для семейства алгебр $\{H_{k,l}(n)\}$. (При подготовке работы к публикации выяснилось, что алгебра $H_{k,l}(n)$ была введена в работах [18, 6], при этом свойство (1) было положено в определение, и утверждения настоящей работы частично доказаны в работах [6, 20, 19]. См. также [11].) Далее в §7 строится реализация представлений алгебры $H_{k,l}(n)$, что позволяет предложить новый, более естественный способ подсчета характеров этой алгебры в §8 (аналогичное построение реализаций для самой алгебры Брауэра, как и метод подсчета характеров, были предложены С. В. Керовым, см. [14]).

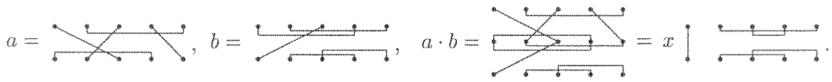
Автор благодарен А. М. Вершику за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1. Определение алгебры Брауэра

Нам потребуется определение *алгебр Брауэра Br_f и $Br_f(n)$*, см. [7]. Как векторное пространство $\mathbb{C}(x)$-алгебра Br_f порождается диаграммами, состоящими из двух рядов по f точек, причем каждая из точек соединена дугой ровно с одной другой. Так, например, может выглядеть диаграмма для Br_6:



Произведение $a \cdot b$ для диаграмм $a, b \in Br_f$ строится следующим образом: необходимо нарисовать диаграмму b под диаграммой a так, чтобы нижний ряд точек для диаграммы b совпал с верхним рядом для диаграммы a; затем следует удалить получившийся средний ряд точек. В результате этой операции получится d циклов и некоторый граф c без циклов. Тогда $a \cdot b = x^d c$. Например,



$\mathbb{C}$-алгебра Брауэра $Br_f(n)$, $n \in \mathbb{C}$, как векторное пространство порождается тем же базисом из диаграмм. Произведение диаграмм строится так же, как для Br_f, но при этом используется специализация переменной x на число n.

Теорема 1.1 (Брауэр [7]). *При $n \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $br : Br_f(n) \mapsto \mathrm{End}(V^{\otimes f})$ алгебры Брауэра на коммутант $C_f(O_n(\mathbb{C}))$ ортогональной группы $O_n(\mathbb{C})$.*

Замечание 1.2. Еще Г. Вейль в монографии [1, гл. V] заметил, что гомоморфизм br инъективен при $n \geqslant 2f$. В. Браун [9] доказал, что инъективность гомоморфизма равносильна неравенству $n \geqslant f$.

Замечание 1.3. Симметрическая группа S_n изоморфно вкладывается в алгебру Брауэра $Br_f(n)$, подстановке σ отвечает диаграмма, соединяющая i-ю точку верхнего ряда с $\sigma(i)$-й точкой нижнего ряда. Мы будем отождествлять подстановку σ с соответствующей диаграммой и всю групповую алгебру $\mathbb{C}[S_n]$ с соответствующей подалгеброй в $Br_f(n)$. Отображение br переводит подалгебру $\mathbb{C}[S_n]$ алгебры $Br_f(n)$ в коммутант диагонального действия $GL_n(\mathbb{C})$ в пространстве $V^{\otimes f}$ (см. введение).

2. Определение алгебр в работе В. Г. Тураева

Основным объектом изучения в настоящей работе является семейство алгебр, введенных В. Г. Тураевым. Именно, в работе [27] приводятся следующие определения и формулировки.

Пусть f и g – неотрицательные целые числа. Под (f,g)-*связкой* понимается такое одномерное гладкое компактное подмногообразие L многообразия $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, что

$$\partial L = L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}) = \{(i,0,0) | i = 1,2,\ldots,f\} \cup \{(j,0,1) | j = 1,2,\ldots,g\},$$

причем в точках края многообразие L ортогонально плоскостям $\mathbb{R}^2 \times 0$ и $\mathbb{R}^2 \times 1$. *Ориентацией* (f,g)-связки L называется ориентация многообразия L. С каждой ориентированной (f,g)-связкой L

ассоциируются числовые последовательности $s(L) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$ и $t(L) = (\nu_1, \dots, \nu_g)$. Здесь $\varepsilon_i = 1$, если в точке $(i, 0, 0) \in \partial L$ единичный касательный к L вектор равен $(0, 0, 1)$, и $\varepsilon_i = -1$, если этот вектор равен $(0, 0, -1)$. Число $\nu_j = \pm 1$ точно так же определяется направлением вектора, касательного к L в точке $(j, 0, 1)$. Если $s(L) = t(L')$, то естественным образом определяется композиция связок $L \circ L'$. Нас будут интересовать изотопические классы связок.

Нам понадобится определение троек Конвея. Именно, пусть X – стандартная образующая группы кос B_2. Три изотопических класса ориентированных связок L_+, L_- и L_0 составляют тройку Конвея, если эти классы представляются связками, которые совпадают вне некоторого замкнутого шара в $\mathbb{R}^2 \times (0, 1)$, а в этом шаре выглядят соответственно как X, X^{-1} и E.

Обозначим через Λ кольцо $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$. Пусть M – множество изотопических классов связок. Рассмотрим свободный Λ-модуль $\Lambda[M]$, свободно порожденный множеством M. Обозначим через N его подмодуль, порожденный элементами $xL_+ - x^{-1}L_- - yL_0$, отвечающими всевозможным тройкам Конвея $L_+, L_-, L_0 \in M$. Обозначим через P отображение $P : M \mapsto \Lambda[M]/N$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_g)$. Через $H(\varepsilon, \nu) \subset \Lambda[M]/N$ обозначим подмодуль, порожденный образами $P(L)$ (f, g)-связок L, для которых $s(L) = \varepsilon$, $t(L) = \nu$. При $\nu = \varepsilon$ умножение связок задает на подмодуле $H(\varepsilon, \varepsilon)$ структуру Λ-алгебры.

Пусть ε^n – последовательность из n единиц. Алгебра $H(\varepsilon^n, \varepsilon^n)$ изоморфна классической алгебре Гекке $H_n(\Lambda; y)$. Здесь $H_n(\Lambda; y)$ – ассоциативная алгебра с 1, порожденная элементами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, удовлетворяющими соотношениям $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ при $|i - j| > 1$, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ при $i = 1, \dots, n-2$, $\sigma_i^2 = y\sigma_i + 1$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Теорема 2.1 (Тураев [27]). *При всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Λ-алгебра $H(\varepsilon^n, \varepsilon^n)$ изоморфна $H_n(\Lambda, y)$, изоморфизм задается формулой $e_i \mapsto xP(\sigma_i)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ – элементарные косы.*

Теорема 2.2 (Тураев [27]). *Если последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$ получается из последовательности ε' перестановкой членов, то алгебры $H(\varepsilon, \varepsilon)$ и $H(\varepsilon', \varepsilon')$ изоморфны.*

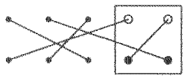
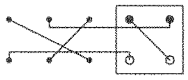
Таким образом, любая алгебра $H(\varepsilon, \varepsilon)$ изоморфна алгебре вида

$$H_{r,f-r}(x,y) = H(\varepsilon(r),\varepsilon(r)), \quad \text{где } \varepsilon(r) = (\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1,\dots,-1}_{f-r}).$$

Если мы теперь введем параметр n, положив $e^2 = ne$ для связки вида $e =$ , то мы получим алгебру $H_{r,f-r}(n,y) \cong H_{r,f-r}(x,y)$. Наконец, мы положим $y=1$, в результате чего рассмотрим алгебру $H_{r,f-r}(n) = H_{r,f-r}(n,1) \subset Br_f(n)$ (ср. [5, с. 254, 270]).

Таким образом, для любого разложения $f = k+l$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, мы ввели алгебру $H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$. Далее мы всегда будем обозначать введенную алгебру через $H_{k,l}(n)$.

Как понятно из определения, алгебру $H_{k,l}(n)$ можно представить следующим образом. Введем в алгебре $Br_{k+l}(n)$ линейное отображение $\Psi_{k,l}$, задаваемое на диаграмме переменой мест последних l точек в верхнем и нижнем рядах диаграммы (удобно представлять себе "поворот" левой части диаграммы):

$d =$  $\mapsto \quad \Psi_{3,2}(d) =$  .

Предложение 2.3. *Алгебра $H_{k,l}(n)$ как векторное пространство имеет базис из элементов вида $\Psi_{k,l}(\sigma)$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$.*

Следствие 2.4. *Размерность алгебры $H_{k,l}(n)$ равна $(k+l)!$.*

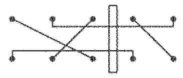
Будем обозначать через i произвольную точку в верхнем ряду диаграммы при $1 \leqslant i \leqslant k$ и через j — точку в верхнем ряду при $k+1 \leqslant j \leqslant k+l$. Соответствующие точки в нижнем ряду будем обозначать через $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Из определения отображения $\Psi_{k,l}$ следует, что диаграмма d есть диаграмма вида $d = \Psi_{k,l}(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in S_{k+l}$ тогда и только тогда, когда все ее дуги имеют вид

$$[i,\bar{i}], \quad [i,j], \quad [j,\bar{j}] \quad \text{или} \quad [\bar{i},\bar{j}]. \tag{2}$$

Заметим, что $H_{k,l}(n)$ содержит подгруппу $S_k \times S_l$.

Назовем дугу, соединяющую точки из одного ряда диаграммы, *горизонтальной дугой*, а дугу, соединяющую точки из разных рядов, – *вертикальной дугой (линией)*. Любая диаграмма содержит одинаковое количество горизонтальных дуг в верхнем и нижнем ряду, мы будем обозначать это число через $\mathrm{bars}(d)$. Кроме этого, набор всех линий диаграммы соответствует некоторой подстановке, мы будем обозначать ее через $\sigma(d)$. Если $d \in H_{k,l}(n)$, то $\sigma(d) \in S_{k-\mathrm{bars}(d)} \times S_{l-\mathrm{bars}(d)}$.

Из указанного выше вида дуг произвольной диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ следует, что можно представить себе следующее описание диаграмм, порождающих эту алгебру: представим себе “стенку”, соединяющую точку между k-й и $(k+1)$-й точками верхнего ряда с аналогичной точкой нижнего ряда:

$d =$  .

Тогда любая дуга, принадлежащая диаграмме d, будет вертикальной, если она не пересекает AB, и горизонтальной, если пересекает. Это позволяет назвать алгебру $H_{k,l}(n)$ *разделенной алгеброй Брауэра (walled Brauer algebra)*, см. [6].

3. Описание разделенной алгебры Брауэра как коммутанта

Рассмотрим диагональное действие группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$:

$$A\cdot(v_1\otimes\ldots\otimes v_k\otimes v^*_{k+1}\otimes\ldots\otimes v^*_{k+l}) = A\cdot v_1\otimes\ldots\otimes A\cdot v_k\otimes A\cdot v^*_{k+1}\otimes\ldots\otimes A\cdot v^*_{k+l}.$$

Используя изоморфизм V и V^*, мы можем записать изоморфное действие в тензорном произведении $V^{\otimes k+l}$:

$$\begin{aligned} &A \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) \\ &= A \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes A \cdot v_k \otimes A' \cdot v_{k+1} \otimes \ldots \otimes A' \cdot v_{k+l}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $A' = (A^t)^{-1}$. Для $A \in GL_n(\mathbb{C})$ обозначим через $I_1(A) \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$ оператор, отвечающий этому действию. Оператор, отвечающий диагональному действию матрицы $A \in GL_n(\mathbb{C})$ в $V^{\otimes k+l}$, обозначим через $I_2(A) \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$.

Введем линейный изоморфизм $\Phi_{k,l}$ пространства $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l}) = \{T = \{T^{j_1\ldots j_{k+l}}_{i_1\ldots i_{k+l}}\}\}$:

$$[\Phi_{k,l}(T)]^{j_1\ldots j_{k+l}}_{i_1\ldots i_{k+l}} = T^{j_1\ldots j_k i_{k+1}\ldots i_{k+l}}_{i_1\ldots i_k j_{k+1}\ldots j_{k+l}}.$$

Очевидным образом, $\Phi^2_{k,l} = \mathrm{Id}$. Прямое вычисление позволяет сформулировать следующее утверждение:

Предложение 3.1. *Пусть $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$. Тогда*

$$I_1(A)B = BI_1(A) \iff I_2(A)\Phi_{k,l}(B) = \Phi_{k,l}(B)I_2(A).$$

Напомним следующее определение. Пусть A – некоторая алгебра и S – какое-то множество элементов этой алгебры, $S \subset A$. Назовем *коммутантом (централизатором)* множества S подалгебру $C(S) \subset A$ всех элементов из A, коммутирующих с S. В нашем случае A всегда будет иметь вид $A = \mathrm{End}(V^{\otimes f})$ для некоторого конечномерного пространства V и $f \in \mathbb{N}$, а S всегда будет подалгеброй алгебры A.

Как уже упоминалось выше (см. замечание 1.3), коммутант диагонального действия I_2 порождается образом симметрической группы под действием отображения br:

$$br(\sigma)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k+l)}, \quad \sigma \in S_{k+l}.$$

Вместе с предложением 3.1 этот факт дает нам такое следствие:

Следствие 3.2. *Коммутант действия I_1 порождается операторами $\Phi_{k,l}(br(\sigma))$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$.*

Как и в случае диагонального действия ортогональной группы, коммутант рассматриваемого действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ может быть описан при помощи алгебры Брауэра. Из определения отображений br, $\Phi_{k,l}$ и отображения $\Psi_{k,l}$ из §2 непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 3.3.

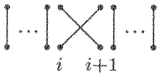
$$br \circ \Psi_{k,l} = \Phi_{k,l} \circ br.$$

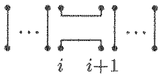
Предложение 3.3 и следствие 3.2 позволяют утверждать, что коммутант действия I_1 порождается элементами $br(\Psi_{k,l}(\sigma))$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$. Таким образом, используя замечание 1.2, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.4. *Образ $br(H_{k,l}(n))$ изоморфен коммутанту диагонального действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$. При $n \geqslant k + l$ отображение br переводит алгебру $H_{k,l}(n)$ на образ $br(H_{k,l}(n))$ изоморфно.*

4. Образующие и соотношения для алгебры $H_{k,l}(n)$

Стандартные образующие алгебры Брауэра выглядят следующим образом:

$\sigma_i =$ 

, $e_i =$ 

.

Зададим в этих терминах разделенную алгебру Брауэра.

Теорема 4.1. *$H_{k,l}(n)$ есть подалгебра алгебры $Br_{k+l}(n)$, порожденная образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$, e_k, $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l-1}$ и определяющими соотношениями*

$$\sigma_i^2 = 1, \quad i \neq k; \quad (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1, \quad i \neq k-1, k+1; \tag{4}$$

$$e_k \sigma_i = \sigma_i e_k, \quad i \neq k-1, k+1; \tag{5}$$

$$e_k^2 = n e_k, \quad e_k \sigma_{k-1} e_k = e_k \sigma_{k+1} e_k = e_k, \tag{6}$$

$$e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k = \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k; \tag{7}$$

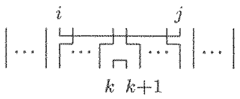
$$H_{k,l}(n) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l-1} \mid (4)-(7) \rangle.$$

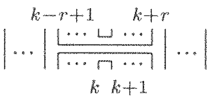
Проверка того, что образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l-1}$ удовлетворяют заданным выше соотношениям, не представляет сложности.

Обозначим через $\overline{(i,j)}$ элемент $\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{k-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \dots \sigma_{k+1} e_k \in H_{k,l}(n)$. Для этого элемента $\operatorname{bars}(\overline{(i,j)}) = 1$, он содержит дуги $[i,j]$ и $[\overline{k}, \overline{k+1}]$, и $\sigma(\overline{(i,j)}) = e$. Построим по индукции диаграммы $d_0^r \in H_{k,l}(n)$, $1 \leqslant r \leqslant \min(k,l)$:

$$d_0^0 = e; \quad d_0^r = d_0^{r-1} \cdot \overline{(k-r+1, k+r)}.$$

Диаграммы $\overline{(i,j)}$ и d_0^r суть

$\overline{(i,j)} =$ 

, $d_0^r =$ 

.

Образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l-1}$ в силу соотношений (4) задают алгебру $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$. Используя эти образующие и соотношения (4), несложно свести доказательство теоремы к проверке утверждения, что если некоторая последовательность образующих (или “слово”) D задает диаграмму d_0^r для некоторого

r, то это слово D эквивалентно слову d_0^r в смысле соотношений (4)–(7). Доказательство последнего утверждения можно провести следующим образом: сначала найти слово D', эквивалентное D и записываемое в виде $D' = \overline{(i_1 j_1)(i_2 j_2)} \dots \overline{(i_m j_m)} a$, где m – количество образующих e_k в слове D и $a \in S_k \times S_l$. Затем, используя соотношение (7), найти эквивалентное слово D'' такого же вида, содержащее ровно r образующих e_k. И, наконец, переставляя между собой элементы $\overline{(i_p j_p)}$, получить эквивалентность исходного слова D слову d_0^r. Подробнее см. [4].

5. Конструкция Джонса, теория представлений алгебры Брауэра

В этом параграфе описывается конструкция Джонса (см. [12, 29]).

Рассмотрим пару полупростых алгебр $A \subset B$ над $\mathbb{C}$,

$$A = \sum A_i,\ A_i \cong M_{a_i}\mathbb{C}; \quad B = \sum B_j,\ B_j \cong M_{b_j}\mathbb{C}.$$

Функционал $\operatorname{tr} : B \mapsto \mathbb{C}$ называется *следом*, если $\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba)$ для любых $a, b \in B$. Существует единственный с точностью до множителя след на $M_n\mathbb{C}$, поэтому любой след на B полностью определяется значениями $t_j = \operatorname{tr}(p_j)$, где $p_j \in B_j$ – минимальные идемпотенты. След tr называется *невырожденным*, если для любого $0 \neq b \in B$ существует $b' \in B$, для которого $\operatorname{tr}(bb') \neq 0$. Несложно проверить, что невырожденность следа равносильна утверждению, что $t_j \neq 0$ для любого j.

Напомним, что если след невырожден на B, то отображение $b \in B \mapsto \operatorname{tr}(b\cdot) \in B^*$ есть изоморфизм. Пусть теперь след невырожден на B и на A. Пользуясь изоморфизмом между A и A^*, мы получаем для любого $b \in B$ единственный элемент $\varepsilon_A(b) \in A$, такой, что $\operatorname{tr}(b\cdot)_{|A} = \operatorname{tr}(\varepsilon_A(b)\cdot)_{|A}$. Линейное отображение $\varepsilon_A : B \mapsto A$ называется *условным ожиданием, сохраняющим след*. Основные свойства ε_A таковы:

1) $\varepsilon_A(a_1 b a_2) = a_1 \varepsilon(b) a_2$ для $a_1, a_2 \in A$ и $b \in B$. В частности, $\varepsilon_A(a) = a$ для $a \in A$;
2) ε_A невырождено, т.е. для любого $0 \neq b \in B$ существуют $b_1, b_2 \in B$, для которых $\varepsilon_A(b_1 b) \neq 0$ и $\varepsilon_A(b b_2) \neq 0$.

Замечание 5.1. Можно ввести определение условного ожидания

ε_A, не использующее след (см. [28]), положив по определению

$$\varepsilon_A(a_1ba_2) = a_1\varepsilon_A(b)a_2 \quad \text{для} \quad a_1, a_2 \in A,\ b \in B;$$
$$\varepsilon_A(b^*) = \varepsilon_A(b)^*, \quad b \in B. \tag{$*$}$$

В этом случае ядро $\operatorname{Ker}\varepsilon_A$ будет двусторонним идеалом относительно A, в то время как для введенного выше определения $\operatorname{Ker}\varepsilon_A$ есть ортогональное дополнение к A (в смысле следа). В теории C^*-алгебр принято налагать на ожидание условие *положительности*: ожидание $P : B \mapsto A$ называется положительным, если для любого $b \in B$ значение $P(bb^*)$ положительно, т.е. лежит в конусе, порожденном элементами вида aa^*, $a \in A$; иногда налагается более строгое условие *полной положительности*. В работе А. М. Вершика [28] подчеркивается важность неположительных (или *обобщенных*) ожиданий и обратных спектров конечномерных полупростых алгебр. В указанной работе обращается внимание на то, что *виртуальная проекция* (относительно определения проекции см. замечание 5.5 и работы [28, 3]) не является положительной. Ожидание $\varepsilon_f : Br_f \mapsto Br_{f-1}$ (см. ниже) также не является положительным (это не отмечено в работе [29]).

Кроме того, в работе [28] показано, что для конечномерных полупростых алгебр и их подалгебр любое ожидание в смысле $(*)$ сохраняет некоторый (возможно, неположительный) след. Следовательно, определение ожидания $(*)$ совпадает с определением, введенным выше.

Пусть алгебра B содержится в некоторой алгебре C и при этом существует элемент $e \in C$, для которого

1) $e^2 = e$,

2) $ebe = e\varepsilon_A(b) = \varepsilon_A(b)e$ для любого $b \in B$,

3) отображение $a \in A \mapsto ae$ инъективно и $1e = e$.

Важным примером такой ситуации служит следующая: рассмотрим левое регулярное представление алгебры B, при этом алгебру B, рассматриваемую как векторное пространство, будем обозначать через B_ξ, а соответствующие элементы алгебры — через b_ξ. Пусть алгебра $C = \operatorname{End}(B_\xi)$ есть алгебра всех линейных преобразований пространства B_ξ. В этом случае элемент $e_A \in \operatorname{End}(B_\xi)$, $e_Ab_\xi = \varepsilon(b)_\xi$, удовлетворяет сформулированным выше свойствам. Обозначим через $\langle B, e_A\rangle$ алгебру, порожденную B и e_A.

Предложение 5.2 (Джонс [12]; Венцль [29]).

1. *Для определенных выше полупростых алгебр A и B, невырожденного следа* tr *и условного ожидания ε_A алгебра $\langle B, e_A\rangle$ изоморфна коммутанту алгебры A в $\mathrm{End}(B_\xi)$. В частности, эта алгебра полупроста.*
2. *Существует взаимно однозначное соответствие между простыми компонентами алгебр A и $\langle B, e_A\rangle$, при этом минимальному идемпотенту $p \in A_i$ отвечает минимальный идемпотент $pe_A \in \langle B, e_A\rangle_i$. При этом соответствии диаграмма Браттели для алгебр $B \subset \langle B, e_A\rangle$ есть отражение диаграммы Браттели для алгебр $A \subset B$.*
3. *$\langle B, e_A\rangle = Be_AB$.*

Алгебру $\langle B, e_A\rangle$, описанную в предложении 5.2, как и процесс ее построения, называют *(основной) конструкцией Джонса*. Следующая теорема показывает, что эта алгебра есть “наименьшая” алгебра, порождаемая алгеброй B и идемпотентом e.

Предложение 5.3 (Венцль [29]). *Пусть $A \subset B$ — конечномерные полупростые алгебры над $\mathbb{C}$ и* tr *– невырожденный след на B, сужение которого на A также невырождено. Пусть ε_A – сохраняющее след условное ожидание алгебры B на подалгебру A, и пусть идемпотент e удовлетворяет сформулированным выше свойствам* 1–3*. Тогда алгебра $\langle B, e\rangle$ полупроста, и существует разложение*

$$\langle B, e\rangle \cong \langle B, e_A\rangle \bigoplus \tilde{B},$$

где алгебра $\langle B, e_A\rangle$ есть алгебра из предложения 5.2, а алгебра $\tilde{B}$ изоморфна подалгебре алгебры B. При этом идеал, порожденный идемпотентом e, изоморфен $\langle B, e_A\rangle$.

Основная конструкция Джонса была применена Х. Венцлем [29] для построения теории представлений алгебры Брауэра. Им доказаны следующие утверждения. (Мы используем работу Х. Венцля в §6.)

Предложение 5.4 (Венцль [29]).

1. *Для любой диаграммы $d \in Br_f$ существует единственная диаграмма $\varepsilon_f(d) \in D_{f-1}$, для которой $e_f d e_f = x\varepsilon_f(d)e_f$ и $\varepsilon_f(d) = d$ для любого $d \in Br_{f-1}$.*
2. *Существует линейный функционал τ на Br_f, задаваемый по индукции следующим образом: $\tau(d) = \tau(\varepsilon_f(d))$, $\tau(1) = 1$.*

3. *Функционал τ может быть задан по индукции формулой $\tau(a\chi b) = \frac{1}{x}\tau(ab)$ для $\chi \in \{\sigma_f, e_f\}$ и $a, b \in Br_{f-1}$.*
4. *$\tau(d'\varepsilon_f(d)) = \tau(d'd)$ для $d \in Br_f$ и $d' \in Br_{f-1}$, т.е. отображение ε_f – условное ожидание алгебры Br_f на Br_{f-1}.*
5. *Существует отображение из $Br_f(n)$ в $Br_{f-1}(n)$, также обозначаемое через ε_f, и функционал τ_n на $Br_f(n)$, для которого $\tau_n(d'\varepsilon_f(d)) = \tau_n(d'd)$ для $d \in Br_f(n)$ и $d' \in Br_{f-1}(n)$.*
6. *Пусть $d \in Br_f$. Если определено $d(n)$, то $\tau_n(d(n)) = [\tau(d)](n)$.*
7. *Функционалы τ и τ_n – следы на алгебрах Br_f и $Br_f(n)$ соответственно. Для положительного нечетного n выполняется $\tau_n = \mathrm{tr} \circ br$, где tr — нормированный след на $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$.*

Замечание 5.5. Если рассмотреть сужение введенного X. Венцлем ожидания ε_f на подалгебру $\mathbb{C}[S_f] \subset Br_f$, то мы получим следующее:

$$\begin{cases} \varepsilon_f(\sigma) = \sigma, & \sigma \in S_{f-1} \subset Br_{f-1} \subset Br_f; \\ \varepsilon_f(\sigma) = x^{-1} \cdot \mathrm{VP}_f(\sigma) & \text{для подстановок } \sigma \in S_f \backslash S_{f-1}. \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{VP}_f : S_f \mapsto S_{f-1}$ есть *виртуальная проекция*, т.е. вычеркивание числа f из циклической записи подстановки, например,

$$\mathrm{VP}_7((57)(432)(61)) = (5)(432)(61).$$

Эта проекция была введена в работе [16] и использовалась для определения проективного предела $\varprojlim S_f$ (см. также [17, 3]). Виртуальная проекция может быть охарактеризована следующим образом.

Теорема 5.6 [16]. *Для виртуальной проекции $\mathrm{VP} : S_f \mapsto S_{f-1}$*

$$\mathrm{VP}(a_1 b a_2) = a_1 \,\mathrm{VP}(b) a_2, \quad a_1, a_2 \in S_{f-1}, b \in S_f.$$

При $f \geqslant 4$ проекция VP – единственное отображение, удовлетворяющее этому условию.

Виртуальная проекция также позволяет дать инвариантное определение элементов Юнга–Юциса–Мерфи для симметрической группы (см. [2]). Относительно элементов Юнга–Юциса–Мерфи для алгебры Брауэра см. [22, 25].

Теорема 5.7 (Венцль [29]). *Алгебра $Br_f(n)$ полупроста при $n \notin \mathbb{Z}$. Граф ветвления для семейства алгебр $\{Br_f(n)\}_{f=1}^{\infty}$, $n \notin \mathbb{Z}$, выглядит следующим образом: на f-м этаже вершины параметризованы парами (f, λ), где λ пробегает множество всех диаграмм Юнга, для которых $f - |\lambda|$ четно. Вершины (f, λ) и $(f+1, \mu)$ соединены ребром, если $\lambda \nearrow \mu$ или $\lambda \searrow \mu$ (см. рис. 1).*

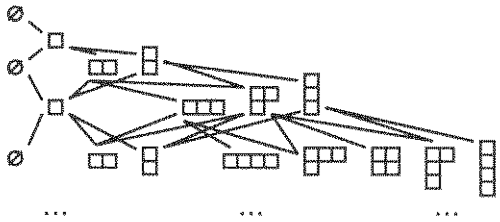


Рис. 1. Диаграмма Браттели для цепочки алгебр Брауэра.

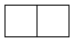
Мы будем обозначать размерность неприводимого представления алгебры Брауэра $Br_f(n)$, $n \notin \mathbb{Z}$, отвечающего паре (f, λ), через $\dim(f, \lambda)$. Через $\dim(\lambda)$ обозначается размерность неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_f]$, отвечающего диаграмме λ. Следующее утверждение легко проверяется по индукции (см. также доказательство следствия 6.9).

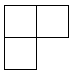
Следствие 5.8.

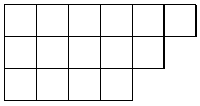
$$\dim(f, \lambda) = \frac{f! \dim \lambda}{|\lambda|!((f - |\lambda|)/2)! 2^{(f-|\lambda|)/2}}. \tag{8}$$

6. Теория представлений алгебр $H_{k,l}(n)$

Для применения конструкции Джонса к построению графа ветвления для семейства разделенных алгебр Брауэра по аналогии с работой [29] нам потребуется задать некоторое семейство полиномов $\{P_{\lambda,\mu}(n)\}$, значения каждого из которых для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ будут отвечать размерности некоторого представления группы $GL_n\mathbb{C}$. Именно, обозначим через $n \times l - \lambda$ диаграмму, полученную вырезанием из правого нижнего угла прямоугольника размера $n \times l$ диаграммы λ, развернутой на 180°, и через $n \times l - \lambda + \mu$ диаграмму $n \times l - \lambda$, к которой справа приписана диаграмма μ.

Если $n = 3,\ l = 4,\ \lambda =$  ,

$\mu =$  ,

то $n \times l - \lambda + \mu =$  .

Нам необходимо вычислить размерность $\dim(n \times l - \lambda + \mu, n)$ указанных выше представлений как функцию от n (с точностью до скалярного множителя) при условии $|\lambda| \leqslant l$.

Напомним, что для любой клетки $\square \in \lambda$, находящейся в i-й строке и j-м столбце диаграммы λ, можно определить *содержание* этой клетки $c(\square) = i - j$ и *крюк* $h(\square) = (\lambda_i - j) + (\tilde{\lambda}_j - i) + 1$. Размерность $\dim(\lambda, n)$ неприводимого представления группы $GL_n(\mathbb{C})$, отвечающего диаграмме λ, равна

$$\dim(\lambda, n) = \frac{\prod(n + c(\square))}{\prod h(\square)} = A \cdot \prod(n + c(\square)), \tag{9}$$

где произведения берутся по всем клеткам $\square \in \lambda$ диаграммы λ. При этом $c(\square)$ – содержание клетки, $h(\square)$ – крюк, отвечающий клетке, и $A = (\prod h(\square))^{-1}$ – константа.

Пользуясь этой формулой для размерности $\dim(\lambda, n)$, можно ввести требуемые полиномы (доказательство см. в [4]).

Предложение 6.1.

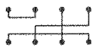
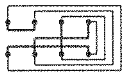
1. *Выполнено включение* $\mathcal{S}_2(\lambda, \mu) \subset \mathcal{S}_1(\lambda, \mu)$.
2. *Размерность* $\dim(n \times l - \lambda + \mu, n)$ *равна полиному*

$$P_{\lambda,\mu}(n) = A \cdot \prod_{c \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{S}_2} (n + c)$$

степени $|\lambda| + |\mu|$, *для некоторой константы* A.

3. *Наибольший и наименьший корни полинома* $P_{\lambda,\mu}(n)$ *равны* $\lambda_1 + \mu_1 - 1$ *и* $1 - \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\mu}_1$.

Для произвольной диаграммы $d \in Br_{k+l}$ рассмотрим ее замыкание $\operatorname{Clos}(d) = \operatorname{Clos}_{k+l}(d)$:

для $d =$  $\operatorname{Clos}(d) =$  .

Обозначим через $\#\operatorname{Clos}(d)$ число компонент связности в замыкании $\operatorname{Clos}(d)$ диаграммы d (линии диаграммы считаются непересекающимися) и зададим функционалы $\tau^0 : Br_f \mapsto \mathbb{C}$, $\tau_n^0 : Br_f(n) \mapsto \mathbb{C}$, положив

$$\tau^0(d) = x^{\#\operatorname{Clos}(d)-(k+l)}, \quad \tau_n^0(d) = n^{\#\operatorname{Clos}(d)-(k+l)}.$$

Напомним, что предложение 5.4 позволяет задать на алгебрах Br_{k+l} и $Br_{k+l}(n)$ функционалы τ и τ_n.

Лемма 6.2.

1. *Функционалы τ^0 и τ совпадают на алгебре Br_{k+l}, и, следовательно, совпадают их сужения на подалгебру $H_{k,l}$.*
2. *То же верно для функционалов τ_n^0 и τ_n.*

Доказательство. Лемма следует из предложения 5.4 и того факта, что (в терминах этого предложения) $\operatorname{Clos}(a\chi b) = \operatorname{Clos}(ab)$ и $\#\operatorname{Clos}(1) = k + l$. $\square$

Мы будем обозначать сужение функционалов $\tau = \tau^0$ и $\tau_n = \tau_n^0$ на подалгебры $H_{k,l} \subset Br_{k+l}$ и $H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$ соответственно через τ и τ_n. Напомним, что эти функционалы являются следами.

Для описания представлений алгебры $H_{k,l}$ мы будем использовать основную конструкцию Джонса. Именно, рассмотрим цепочку $H_{k,l} \subset H_{k+1,l} \subset H_{k+1,l+1}$ и элемент $e_{k+1,l+1} = (1, k+1)(k+2, k+l+2)e_{k+1}(1, k+1)(k+2, k+l+2) \in H_{k+1,l+1}$:

$e_{k+1,l+1} =$  .

1 $k{+}l{+}2$

Возьмем диаграмму $d \in H_{k+1,l}$ и рассмотрим произведение $e_{k+1,l+1} \cdot d \cdot e_{k+1,l+1} \in H_{k+1,l+1}$. Полученная диаграмма, очевидным образом, содержит дугу, соединяющую первую и $(k + l + 2)$-ю точки в верхнем ряду, и такую же дугу в нижнем ряду. Следовательно, произведение $e_{k+1,l+1} \cdot d \cdot e_{k+1,l+1}$ однозначно задает некоторый элемент $\varepsilon_{k,l}(d) \in H_{k,l}$. Таким образом, мы построили линейное отображение

$$\varepsilon_{k,l} : H_{k+1,l} \mapsto H_{k,l}.$$

Доказательства следующих трех лемм аналогичны работе [29], см. [4].

Лемма 6.3.

1. *Для любого элемента $d \in H_{k,l}$ существует единственный элемент $\varepsilon_{k,l-1}(d) \in H_{k,l-1}$, для которого*

$$e_{k+1,l} \cdot d \cdot e_{k+1,l} = x\varepsilon_{k,l-1}(d)e_{k+1,l};$$

$\varepsilon_{k+1,l}(d) = d$ *при* $d \in H_{k,l-1}$.

2. *Отображение $\varepsilon_{k,l-1}$ – условное ожидание, сохраняющее след τ, т.е. для функционала τ и элемента $d \in H_{k,l}$ выполняется*

$$\tau|_{H_{k,l}}(d) = \tau|_{H_{k,l-1}}(\varepsilon_{k,l-1}(d)), \quad \tau(1) = 1.$$

3. *Для функционала τ и элемента $d \in H_{k,l}$ выполняется $\tau(a\chi b) = (1/x)\tau(ab)$, где $\chi \in \{e_{k,l}, \sigma_{k+l-1}\}$, $a, b \in H_{k,l-1}$.*
4. *Для $d \in H_{k,l}$, $d' \in H_{k,l-1}$ выполняется $\tau(d'\varepsilon_{k,l-1}(d)) = \tau(d'd)$.*
5. *Аналогично определяется условное ожидание алгебры $H_{k,l}(n)$ на подалгебру $H_{k,l-1}(n)$, обозначаемое также через $\varepsilon_{k,l-1}$, для которого $\tau_n(d'\varepsilon_{k,l-1}(d)) = \tau_n(d'd)$ при $d \in H_{k,l}(n)$, $d' \in H_{k,l-1}(n)$.*
6. *Если для элемента $d \in H_{k,l}$ определено значение $d(n)$, то $\tau_n(d(n)) = [\tau(d)](n)$.*
7. *Для функционала τ_n на алгебре $H_{k,l}(n)$ для положительного нечетного n выполняется $\tau_n = \mathrm{tr} \circ br$, где tr — нормированный след на $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$.*

Лемма 6.4. *Рассмотрим пространство $I_{k,l} \subset H_{k,l}$, порожденное диаграммами, содержащими хотя бы одну дугу. Справедливы следующие утверждения:*

1. *$I_{k,l}$ – двусторонний идеал.*
2. *$I_{k,l} = \langle e_{k,l} \rangle = \langle e_{k,l}, H_{k,l-1} \rangle$.*
3. *$H_{k,l}/I_{k,l} \cong \mathbb{C}(x)[S_k \times S_l]$.*
4. *То же верно для $I_{k,l}(n) \subset H_{k,l}(n)$; в этом случае*

$$H_{k,l}(n)/I_{k,l}(n) \cong \mathbb{C}[S_k \times S_l].$$

Введем аннулятор идеала τ_n,

$$J_{k,l}(n) = \{a \in H_{k,l}(n) | \tau_n(ab) = 0 \quad \text{для любого} \quad b \in H_{k,l}\}.$$

Лемма 6.5.

1. $J_{k,l}(n)$ – *двусторонний идеал.*
2. $J_{k,l}(n) \subset J_{k+1,l}(n)$, $J_{k,l}(n) \subset J_{k,l+1}(n)$.

Обозначим коммутант действия I_1 группы $GL_n(\mathbb{C})$ на пространстве $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$ через $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$. Напомним следующее известное утверждение:

Предложение 6.6. *Пусть* $p \in C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$ – *минимальный идемпотент. Тогда*

1. *Представление* $g \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto pI_1(g)p$ *является неприводимым.*

2. *Размерность представления равна* $n^{k+l}\,\mathrm{tr}(p)$, *где* tr – *нормированный след на* $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$.

Как говорилось в теореме 3.4, существует гомоморфизм br : $H_{k,l}(n) \mapsto C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$, биективный при $n \geqslant k+l$. В этом случае факторалгебра $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ выделяется прямым слагаемым. Пусть $z(n)$ – центральный идемпотент, отвечающий идеалу $I_{k,l}(n)$, и $p_{\lambda,\mu} = p_\lambda p_\mu$ – произведение юнговских идемпотентов для $\mathbb{C}[S_k \times S_l] \subset H_{k,l}(n)$; тогда $q_{\lambda,\mu}(n) = (1 - z(n))p_{\lambda,\mu}$ – минимальный идемпотент для $H_{k,l}(n)/I_{k,l}(n)$. Отображение br биективно, поэтому отображение

$$g \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto br(q_{\lambda,\mu})I_1(g)br(q_{\lambda,\mu})$$

является неприводимым представлением группы $GL_n(\mathbb{C})$. Согласно работе [6], это представление отвечает диаграмме $n \times l - \lambda + \mu$, поэтому, в силу предложения 6.1, его размерность равна $P_{\lambda,\mu}(n)$. Следовательно, $\mathrm{tr}(q_{\lambda,\mu}) = P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}$. Любой минимальный идемпотент отвечает неприводимому представлению, поэтому след tr невырожден на $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$.

Обозначим через $\Gamma_{k,l}$ множество всех пар диаграмм Юнга (λ, μ), для которых $|\lambda| \leqslant k$, $|\mu| \leqslant l$, $|\lambda| - |\mu| = k - l$. Мы будем писать $\mu \nearrow \mu'$ (соответственно, $\mu \searrow \mu'$), если диаграмма μ' получается из диаграммы μ добавлением (соответственно, удалением) одной клетки.

Теорема 6.7.

1. $\mathbb{C}(x)$-*алгебра* $H_{k,l}$ *полупроста. Она раскладывается в прямую сумму полных матричных алгебр* $H_{k,l}^{\lambda,\mu}$ *при* $(\lambda,\mu)\in\Gamma_{k,l}$. *Неприводимое представление* (k,l,λ,μ), *отвечающее алгебре* $H_{k,l}^{\lambda,\mu}$, *при сужении на* $H_{k-1,l}$ *раскладывается в прямую сумму*

$$(k,l,\lambda,\mu)=\bigoplus(k-1,l,\lambda',\mu'),$$

где сумма берется по всем парам диаграмм (μ',λ'), *таким, что либо* $\lambda'=\lambda$ *и* $\mu\nearrow\mu'$, *либо* $\lambda\searrow\lambda'$ *и* $\mu'=\mu$. *Веса следа* τ *задаются вектором* $(P_{\lambda,\mu}(x)/x^{k+l})_{(\lambda,\mu)\in\Gamma_{k,l}}$.

2. *Пусть алгебры* $H_{k-1,l-1}(n)$ *и* $H_{k,l-1}(n)$ *полупросты. Если след* τ_n *невырожден на* $H_{k,l-1}$, *то алгебра* $H_{k,l}(n)$ *полупроста. В этом случае* $H_{k,l}(n)\otimes\mathbb{C}(x)=H_{k,l}$ *и веса следа* τ_n *на* $H_{k,l}(n)$ *задаются вектором* $(P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l})_{(\lambda,\mu)\in\Gamma_{k,l}}$; *ветвление для алгебр* $H_{k,l-1}(n)\subset H_{k,l}(n)$ *совпадает с ветвлением для* $H_{k-1,l-1}\subset H_{k,l-1}$.

Доказательство. Будем проводить доказательство пункта 1 по индукции. Базой индукции является $H_{k,0}\subset H_{k+1,0}$, $H_{k,0}\cong\mathbb{C}[S_k]$, $H_{k+1,0}\cong\mathbb{C}[S_{k+1}]$; в этом случае разложение хорошо известно.

Пусть алгебры $H_{k-1,l-1}$ и $H_{k,l-1}$ полупросты. Из предложения 6.3 и леммы 6.4 следует, что если след τ_n невырожден на этих алгебрах, то мы находимся в условии теоремы 5.3.

В этом случае идеал $I_{k,l}=\langle e_{k,l}\rangle\subset H_{k,l}$ изоморфен основной конструкции Джонса для вложения $H_{k-1,l-1}\subset H_{k,l-1}$. В силу предложения 5.2 и индукционного предложения, простые компоненты идеала $I_{k,l}$ нумеруются элементами множества $\Gamma_{k-1,l-1}$. В частности, этот идеал полупрост. В силу леммы 6.4, факторалгебра $H_{k,l}/I_{k,l}$ изоморфна $\mathbb{C}[S_k\times S_l]$ и, следовательно, полупроста. Таким образом, алгебра $H_{k,l}$ также полупроста.

Пусть (k,l,λ,μ) – простой $I_{k,l}$-модуль. В силу предложения 5.2, (k,l,λ,μ) будет тогда прямой суммой всех модулей $(k,l-1,\lambda',\mu')$, которые содержат подмодуль $(k-1,l-1,\lambda,\mu)$. Поэтому требуемое ветвление следует из индукционного предположения для включения $H_{k,l-1}\subset H_{k-1,l-1}$. Если же модуль $V_{k,l}^{\lambda,\mu}$ аннулируется идеалом $I_{k,l}$, тогда он является $\mathbb{C}[S_k\times S_l]$-модулем, и в этом случае разложение хорошо известно.

Докажем невырожденность следа τ_n на $H_{k,l}(n)$. Рассмотрим минимальный идемпотент $p_{\lambda,\mu}\in D_{k-1,l-1}^{\lambda,\mu}$. В силу предложений

5.2 и 6.3, $(1/x)p_{\lambda,\mu}e_{k,l}$ является минимальным идемпотентом в $H_{k,l}$,

$$\tau((1/x)p_{\lambda,\mu}e_{k,l}) = (1/x^2)\tau(p_{\lambda,\mu}) = P_{\lambda,\mu}(x)/x^{k+l};$$

последнее равенство верно в силу индукционного предложения.

Пусть теперь z – центральный идемпотент, отвечающий $I_{k,l}$. Положим $q_{\lambda,\mu} = (1-z)p_{\lambda,\mu}$, где $p_{\lambda,\mu}$ – произведение двух юнговских идемпотентов. При этом $q_{\lambda,\mu}(n)$ будет определено для нечетных $n \geqslant k+l$, поэтому, используя предложение 6.3, мы получим

$$[\tau(q_{\lambda,\mu})](n) = \tau_n(q_{\lambda,\mu}(n)) = \operatorname{tr} \circ br(q_{\lambda,\mu}(n)) = P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}.$$

Рациональные функции $\tau(q_{\lambda,\mu})$ и $P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}$ совпадают в бесконечном количестве точек, поэтому совпадают тождественно. В частности, $\tau(q_{\lambda,\mu}) \neq 0$.

Доказательство пункта 2 аналогично. Требуется только заметить, что если след невырожден на $H_{k,l-1}(n)$, то он невырожден на $H_{k-1,l-1}(n)$, так как $J_{k-1,l-1}(n) \subset J_{k,l-1}(n)$. $\square$

Следствие 6.8. *Если $n \notin \mathbb{N}$, то алгебра $H_{k,l}(n)$ полупроста и след τ_n невырожден для любых $k, l \in \mathbb{N}$.*

Для произвольного k_0 мы можем рассмотреть цепочку алгебр

$$\mathbb{C}[S_{n_0}] \cong H_{k_0,0}(n) \subset H_{k_0,1}(n) \subset H_{k_0+1,1}(n) \subset \dots \subset D_f \subset \dots,$$

где f-я алгебра в этой цепочке равна $D_f = H_{k_0+[f/2],[(f+1)/2]}(n)$. Теорема 6.7 позволяет построить граф Браттели для такой цепочки при $n \notin \mathbb{Z}$. Например, для $k_0 = 0$ диаграмма Браттели выглядит следующим образом:

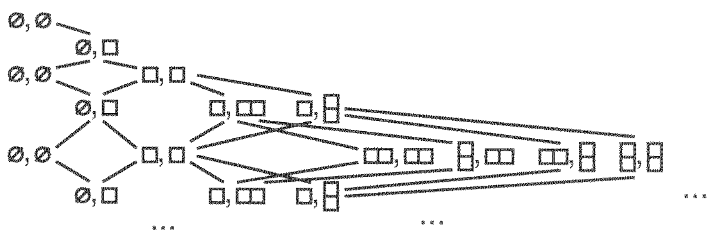


Рис. 2. Диаграмма Браттели для цепочки $\{H_{[f/2],[(f+1)/2]}(n)\}_{f=0}^{\infty}$.

Аналогично следствию 5.8 мы можем указать формулу для размерностей представлений разделенной алгебры Брауэра. Мы будем обозначать размерность соответствующего неприводимого представления разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$, $n \notin \mathbb{Z}$, через $\dim(k, l, \lambda, \mu)$. Напомним, что через $\dim(\lambda)$ обозначается размерность неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_f]$, отвечающего диаграмме λ. Таким образом, размерности неприводимых представлений (λ, μ), $|\lambda| = k$, $|\mu| = l$ алгебры $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ равны $\dim(\lambda)\dim(\mu)$.

Следствие 6.9.

$$\dim(k, l, \lambda, \mu) = \frac{k!l!\dim(\lambda)\dim(\mu)}{|\lambda|!|\mu|!2^{k-|\lambda|}(k-|\lambda|)!}. \tag{10}$$

Доказательство. База индукции: для тех диаграмм, для которых $|\lambda| = k$, $|\mu| = l$, ветвление выглядит так же, как для алгебр $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$. Для них выполняется равенство $\dim(|\lambda|, |\mu|, \lambda, \mu) = \dim\lambda \cdot \dim\mu$, что соответствует формуле (10) при $k = |\lambda|$, $l = |\mu|$.

Теперь рассмотрим, к примеру, вложение $H_{k-1,l}(n) \subset H_{k,l}(n)$. Пусть формула доказана для алгебры $H_{k-1,l}(n)$ и для всех диаграмм, отвечающих алгебре $H_{k,l}(n)$, для которых $k - |\lambda| < i$. Докажем ее для диаграмм вида (k, l, λ, μ), $k - |\lambda| = i$. В случае $|\lambda| > 0$ мы получим

$$\dim(k, l, \lambda, \mu) = \sum_{\lambda' \nearrow \lambda} (k-1, l, \lambda', \mu) + \sum_{\mu' \searrow \mu} (k-1, l, \lambda, \mu').$$

Теперь индукционный переход доказывается при помощи равенств $\sum\limits_{\lambda' \nearrow \lambda} \dim\lambda' = \dim\lambda$ и $\sum\limits_{\mu' \searrow \mu} \dim\mu' = (|\mu| + 1)\dim\mu$ и индукционного предположения.

Наконец, случай $|\lambda| = 0$ также не представляет сложности. $\square$

7. Реализация неприводимых представлений разделенной алгебры Брауэра

В этом и следующем параграфах мы строим реализации представлений и выводим формулы для характеров на основе этих реализаций. Эти построения аналогичны соответствующим построениям для самой алгебры Брауэра, выполненным С. В. Керовым. Им же предложен метод подсчета характеров на основе такой реализации, см. [14].

В работе В. Брауна [8] описана структура вложенных подалгебр алгебры Брауэра. Мы описываем аналогичную структуру разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$. В этом и следующем параграфах мы, не умаляя общности, считаем, что $k \leqslant l$.

Рассмотрим цепочку подалгебр

$$H_{k,l}(n) = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_k,$$

где подалгебра U_r порождается диаграммами, содержащими не менее r горизонтальных дуг. Обозначим факторалгебры U_r/U_{r+1} через A_r, $A_k = U_k$.

Любая диаграмма $d \in H_{k,l}(n)$ однозначно задается набором дуг в верхнем ряду диаграммы, набором дуг в нижнем ряду диаграммы и подстановкой $\sigma \in S_{k-r} \times S_{l-r}$, где r – количество дуг в каждом из рядов.

Групповая алгебра $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ раскладывается в прямую сумму двусторонних идеалов следующим образом:

$$\mathbb{C}[S_k \times S_l] = \sum_{\lambda \vdash k,\, \mu \vdash l} P_\lambda \otimes P_\mu,$$

где P_λ, P_μ – простые компоненты разложения групповых алгебр $\mathbb{C}[S_k]$ и $\mathbb{C}[S_l]$. При этом если $\{e^\lambda_{\alpha\beta}\}$ — базис компоненты P_λ, $\{e^\mu_{\gamma\delta}\}$ – базис компоненты P_μ, то базис для $P_\lambda \otimes P_\mu$ состоит из элементов $\{e^\lambda_{\alpha\beta} e^\mu_{\gamma\delta}\}$. Мы выбираем базисы так, чтобы

$$\begin{cases} e^\lambda_{\alpha\beta} e^\mu_{\gamma\delta} = 0 & \text{при } \lambda \neq \mu, \\ e^\lambda_{\alpha\beta} e^\lambda_{\gamma\delta} = \delta_{\gamma\beta} e^\lambda_{\alpha\delta} & (\text{здесь } \delta_{\gamma\beta} \text{ – дельта Кронекера}). \end{cases}$$

Количество наборов из r дуг для алгебры $H_{k,l}(n)$ равно

$$M(k,l,r) = \frac{k!l!}{2^r(k-r)!(l-r)!r!}.$$

Пронумеруем наборы дуг в алгебре $H_{k,l}(n)$ и будем записывать диаграмму $d \in H_{k,l}(n)$ в виде $d = \sigma U^j_i$, классы диаграмм в алгебре A_r будем обозначать через $[\sigma U^i_j]$.

Теорема 7.1. *Линейное подпространство алгебры A_r, натянутое на элементы*

$$[e^\lambda_{\alpha\beta} e^\mu_{\gamma\delta} U^i_j], \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant f^\lambda, 1 \leqslant \gamma, \delta \leqslant f^\mu, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant M(k,l,r),$$

есть двусторонний идеал $A_r^{\lambda,\mu}$ этой алгебры. При этом алгебра раскладывается в прямую сумму указанных идеалов:

$$A_r = \bigoplus_{\lambda\vdash k-r,\mu\vdash l-r} A_r^{\lambda,\mu}.$$

Доказательство. Теорема следует из формул для умножения элементов вида $[\sigma U_j^i]$, см. доказательство леммы 7.2. $\square$

Конечномерная $\mathbb{C}$-алгебра A размерности n^2 называется *обобщенной матричной алгеброй*, если в ней существует базис $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$, для которого

$$e_{ij} \cdot e_{pq} = \sigma_{jp}^* e_{iq} \tag{11}$$

для некоторого набора чисел $\{\sigma_{kl}^*\}_{k,l=1}^n, \sigma_{kl}^* \in \mathbb{C}$. Обозначим матрицу $\{\sigma_{kl}^*\}_{k,l=1}^n$ через Θ. Алгебра A обладает следующими свойствами (см. [8]):

1. Алгебра A либо проста, либо обладает радикалом $N \neq 0$. Во втором случае алгебра A/N проста.
2. Алгебра A проста в том и только в том случае, если $1 \in A$.
3. Если ранг матрицы Θ равен r, то размерность радикала равна $n^2 - r^2$.
4. Алгебра проста в том и только в том случае, если матрица Θ невырождена.

Лемма 7.2. *Каждый из идеалов $A^{\lambda,\mu}$ является обобщенной матричной алгеброй.*

Доказательство. Возьмем произвольную пару элементов $[U_j^i]$, $[U_{j'}^{i'}] \in A_r$; для них $\mathrm{bars}(U_j^i) = \mathrm{bars}(U_{j'}^{i'}) = r$. Если при этом $\mathrm{bars}(U_j^i \cdot U_{j'}^{i'}) = r$, то

$$\begin{gathered}[U_j^i] \cdot [U_{j'}^{i'}] = n^{c(j,i')}[\sigma(j,i')U_{j'}^i] \\ \text{для некоторых} \quad c(j,i') \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma(j,i') \in S_{k-r} \times S_{l-r};\end{gathered} \tag{12}$$

если $\mathrm{bars}(U_j^i \cdot U_{j'}^{i'}) > r$, то $[U_j^i] \cdot [U_{j'}^{i'}] = 0$.

Для элементов $[e_{\alpha\beta}U_j^i]$, $[e_{\alpha'\beta'}U_{j'}^{i'}]$ мы получим

$$[e_{\alpha\beta}U_j^i]\cdot[e_{\alpha'\beta'}U_{j'}^{i'}] = [e_{\alpha\beta}]\cdot([U_j^i]\cdot[U_{j'}^{i'}])\cdot[e_{\alpha'\beta'}] = n^{c(j,i')}[e_{\alpha\beta}\sigma(j,i')e_{\alpha'\beta'}U_{j'}^i],$$

если $\mathrm{bars}(U^i_j \cdot U^{i'}_{j'}) = r$, и $[e_{\alpha\beta}U^i_j] \cdot [e_{\alpha'\beta'}U^{i'}_{j'}] = 0$ в противном случае. Отсюда следует, что при соответствующей перенумерации базис $\{[e_{\alpha\beta}U^i_j]\}$ алгебры A^λ_r удовлетворяет уравнению (11), что завершает доказательство. □

Более того, в силу следствия 6.8 алгебра $H_{k,l}(n)$ полупроста при $n \notin \mathbb{Z}$, что позволяет утверждать следующее:

Следствие 7.3. *Алгебра $H_{k,l}(n)$ при $n \notin \mathbb{Z}$ является полупростой и раскладывается на простые компоненты следующим образом:*

$$H_{k,l}(n) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{\lambda \vdash k-r, \mu \vdash l-r} C^{\lambda,\mu}_r,$$

где $C^{\lambda,\mu}_r \cong A^{\lambda,\mu}_r$.

Это следствие непосредственно приводит к следующей реализации представлений разделенной алгебры Брауэра.

Мы можем ввести множество $\mathcal{X}_{k,l,r}$ наборов дуг с r горизонталями вида $[i,j]$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k+1 \leqslant j \leqslant k+l$. Аналогично умножению диаграмм, для диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ определяются действие $d \circ a$, количество замкнутых циклов $c(d,a)$ и, при $\mathrm{bars}(d \circ a) = \mathrm{bars}(a)$, подстановка $\sigma(d,a) \in S_{k-r} \times S_{l-r}$. Введем пространство $H_{k,l,r}$ линейных комбинаций элементов из $\mathcal{X}_{k,l,r}$ и зададим действие диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ на $H_{k,l,r}$:

$$\begin{cases} \pi^r_d(a) = n^{c(d,a)} d \circ a, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi^r_d(a) = 0, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) > r. \end{cases}$$

Предложение 7.4. *Операторы π^r_d, $d \in H_{k,l}(n)$, задают неразложимое представление разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$ в пространстве $H_{k,l,r}$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

Для получения всех неприводимых представлений возьмем пару диаграмм Юнга $\lambda \vdash (k-r)$ и $\mu \vdash (l-r)$ и рассмотрим соответствующее пространство $H^{\lambda\mu}$ неприводимого представления групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{k-r} \times S_{l-r}]$. В пространстве $H^{\lambda\mu}_{k,l,r} = H^{\lambda\mu} \bigotimes H_{k,l,r}$ зададим линейные операторы, полагая для $d \in H_{k,l}(n)$

$$\begin{cases} \pi^{\lambda\mu}_d(h \otimes a) = n^{c(d,a)} (\pi^{\lambda\mu}_{\sigma(d,a)} h \otimes d \circ a), & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi^{\lambda\mu}_d(h \otimes a) = 0, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) > r. \end{cases} \tag{13}$$

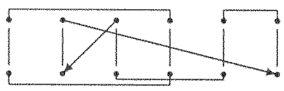
Теорема 7.5. *Операторы $\pi_d^{\lambda\mu}$, $d \in H_{k,l}(n)$, задают неразложимое представление (k,l,λ,μ) разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$ в пространстве $H_{k,l,r}^{\lambda\mu}$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

Доказательство. Представление (k,l,λ,μ) алгебры $H_{k,l}(n)$ отвечает простой компоненте $C_{k-|\lambda|}^{\lambda\mu}$ из следствия 7.3. □

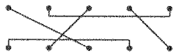
8. Характеры неприводимых представлений разделенной алгебры Брауэра

Характеры представлений разделенной алгебры Брауэра подсчитаны в 1996 году в работе Т. Халверсона [11]. В этом параграфе мы даем прямое и более наглядное доказательство (более подробно это доказательство описано в [4]). В этом параграфе мы полагаем $k \leqslant l$.

Следуя статье [24], сопоставим каждой диаграмме $d \in Br_f(n)$ разбиение $\omega(d)$ по следующему правилу. Соединим соответствующие точки верхнего и нижнего рядов диаграммы пунктирной линией. Начиная с произвольной точки, начнем двигаться в любом направлении по пути, состоящему из дуг диаграммы и пунктирных линий, задавая таким образом направление каждой дуги. Если мы вернулись в исходную точку, не пройдя по всем дугам диаграммы, то мы повторяем процедуру, начиная в новой точке. Полученную в конечном итоге диаграмму мы будем называть ориентированной формой диаграммы d. Каждому получившемуся циклу сопоставим модуль разности между количеством линий диаграммы, направленных сверху вниз и направленных снизу вверх (горизонтальные дуги и пунктирные линии при этом не учитываются). Получившийся набор чисел задает разбиение $\omega(d)$ числа $k+l-2h$, для некоторого h, $0 \leqslant h \leqslant \min(k,l)$. Например,

$d =$  $, \qquad \omega(d) = (2).$

Если диаграмма $d \in H_{k,l}(n)$ содержит две горизонтальные дуги, соединяющие k-ю и $(k+1)$-ю точки в верхнем и нижнем ряду, то, выбрасывая эти две дуги, мы получим некоторую диаграмму $d' \in H_{k-1,l-1}(n)$. Обратное действие, позволяющее построить по диаграмме $d \in H_{k,l}(n)$ диаграмму $d' \in H_{k+1,l+1}(n)$, мы будем обозначать через $d' = e(d)$:

$d =$  , $d' = e(d) =$ 

Положим $\gamma_k = (123\ldots k-1k)$ и $\gamma_\mu = \gamma_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{\mu_l}$, если $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$. Пользуясь центральностью характеров, несложно проверить следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Рассмотрим диаграмму $d \in H_{k,l}(n)$. Для любого характера χ алгебры $H_{k,l}(n)$ выполняется равенство*

$$\chi(d) = \frac{1}{n^h}\chi(e^p(\gamma_\mu)),$$

где разбиение μ состоит из ненулевых частей разбиения $\omega(d) = (0^{m_0}1^{m_1}\ldots)$, $p = (f - |\mu|)/2$, $h = p - m_0$.

Обозначим через $\chi^{\lambda\mu}_{k,l}$ характер неприводимого представления (k, l, λ, μ) алгебры $H_{k,l}(n)$. Прямой подсчет характеров во введенной реализации приводит к следующей лемме.

Лемма 8.2. *Если $|\lambda| < k$ и диаграмма $d' \in H_{k,l}(n)$ имеет вид $d' = e(d)$ для некоторой диаграммы $d \in H_{k-1,l-1}(n)$, то*

$$\chi^{\lambda\mu}_{k,l}(e(d)) = n \cdot \chi^{\lambda\mu}_{k-1,l-1}(d).$$

Замечание 8.3. Пусть $|\lambda| = k$. Если диаграмма имеет вид $d' = e(d)$, то по определению $\pi^{\lambda\mu}_{d'} = 0$. Соответствующее представление (k, l, λ, μ) алгебры $H_{k,l}(n)$, суженное на подалгебру $\mathbb{C}[S_k \times S_l] \subset H_{k,l}(n)$, есть представление групповой алгебры $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$, отвечающее паре диаграмм (λ, μ); сужение на дополнение $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ в $H_{k,l}(n)$ равно нулю.

Таким образом, остается рассмотреть наиболее интересный случай $|\lambda| < k$, $d \in S_k \times S_l \subset H_{k,l}(n)$. Пусть $|\lambda| = k - r$. Несложно понять, что в этом случае

$$(k, l, \lambda, \mu)|_{S_k \times S_l} = \mathrm{Ind}^{S_k \times S_l}_{S_{k-r} \times S_r \times S_r \times S_{l-r}} \left(\lambda_{S_{k-r}} \otimes \mathbb{C}[S_r] \otimes \mu_{S_{l-r}}\right), \quad (14)$$

где $\mathbb{C}[S_r]$ рассматривается как $(S_r \times S_r)$-бимодуль. Как известно, в этом случае

$$\mathbb{C}[S_r] = \sum_{\beta \vdash r} \beta \times \beta. \quad (15)$$

Комбинируя формулы (14) и (15), получаем

$$(k,l,\lambda,\mu)|_{S_k\times S_l} = \mathrm{Ind}_{S_{k-r}\times S_r\times S_r\times S_{l-r}}^{S_k\times S_l}\left(\lambda\otimes(\sum_{\beta\vdash r}\beta\times\beta)\otimes\mu\right) =$$

$$= \sum_{\beta\vdash r}\left(\mathrm{Ind}_{S_{k-r}\times S_r}^{S_k}\left(\lambda\times\beta\right)\otimes\mathrm{Ind}_{S_{l-r}\times S_r}^{S_l}\left(\beta\times\mu\right)\right) =$$

$$= \sum_{\beta\vdash r}\left(\left(\sum_{\nu\vdash k}c_{\lambda\beta}^{\nu}\nu\right)\otimes\left(\sum_{\eta\vdash l}c_{\beta\mu}^{\eta}\eta\right)\right) =$$

$$= \sum_{\nu\vdash k,\eta\vdash l}\left(\sum_{\beta\vdash r}c_{\lambda\beta}^{\nu}c_{\beta\mu}^{\eta}\right)\nu\otimes\eta.$$

Теперь теорема 8.1 и лемма 8.2 приводят к следующей теореме (ср. [11]):

Теорема 8.4. *Пусть* $d\in H_{k,l}(n)$, $\omega(d)\in S_{k-h}\times S_{l-h}$; *тогда*

$$\chi_{k,l}^{\lambda,\mu}(d) = n^h\sum_{\nu\vdash k-h,\eta\vdash l-h}\left(\sum_{\beta}c_{\lambda\beta}^{\nu}c_{\beta\mu}^{\eta}\right)\chi_{S_{k-h}\times S_{l-h}}^{\nu\eta}(\gamma_{\omega(d)}).$$

Замечание 8.5. Аналогичные реализация представлений и подсчет характеров реализованы и для самой алгебры Брауэра, см. [14, 4].

Литература

1. Г. Вейль, *Классические группы.* Иностранная литература, М. (1947).
2. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, *Новый подход к теории представлений симметрических групп.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 57–98.
3. А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, *О преобразовании Фурье на бесконечной симметрической группе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2006), 61–82.
4. П. П. Никитин, *Разделенная алгебра Брауэра и простые блуждания по градуированным графам.* — Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат.наук, С.-Петербург, 2006.
5. J. S. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra.* — Trans. Amer. Math. Soc. **313**, No. 1 (1989), 249–274.
6. G. Benkart, M. Chakrabarti, T. Halverson, R. Leduc, C. Lee, and J. Stroomer, *Tensor product representations of general linear groups and their connections with Brauer algebras.* — J. Algebra **166**, No. 3 (1994), 529–567.
7. R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continious groups.* — Ann. Math. **38**, No. 4 (1937), 854–872.

8. W. P. Brown, *An algebra related to the orthogonal group.* — Michigan Math. J. **3**, No. 1 (1955–1956), 1–22.
9. W. P. Brown, *The semisimplicity of* ω_f^n. — Ann. Math. **63** (1956), 324–335.
10. W. Fulton, *Young Tableaux.* Cambridge Univ. Press (1997).
11. T. Halverson, *Characters of the centralizer algebras of mixed tensor representations of* $gl(r,\mathbb{C})$ *and the quantum group* $\mathcal{U}_q(gl(r,\mathbb{C}))$. — Pacific J. Math. **174**, No. 2 (1996), 359–410.
12. V. F. R. Jones, *Index for subfactors.* — Inv. Math. **72** (1783), 1–25.
13. L. H. Kauffman, *An invariant of regular isotopy.* — Preprint (1986).
14. S. V. Kerov, *Realizations of representations of Brauer semigroup.* — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **164** (1987), 189–193.
15. S. V. Kerov, *Characters of Hecke and Birman–Wenzl algebras.* — Lect. Notes in Math. **1510** (1991), 335–340.
16. S. V. Kerov, G. I. Olshansky, and A. M.Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **316** (1993), 773–778.
17. S. V. Kerov, G. I. Olshansky, and A. M.Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* — Inv. Math. **158**, No. 3 (2004), 551–642.
18. K. Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of classical groups: By means of universal characters.* — Adv. Math. **74** (1989), 57–86.
19. M. Kosuda and J. Murakami, *Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group* $u_q(gl(m,\mathbb{C}))$. — Osaka J. Math. **30** (1993), 475–507.
20. R. Leduc, *A two-parameter version of the centralizer algebra of mixed tensor representations of quantum* $GL(r)$. — PhD thesis, University of Wisconsin–Madison (1994).
21. J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and the representation theory.* — Osaka J. Math. **24** (1987), 745–758.
22. M. Nazarov, *Young's orthogonal form for Brauer's centralizer algebras.* — J. Algebra **182**, No. 3 (1996), 664–693.
23. A. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups.* — Selecta Math. New Series **2**, No. 4 (1996), 581–605.
24. A. Ram, *Characters of Brauer centralizer algebras.* — Pacific J. Math. **169**, No. 1 (1995), 173–200.
25. A. Ram and H. Wenzl, *Matrix units for centralizer algebras.* — J. Algebra **145**, No. 2 (1992), 378–395.
26. I. Schur, *Uber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen.* — PhD thesis (1901).
27. V. G. Turaev, *Operator invariants of matrices and R-matrices.* — Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **53**, No. 5 (1989), 1073–1107.
28. A. M. Vershik, *Gelfand–Tsetlin algebras, expectations, inverse limits, Fourier analysis.* — In: "Unity of Mathematics. In Honor of the Ninetieth Birthday of I. M. Gelfand." Progr. Math. **244**, Birkhauser (2005).
29. H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebras.* — Ann. Math. **129**, No. 1 (1988), 173–193.

Nikitin P. P. The centralizer algebra of the diagonal action of the group $GL_n(\mathbb{C})$ in a mixed tensor space.

We consider the walled Brauer algebra $Br_{k,l}(n)$ introduced by V. Turaev and K. Koike. We prove that this algebra is a subalgebra of the Brauer algebra and that it is isomorphic, for sufficiently large $n \in \mathbb{N}$, to the centralizer algebra of the diagonal action of the group $GL_n(\mathbb{C})$ in a mixed tensor space. We also give a presentation of the algebra $Br_{k,l}(n)$ by generators and relations. For the generic parameter, the algebra is semisimple, and in this case we describe the Bratteli diagram for the family of algebras under consideration and give realizations of the irreducible representations. We also give a new, more natural, proof of the formulas for the characters of the walled Brauer algebras.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk

Поступило 16 июня 2006 г.