Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

В. Ф. Молчанов

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ДВУПОЛОСТНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Памяти моего учителя Ф. А. Березина

Канонические представления на эрмитовых симметрических пространствах G/K были введены Березиным [3] и Вершиком–Гельфандом–Граевым [4] – для целей квантования и квантовой теории поля. Они унитарны относительно некоторого инвариантного нелокального скалярного произведения (формы Березина). Мы думаем, что было бы естественным рассматривать канонические представления в более широком смысле: надо отказаться от условия унитарности и позволить представлениям действовать в достаточно широких пространствах, в частности в пространствах обобщенных функций. Понятие канонического представления (в этом широком смысле) может быть распространено на другие классы полупростых симметрических пространств G/H, в частности на пара-эрмитовы симметрические пространства, см. [9]. Более того, иногда оказывается полезным рассматривать вместе сразу несколько пространств G/H_i, возможно с разными H_i, вложенными как открытые G-орбиты в некоторое компактное многообразие Ω, на котором G действует, так что Ω есть замыкание этих орбит.

Канонические представления можно определить следующим образом. Пусть $\widetilde{G}$ – группа, содержащая G ("надгруппа"), $\widetilde{R}$ – серия представлений группы $\widetilde{G}$, индуцированных характерами некоторой параболической подгруппы $\widetilde{P}$, связанной с пространством G/H, и действующих в функциях на Ω. Канонические представления R группы G – это ограничения представлений $\widetilde{R}$ на G.

В этой статье мы проводим эту программу для двуполостного

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований: гранты 05-01-00074a и 05-01-00001a, Голландской организацией научных исследований (NWO): грант 047-017-015, научными программами "Развитие научного потенциала высшей школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.2.02.

гиперболоида $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^n$. Этот гиперболоид состоит из двух пол $\mathcal{L}^\pm$, каждая из которых есть пространство Лобачевского размерности $n-1$ (риманово полупростое симметрическое пространство ранга один). Группа G есть $\mathrm{SO}_0(n-1,1)$, многообразие Ω есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Гиперболоид $\mathcal{L}$ можно отождествить с этой сферой без экватора. Надгруппа $\widetilde{G}$ есть $\mathrm{SO}_0(n,1)$. Представления $\widetilde{R}$ – это представления группы $\widetilde{G}$, связанные с конусом. Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$ нумеруются числами $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\nu = 0, 1$. Мы разлагаем эти канонические представления на неприводимые составляющие и разлагаем форму Березина на соответствующих пространствах. Случай $n=3$ был рассмотрен в [11] в несколько иной форме. Сейчас мы предполагаем, что $n \geqslant 4$.

На самом пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^+$ канонические представления ранее рассматривались с другими ядрами Березина: $([x,y]+1)^\lambda$, $n=3$, в [4] и $[x,y]^\lambda$ в [8] (по поводу $[x,y]$ см. (1.1) ниже). Эти представления были унитарными. Неунитарный случай с ядром Березина $[x,y]^\lambda$ для произвольного n был рассмотрен в [6]. Заметим, что наши канонические представления можно реализовать как представления сдвигами на пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^+$ с ядром Березина

$$([x,y]+1)^\lambda + (-1)^\nu([x,y]-1)^\lambda$$

(с множителем), действующие в некоторых пространствах функций $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{L}^+)$ и их расширениях.

Изучение канонических представлений на двуполостном гиперболоиде $\mathcal{L}$ оказывается в некотором смысле более естественным, чем изучение таких представлений на одной его поле $\mathcal{L}^+$. В частности, можно легко написать обратный оператор для преобразования Березина $Q_{\lambda,\nu}$: он есть преобразование Березина $Q_{1-n-\lambda,\nu}$. Это позволяет получить разложение ("формулу Планшереля") формы Березина $(f,h)_{\lambda,\nu}$ для всех λ в явном и прозрачном виде.

Введем некоторые обозначения и соглашения.

Мы используем следующее обозначение для характера группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda (\operatorname{sgn} t)^\nu, \quad t \in \mathbb{R}^*, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ \nu = 0, 1.$$

Через $\mathbb{N}$ мы обозначаем $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Знак "$\equiv$" означает сравнение по модулю два.

Если M – многообразие, то $\mathcal{D}(M)$ обозначает пространство Шварца комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, снабженное обычной топологией, и $\mathcal{D}'(M)$ обозначает пространство обобщенных функций на M – антилинейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Для дифференцируемого представления группы Ли мы сохраняем тот же самый символ для соответствующих представлений ее алгебры Ли и универсальной обертывающей алгебры.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ – невырожденная полуторалинейная форма на $\mathcal{D}(M)$, инвариантная относительно пары (T,S) представлений группы G, действующих на $\mathcal{D}(M)$:

$$(T(g)F,f)=(F,S(g^{-1})f). \tag{0.1}$$

Тогда мы можем распространить представление T на $\mathcal{D}'(M)$ посредством (0.1), где (F,f) есть значение обобщенной функции $F\in\mathcal{D}'(M)$ на $f\in\mathcal{D}(M)$. Это в самом деле расширение, поскольку $\mathcal{D}(M)$ можно вложить в $\mathcal{D}'(M)$, сопоставляя функции $f\in\mathcal{D}(M)$ функционал $h\mapsto(f,h)$ с помощью $(\cdot,\cdot)$. Мы сохраняем символ (в данном случае T) для этого расширения.

1. Представления группы G, связанные с конусом

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ билинейную форму

$$[x,y]=-x_1y_1-\ldots-x_{n-1}y_{n-1}+x_ny_n. \tag{1.1}$$

Пусть $G=\mathrm{SO}_0(n-1,1)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих эту форму: $[xg,yg]=[x,y]$. Мы считаем, что G действует на $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$. В соответствии с этим мы пишем векторы в виде строки. Подгруппа K, сохраняющая координату x_n, является максимальной компактной подгруппой в G, она изоморфна $\mathrm{SO}(n-1)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Базис в $\mathfrak{g}$ образован матрицами $L_{ij}=E_{ij}-\lambda_i\lambda_jE_{ji}$, $i<j$, где $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=-1$, $\lambda_n=1$ и E_{ij} – "матричная единица" (1 на месте (i,j) и 0 на других местах). Элемент Казимира в универсальной обертывающей алгебре есть $(2n-4)^{-1}\Delta_{\mathfrak{g}}$, где

$$\Delta_{\mathfrak{g}}=-\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_jL_{ij}^2.$$

Напомним (см. [5]) некоторый материал о представлениях группы G, связанных с конусом (представлениях класса один).

Мы будем использовать “компактную картину”. Пусть S – сечение конуса $[x,x]=0$ в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостью $x_n=1$. Оно состоит из точек $(s_1,\dots,s_{n-1},1)$, таких, что ${s_1}^2+\ldots+s_{n-1}^2=1$. Это единичная сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Представление T_σ, $\sigma\in\mathbb{C}$, группы G действует в $\mathcal{D}(S)$ по формуле

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s)=\varphi\left(\frac{sg}{(sg)_n}\right)(sg)_n^\sigma.$$

Элемент $\Delta_{\mathfrak{g}}$ переходит в скалярный оператор:

$$T_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}})=\sigma(\sigma+n-2)\cdot E.$$

Пусть Δ_S и ds – оператор Лапласа–Бельтрами и мера на S, отвечающие евклидовой метрике на S, а именно, возьмем в качестве локальных координат на S переменные $s_1,\dots,s_{n-1}$, кроме какой-нибудь одной из них, например s_k; тогда

$$\Delta_S=\sum\frac{\partial^2}{\partial {s_i}^2}-{D_1}^2-(n-3)D_1,\quad D_1=\sum s_i\frac{\partial}{\partial s_i},$$
$$ds=|s_k|^{-1}ds_1\ldots\widehat{ds_k}\ldots ds_{n-1}.$$

При отображении $s\mapsto\widetilde{s}=(sg)/(sg)_n$ мера ds преобразуется следующим образом: $d\widetilde{s}=(sg)_n^{2-n}\,ds$. Отсюда следует, что эрмитова форма

$$\langle\psi,\varphi\rangle_S=\int_S\psi(s)\overline{\varphi(s)}\,ds \tag{1.2}$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma,T_{2-n-\overline{\sigma}})$, т.е.

$$\langle T_\sigma(g)\psi,\varphi\rangle_S=\langle\psi,T_{2-n-\overline{\sigma}}(g^{-1})\varphi\rangle_S,\quad g\in G. \tag{1.3}$$

Определим на $\mathcal{D}(S)$ оператор A_σ:

$$(A_\sigma\varphi)(s)=\int_S[s,t]^{2-n-\sigma}\varphi(t)\,dt.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}\sigma<(2-n)/2$, его можно продолжить мероморфно на всю плоскость σ. Он имеет простые полюсы в точках $\sigma\in(2-n)/2+\mathbb{N}$. Оператор A_σ сплетает T_σ с $T_{2-n-\sigma}$, т.е. $T_{2-n-\sigma}(g)A_\sigma=A_\sigma T_\sigma(g)$. Имеем

$$\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S=\langle\psi,A_{\overline{\sigma}}\varphi\rangle_S. \tag{1.4}$$

Полуторалинейная форма $\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S$ инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{\overline{\sigma}})$. В частности, для $\sigma\in\mathbb{R}$ эта форма – инвариантная эрмитова форма для T_σ.

Ограничение представления T_σ на подгруппу K есть представление π группы K вращениями на $\mathcal{D}(S)$: $\pi(k)\varphi(s)=\varphi(sk)$, оно не зависит от σ. Это представление π разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l, действующих в пространствах H_l, $l\in\mathbb{N}$ (напомним, что $n\geqslant 4$). Пространство H_l состоит из ограничений на S однородных гармонических многочленов от переменных $x_1,\dots,x_{n-1}$ степени l. Это пространство является собственным пространством для оператора Лапласа–Бельтрами Δ_S и оператора A_σ с собственными значениями соответственно

$$\mu_l = l(3-n-l), \tag{1.5}$$

$$a(\sigma,l) = (-1)^l 2^{-\sigma}\pi^{(n-2)/2}\,\frac{\Gamma\left(-\sigma-(n-2)/2\right)\Gamma\left(3-n-\sigma\right)}{\Gamma\left(3-n-\sigma-l\right)\Gamma\left(-\sigma+l\right)}. \tag{1.6}$$

Композиция $A_{2-n-\sigma}A_\sigma$ есть скалярный оператор:

$$A_{2-n-\sigma}A_\sigma = \frac{1}{4\pi\omega(\sigma)}\cdot E, \tag{1.7}$$

где $\omega(\sigma)$ – мера Планшереля, см. (2.21).

Представление T_σ можно распространить на пространство $\mathcal{D}'(S)$ обобщенных функций на S посредством формулы (1.3). Аналогично, оператор A_σ можно распространить на $\mathcal{D}'(S)$ посредством (1.4).

Представление T_σ неприводимо при $\sigma\in\mathbb{C}$ за исключением $\sigma\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in 2-n-\mathbb{N}$. Если T_σ неприводимо, то T_σ эквивалентно $T_{2-n-\sigma}$ с помощью оператора A_σ или его вычета.

Имеется три серии неприводимых унитаризуемых представлений. *Непрерывная* серия состоит из T_σ, $\sigma=(2-n)/2+i\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$, скалярное произведение есть (1.2). *Дополнительная* серия состоит из T_σ, $2-n<\sigma<0$, скалярное произведение есть форма $\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S$ с некоторым множителем. *Дискретная* серия состоит из представлений в подфакторах пространства $\mathcal{D}(S)$ при $\sigma\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in 2-n-\mathbb{N}$.

2. Гармонический анализ на пространстве Лобачевского

Формула Планшереля для пространства Лобачевского – классический результат, см., например, [5] и ссылки там. Мы используем несколько иную формулировку (теорема 2.6), на наш взгляд более естественную.

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает двуполостный гиперболоид $[x,x]=1$. Он состоит из двух пол $\mathcal{L}^+ : x_n \geqslant 1$ и $\mathcal{L}^- : x_n \leqslant -1$. Каждая из них есть пространство Лобачевского размерности $n-1$ – однородное пространство G/K. Подгруппа K – стационарная подгруппа точек $\pm x^0 \in \mathcal{L}^{\pm}$, где $x^0 = (0,\dots,0,1)$.

Рассмотрим пространство Лобачевского $\mathcal{L}^+$. Метрика, инвариантная относительно G, есть $ds^2 = -[dx,dx]$. Возьмем в качестве координат на $\mathcal{L}^+$ переменные $x_1,\dots,x_{n-1}$. В них метрика есть

$$ds^2 = \sum \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x_n^2}\right) dx_i dx_j,$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера. Метрика порождает оператор Лапласа–Бельтрами Δ и меру dx на $\mathcal{L}^+$, инвариантные относительно G, а именно,

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + {\Delta_1}^2 + (n-2)\Delta_1, \quad \Delta_1 = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$dx = x_n^{-1} dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Введем на $\mathcal{L}^+$ полярные координаты c, s, где $c \geqslant 1$, $s \in S$, записывая $x \in \mathcal{L}^+$ в виде

$$x = (\sqrt{c^2-1}\cdot s_1, \dots, \sqrt{c^2-1}\cdot s_{n-1}, c).$$

В этих координатах мы имеем

$$\Delta = (c^2-1)\frac{\partial^2}{\partial c^2} + (n-1)c\,\frac{\partial}{\partial c} + \frac{1}{c^2-1}\Delta_S. \tag{2.1}$$

Обозначим через U представление нашей группы G сдвигами в функциях на $\mathcal{L}^+$: $(U(g)f)(x) = f(xg)$. Пространство, где действует U, будет специально указываться, если нужно. Элемент $\Delta_{\mathfrak{g}}$ переходит в оператор Лапласа–Бельтрами: $U(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \Delta$. Представление U сохраняет эрмитову форму

$$\langle f,h\rangle_{\mathcal{L}^+} = \int\limits_{\mathcal{L}^+} f(x)\overline{h(x)}dx.$$

Следовательно, представление U на пространстве $L^2(\mathcal{L}^+, dx)$ унитарно (квазирегулярное представление).

Пространство K-инвариантов для представления T_σ одномерно, базисом служит функция ψ_0, равная 1 тождественно. В соответствии с общей схемой [7] соответствующеее ядро Пуассона $P_\sigma(x,s)$ есть $P_\sigma(x,s) = \big(T_\sigma(g^{-1})\psi_0\big)(s)$, где $g \in G$ такой, что $x^0 g = x$. Мы получаем $P_\sigma(x,s) = [x,s]^\sigma$. Это ядро порождает два преобразования: *преобразование Пуассона* $P_\sigma : \mathcal{D}(S) \to C^\infty(\mathcal{L}^+)$ и *преобразование Фурье* $F_\sigma : \mathcal{D}(\mathcal{L}^+) \to \mathcal{D}(S)$, определяемые так:

$$(P_\sigma \varphi)(x) = \int_S [x,s]^\sigma \varphi(s)\, ds, \tag{2.2}$$

$$(F_\sigma f)(s) = \int_{\mathcal{L}^+} [x,s]^\sigma f(x)\, dx. \tag{2.3}$$

Они сплетают $T_{2-n-\sigma}$ с U и U с T_σ соответственно. Поэтому

$$\Delta P_\sigma \varphi = \sigma(\sigma + n - 2) P_\sigma \varphi, \tag{2.4}$$

так что образ преобразования P_σ есть собственное пространство для Δ с собственным значением $\sigma(\sigma+n-2)$. Для $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$ назовем $F_\sigma f \in \mathcal{D}(S)$ *компонентой Фурье* этой функции f, отвечающей T_σ.

Эти преобразования взаимодействуют с A_σ так:

$$P_\sigma A_\sigma = j(\sigma) P_{2-n-\sigma}, \tag{2.5}$$

$$A_\sigma F_\sigma = j(\sigma) F_{2-n-\sigma}, \tag{2.6}$$

где

$$j(\sigma) = a(\sigma, 0) = 2^{-\sigma}\, \pi^{(n-2)/2}\, \frac{\Gamma(-\sigma - (n-2)/2)}{\Gamma(-\sigma)}. \tag{2.7}$$

Из (1.7) получаем

$$j(\sigma) j(2-n-\sigma) = \frac{1}{4\pi\omega(\sigma)}, \tag{2.8}$$

так что $j(\sigma)$ есть c-функция Хариш–Чандры с точностью до множителя.

Оба преобразования – целые функции по σ. Они сопряжены друг другу:

$$\langle P_\sigma \varphi, f\rangle_{\mathcal{L}^+} = \langle \varphi, F_{\overline{\sigma}} f\rangle_S.$$

Лемма 2.1. *Пусть c, s – полярные координаты точки $x \in \mathcal{L}^+$. Для $c \to \infty$ мы имеем*

$$(P_\sigma \varphi)(x) \sim c^\sigma \, (A_{2-n-\sigma}\varphi)(s) + c^{2-n-\sigma} j(\sigma)\varphi(s). \tag{2.9}$$

В самом деле, если $\operatorname{Re}\sigma > (2-n)/2$, то (2.2) дает первое слагаемое в правой части (2.9). Если $\operatorname{Re}\sigma < (2-n)/2$, то, заменяя φ на $A_\sigma\varphi$ и используя (2.5), (1.7), (2.8), мы получим второе слагаемое.

Лемма 2.2. *Для функции $\varphi \in H_l$ преобразование Пуассона $P_\sigma\varphi$ есть произведение этой функции φ и функции, зависящей только от σ, l и c:*

$$(P_\sigma\varphi)(x) = R_{\sigma,l}(c)\varphi(s). \tag{2.10}$$

Введем следующую функцию:

$$V_{\sigma,l}(p) = (1-p)^{l/2} F\left(\frac{\sigma+n-2+l}{2}, \frac{\sigma+n-1+l}{2}; \sigma + \frac{n}{2}; p\right), \tag{2.11}$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса ([1], гл. 2).

Лемма 2.3. *Для $\sigma \notin (2-n)/2 + \mathbb{Z}$ радиальная часть $R_{\sigma,l}(c)$ имеет следующее выражение:*

$$R_{\sigma,l}(c) = c^\sigma \, a(2-n-\sigma, l)\, V_{2-n-\sigma,l}(c^{-2}) + c^{2-n-\sigma} j(\sigma)\, V_{\sigma,l}(c^{-2}), \tag{2.12}$$

где $a(\sigma, l)$ и $j(\sigma)$ – собственные числа оператора A_σ, см. (1.6) *и* (2.7).

Доказательство. По (2.4) радиальная часть $R_{\sigma,l}(c)$ удовлетворяет уравнению

$$(c^2-1)\frac{d^2R}{dc^2} + (n-1)c\frac{dR}{dc} + \frac{\mu_l}{c^2-1} = \sigma(\sigma+n-2)R, \tag{2.13}$$

μ_l дается формулой (1.5). Сделаем замены: $R = p^{-\sigma/2}(1-p)^{l/2}z$, $p = c^{-2}$. Для z мы получаем уравнение

$$p(1-p)\frac{d^2z}{dp^2} + \left[\frac{4-n}{2} - \sigma + \left(\sigma - l - \frac{3}{2}\right)p\right]\frac{dz}{dp} - \frac{(\sigma-l)(\sigma-l-1)}{4}\, z = 0.$$

Это гипергеометрическое уравнение с параметрами $a = (-\sigma + l)/2$, $b = (-\sigma + l + 1)/2$, $c = -\sigma - (n-4)/2$. Нам нужно взять решение, регулярное в точке $p = 0$ для $\operatorname{Re}\sigma > (2-n)/2$. Соответствующее решение уравнения (2.13) есть $c^\sigma\, V_{2-n-\sigma,l}(c^{-2})$, где $\sigma \notin (4-n)/2 + \mathbb{N}$. Уравнение (2.13) не меняется при замене σ на $2-n-\sigma$. Следовательно, функция $c^{2-n-\sigma}\, V_{\sigma,l}(c^{-2})$ – тоже решение уравнения (2.13). Чтобы найти линейную комбинацию этих решений, дающую функцию $R_{\sigma,l}(c)$, нужно использовать асимптотику этой функции, указанную в лемме 2.1. □

Разложим $V_{\sigma,l}(p)$ по степеням p:

$$V_{\sigma,l}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k p^k. \tag{2.14}$$

Лемма 2.4. *Коэффициенты w_k в (2.14) – многочлены от μ_l (см. (1.5)) степени k с коэффициентами, рационально зависящими от σ: $w_k = w_{\sigma,k}(\mu_l)$, а именно,*

$$\begin{aligned} w_{\sigma,k}(\mu_l) = (-1)^k \sum_{r=0}^{k} \frac{((4-n-\sigma-2k)/2)^{[k-r]}}{2^{2r}\, r!\,(k-r)!\,(\sigma+n/2)^{[r]}} \times \\ \times \prod_{m=0}^{r-1} \Big[\mu_l + (\sigma+n-2+2m)(\sigma+1+2m)\Big]; \end{aligned} \tag{2.15}$$

мы используем обозначение $a^{[m]} = a(a+1)\dots(a+m-1)$.

Доказательство. Применим к гипергеометрической функции в (2.11) преобразование [1], 2.1(22). Получим

$$\begin{aligned} V_{\sigma,l}(p) &= (1-r)^{(2-n-\sigma)/2} F\left(\frac{\sigma+n-2+l}{2}, \frac{\sigma+1-l}{2}; \sigma+\frac{n}{2}; -\frac{p}{1-p}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r\, v_r \cdot p^r\, (1-p)^{-r+(2-n-\sigma)/2}, \end{aligned}$$

где

$$v_r = \frac{((\sigma+n-2+l)/2)^{[r]}\, ((\sigma+1-l)/2)^{[r]}}{(\sigma+n/2)^{[r]}\, r!}.$$

Эти коэффициенты v_r можно выразить через μ_l, именно,

$$v_r = \frac{1}{2^{2r}\, r!\,(\sigma+n/2)^{[r]}} \prod_{m=0}^{r-1} \Big[\mu_l + (\sigma+r-2+2m)(\sigma+1+2m)\Big].$$

Разлагая степени $1-r$ в биномиальные ряды и собирая члены с одним и тем же p^k, мы получим (2.15). $\square$

Обозначим через $W_{\sigma,k}$ оператор на $\mathcal{D}(S)$, для которого пространства H_l являются собственными с собственными значениями $w_{\sigma,k}(\mu_l)$, т.е.

$$W_{\sigma,k} = w_{\sigma,k}(\Delta_S). \tag{2.16}$$

Он есть многочлен от Δ_S степени k с коэффициентами, рациональными по σ. Они имеют простые полюсы в точках $\sigma = -(n/2) - m$, $0 \leqslant m \leqslant k-1$. Например,

$$W_{\sigma,0} = 1, \tag{2.17}$$

$$W_{\sigma,1} = \frac{1}{2(2\sigma+n)}\big[-\Delta_S + (\sigma+n-2)(\sigma+n-1)\big].$$

Следующая теорема доказывается с помощью (2.10), (2.12), (2.14), (2.16).

Теорема 2.5 [6]. *Пусть $\sigma \notin (2-n)/2+\mathbb{Z}$. Для K-финитной функции φ из $\mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуасона $(P_\sigma\varphi)(x)$ разлагается следующим образом:*

$$(P_\sigma\varphi)(x) = c^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (C_{\sigma,k}\varphi)(s)\cdot c^{-2k} + c^{2-n-\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(D_{\sigma,k}\varphi)(s)\cdot c^{-2k},$$

где c, s – полярные координаты точки x,

$$D_{\sigma,k} = j(\sigma)W_{\sigma,k},$$

$$C_{\sigma,k} = A_{2-n-\sigma}W_{2-n-\sigma,k}. \tag{2.18}$$

Операторы $D_{\sigma,k}$ – дифференциальные, $C_{\sigma,k}$ – интегральные. Операторы $C_{\sigma,k}$, $D_{\sigma,k}$, $W_{\sigma,k}$ и A_σ – скалярные на каждом H_l, поэтому они коммутируют друг с другом.

Сферическая функция $\Psi_\sigma(x)$, отвечающая представлению T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, – это преобразование Пуасона K-инварианта ψ_0:

$$\Psi_\sigma(x) = \int_S [x,s]^\sigma\, ds.$$

Она принадлежит $C^\infty(\mathcal{L}^+)$ и зависит только от $c = x_n$; в самом деле, она равна $R_{\sigma,0}(c)$. Поэтому $\Psi_{2-n-\sigma} = \Psi_\sigma$. Далее, она – собственная функция для Δ с собственным значением $\sigma(\sigma+n-2)$.

Вот ее выражение через функции Лежандра:

$$\Psi_\sigma(x) = (2\pi)^{\gamma+1}\,(c^2-1)^{-\gamma/2}\,P_{\sigma+\gamma}^{-\gamma}(c), \tag{2.19}$$

где для краткости мы обозначили

$$\gamma = \frac{n-3}{2}. \tag{2.20}$$

Значение функции Ψ_σ в x^0 равно Ω_{n-1} – объему единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$. Заметим, что обычно используется другая нормировка: значение в x^0 равно 1.

Сферическую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию на $\mathcal{L}^+$.

Вообще, пусть Φ – обобщенная функция на $\mathcal{L}^+$, инвариантная относительно K. Сопоставим ей отображение $\mathcal{D}(\mathcal{L}^+) \to C^\infty(\mathcal{L}^+)$, назовем его *сверткой* с Φ:

$$(\Phi \star f)\,(x) = \langle \Phi, U(g)\overline{f}\rangle_{\mathcal{L}^+},$$

и полуторалинейный функционал $K\,(\Phi|f,\,h)$:

$$K\,(\Phi|f,h) = \langle f,\,\overline{\Phi}\star h\rangle_{\mathcal{L}^+},$$

где $x = x^0 g$. Свертка коммутирует со сдвигами: $U(g)\,(\Phi\star f) = \Phi\star U(g)f,\ g\in G$.

Для сферической функции Ψ_σ свертка есть композиция преобразований Фурье и Пуассона:

$$\Psi_\sigma \star f = P_{2-n-\sigma}\,F_\sigma\,f,$$

а функционал K – скалярное произведение компонент Фурье:

$$K\,(\Psi_\sigma|f,h) = \langle F_{2-n-\sigma}f,\,F_{\overline{\sigma}}h\rangle_S = \langle F_\sigma f,\,F_{2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S.$$

Теорема 2.6. *Квазирегулярное представление U группы G на $L^2(\mathcal{L}^+,dx)$ разлагается в прямой интеграл унитарных неприводимых представлений непрерывной серии с кратностью один. А именно, сопоставим функции $f\in\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$ совокупность $\{F_\sigma f\}$ ее компонент Фурье непрерывной серии ($\sigma = (2-n)/2 + i\rho$). Это соответствие G-эквивариантно. Имеет место формула обращения:*

$$f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) P_{2-n-\sigma} F_\sigma f\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho,$$

где

$$\omega(\sigma) = (2\pi)^{-n} \left(\sigma + \frac{n-2}{2}\right) \sin \left(\sigma + \frac{n}{2}\right) \pi \cdot \Gamma(-\sigma)\, \Gamma(\sigma+n-2), \quad (2.21)$$

и формула Планшереля:

$$\langle f, h\rangle_{\mathcal{L}^+} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \left\langle F_\sigma f, F_{2-n-\overline{\sigma}} h\right\rangle_S \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho. \qquad (2.22)$$

Следовательно, указанное соответствие можно распространить на $L^2(\mathcal{L}^+, dx)$.

Нам удобнее писать в теореме интегралы по всей оси, подынтегральные функции в них четны по ρ. В (2.22) можно писать $F_\sigma h$ вместо $F_{2-n-\overline{\sigma}} h$. Для $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$ мы имеем

$$\omega\left(\frac{2-n}{2} + i\rho\right) = (2\pi)^{-n}\, \rho \operatorname{sh} \rho\pi \cdot \left|\Gamma\left(\frac{2-n}{2} + i\rho\right)\right|^2.$$

Пусть δ – дельта-функция, сосредоточенная в x^0: $\langle \delta, f\rangle_{\mathcal{L}^+} = \overline{f(x^0)}$. Теорема 2.6 эквивалентна разложению

$$\delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\, \Psi_\sigma \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho. \qquad (2.23)$$

3. Представления надгруппы $\widetilde{G}$, связанные с конусом

В качестве надгруппы $\widetilde{G}$ для группы $G = \mathrm{SO}_0(n-1, 1)$ мы берем псевдо-ортогональную группу $\mathrm{SO}_0(n, 1)$. В этом параграфе мы еще раз напомним (см. [5]) некоторый материал о представлениях этой группы $\widetilde{G}$, связанных с конусом. Мы приспосабливаем обозначения к нашим целям в данной работе.

Расширим пространство $\mathbb{R}^n$, в котором действует G, до пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, добавляя координату x_0, и введем в $\mathbb{R}^{n+1}$ билинейную форму

$$[[x, y]] = -x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Группа $\widetilde{G}$ сохраняет эту форму. Как и раньше, мы считаем, что $\widetilde{G}$ действует справа.

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает конус $[[x,x]]=0$, $x_n>0$, в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для $\lambda\in\mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{C})$ пространство функций f класса C^∞ на $\mathcal{C}$, однородных степени λ:

$$f(tx)=t^\lambda f(x),\ \ x\in\mathcal{C},\ \ t>0.$$

Представление $\widetilde{R}_\lambda$ группы $\widetilde{G}$ действует в $\mathcal{D}_{1-n-\lambda}(\mathcal{C})$ сдвигами:

$$(\widetilde{R}_{\lambda,\nu}(g)f)(x)=f(xg),\ \ x\in\mathcal{C},\ \ g\in\widetilde{G}.$$

Пусть Ω – сечение конуса $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $x_n=1$. Оно состоит из точек $u=(u_0,u_1,\ldots,u_{n-1},1)$, $u_0^2+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2=1$, так что оно есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Пусть du – евклидова мера на Ω. Функции из $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{C})$ полностью определяются своими ограничениями на Ω. Эти ограничения образуют все пространство $\mathcal{D}(\Omega)$. В нем представление $\widetilde{R}_\lambda$ реализуется следующим образом:

$$(\widetilde{R}_\lambda(g)f)(u)=f\left(ug/(ug)_n\right)(ug)_n^{1-n-\lambda}. \tag{3.1}$$

Эрмитова форма

$$\langle f,h\rangle_\Omega=\int\limits_\Omega f(u)\overline{h(u)}du \tag{3.2}$$

инвариантна относительно пары $(\widetilde{R}_{\lambda,\nu},\widetilde{R}_{1-n-\overline{\lambda}})$:

$$\langle\widetilde{R}_\lambda(g)f,h\rangle_\Omega=\langle f,\widetilde{R}_{1-n-\overline{\lambda}}(g^{-1})h\rangle_\Omega. \tag{3.3}$$

Оператор B_λ на $\mathcal{D}(\Omega)$, определенный формулой

$$(B_\lambda f)(u)=\int\limits_\Omega[[u,v]]^\lambda f(v)dv,$$

сплетает $\widetilde{R}_\lambda$ с $\widetilde{R}_{1-n-\lambda}$. С формой (3.2) он взаимодействует так:

$$\langle B_\lambda f,h\rangle_\Omega=\langle f,B_{\overline{\lambda}}h\rangle_\Omega. \tag{3.4}$$

Композиция B_λ и $B_{1-n-\lambda}$ есть скалярный оператор:

$$B_\lambda B_{1-n-\lambda}=\gamma(\lambda)\cdot E, \tag{3.5}$$

где

$$\gamma(\lambda)^{-1}=(2\pi)^{-n}(2\lambda+n-1)\Gamma(-\lambda)\Gamma(\lambda+n-1)\cos\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi.$$

Представление $\widetilde{R}_\lambda$ и оператор B_λ можно распространить на $\mathcal{D}'(\Omega)$ формулами (3.3) и (3.4).

Вложим группу G в группу $\widetilde{G}$ как подгруппу, сохраняющую координату x_0. Она комутирует с диагональной матрицей $J = \mathrm{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$.

Две функции $\theta_{\lambda,\nu}(u) = u_0^{\lambda,\nu}$, где $\nu = 0, 1$, принадлежат $\mathcal{D}'(\Omega)$, они инвариантны относительно G в представлении $\widetilde{R}_\lambda$ (и всякая G-инвариантная функция есть их линейная комбинация). Оператор B_λ переводит функцию $\theta_{1-n-\lambda,\nu}$ в функцию $\theta_{\lambda,\nu}$ с множителем:

$$B_\lambda \theta_{1-n-\lambda,\nu} = (-1)^\nu c(\lambda,\nu)^{-1} \theta_{\lambda,\nu},$$

где

$$c(\lambda,\nu)^{-1} = (-1)^\nu 2^{\lambda+n-1} \pi^{(n-3)/2} \Gamma(2-n-\lambda) \Gamma\left(\lambda + \frac{n-1}{2}\right) \times$$
$$\times \left[\cos\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)\pi - (-1)^\nu \cos\frac{n\pi}{2}\right].$$

Мы имеем

$$c(\lambda,\nu)\ c(1-n-\lambda,\nu) = \gamma(\lambda)^{-1}. \tag{3.6}$$

4. Канонические представления

Пусть $\nu = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ подпространства в $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{C})$ и $\mathcal{D}(\Omega)$ соответственно, состоящие из функций четности ν относительно инволюции J:

$$f(xJ) = (-1)^\nu f(x). \tag{4.1}$$

Пусть R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, обозначает ограничение представления $\widetilde{R}_\lambda$ на группу G. Операторы $R_\lambda(g)$, $g \in G$, коммутируют с J, так что они сохраняют оба подпространства $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$, $\nu = 0, 1$. Следовательно, R_λ распадается на два представления $R_{\lambda,\nu}$. Эти представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G назовем *каноническими представлениями*. Они действуют на $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ сдвигами или на $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ посредством правой части формулы (3.1). Их можно распространить на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций f из $\mathcal{D}'(\Omega)$ четности ν относительно J. Билинейная форма (3.2) инвариантна относительно пары $(R_{\lambda,\nu}, R_{1-n-\lambda,\nu})$.

Возьмем в $\mathbb{R}^{n+1}$ еще один конус: $\mathcal{C}' : [[x,x]] = 0, x \neq 0$. Он есть объединение $\mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$. Рассмотрим сечение $\widetilde{\mathcal{L}}$ этого конуса гиперплоскостью $x_0 = 1$. Его можно отождествить с двуполостным гиперболоидом $\mathcal{L}$: точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{L}$ мы сопоставляем точку $\widetilde{x} = (1, x_1, \dots, x_n)$ из $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Группа G имеет три орбиты на Ω при действии $u \mapsto ug/(ug)_n$, а именно, две орбиты $\Omega^+ = \{u_0 > 0\}$ и $\Omega^- = \{u_0 < 0\}$ размерности $n-1$ и одну орбиту $\Omega_0 = \{u_0 = 0\}$ размерности $n-2$. Последнюю можно отождествить с многообразием S из § 2: точке $s = (s_1, \dots, s_n)$ из S мы сопоставляем точку $\mathring{s} = (0, s_1, \dots, s_n)$ из Ω_0. Множество $\Omega' = \Omega^+ \cup \Omega^-$ можно отождествить с двуполостным гиперболоидом $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Отображение строится с помощью образующих конуса $\mathcal{C}'$: точке u из Ω сопоставляем точку $\widetilde{x} = u/u_0$ из $\widetilde{\mathcal{L}}$. Именно поэтому мы называем представления $R_{\lambda,\nu}$ каноническими представлениями на двуполостном гиперболоиде. Меры на $\mathcal{L}$ и Ω связаны так:

$$dx = |u_0|^{1-n} du. \tag{4.2}$$

Вернемся к конусу $\mathcal{C}$. Его сечение $\widetilde{\mathcal{L}}^+$ гиперплоскостью $x_0 = 1$ можно отождествить с пространством Лобачевского $\mathcal{L}^+$. Ограничим функции из $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ на $\widetilde{\mathcal{L}}^+ = \mathcal{L}^+$. Мы получим некоторое пространство $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{L}^+)$ функций на $\mathcal{L}^+$. Оно содержит $\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$ и содержится в $C^\infty(\mathcal{L}^+)$. На нем (и, в частности, на $\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$) представление $R_{\lambda,\nu}$ становится представлением U сдвигами.

Пусть функция f принадлежит $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$. Ее ограничения $f(u)$ на Ω и $f(x)$ на $\widetilde{\mathcal{L}}^+ = \mathcal{L}^+$ связаны так:

$$f(u) = u_0^{1-n-\lambda,\nu} f(x), \quad x \longleftrightarrow \widetilde{x} = u/|u_0|. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$. Если* $\operatorname{Re}\lambda > -\nu - n/2$, *то ее ограничение на $\widetilde{\mathcal{L}}^+ = \mathcal{L}^+$ принадлежит $L^2(\mathcal{L}^+, dx)$.*

Определим оператор $Q_{\lambda,\nu} : \mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ формулой

$$Q_{\lambda,\nu} = c(\lambda,\nu)\, B_\lambda \circ J,$$

так что в Ω-реализации мы имеем

$$(Q_{\lambda,\nu} f)(u) = c(\lambda,\nu) \int\limits_\Omega [[u, vJ]]^\lambda f(v) dv. \tag{4.4}$$

Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{1-n-\lambda,\nu}$. В силу (3.5) и (3.6) мы имеем

$$Q_{1-n-\lambda,\nu}\, Q_{\lambda,\nu} = E. \tag{4.5}$$

Пусть $(f,h)_{\lambda,\nu}$ – билинейная форма:

$$(f,\,h)_{\lambda,\nu}=\frac{1}{2}\langle Q_{\lambda,\nu}f,\,h\rangle_\Omega. \tag{4.6}$$

Она инвариантна относительно пары $(R_{\lambda,\nu},\,R_{\overline{\lambda},\nu})$. В частности, для вещественных λ это эрмитова форма, инвариантная относительно $R_{\lambda,\nu}$. Перейдем к $\mathcal{L}^+$. Используя свойство четности (4.1) и соотношение (4.3), мы можем переписать (4.4) и (4.6) как интегралы по $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^+\times\mathcal{L}^+$:

$$(Q_{\lambda,\nu}f)(x)=\int\limits_{\mathcal{L}^+}E_{\lambda,\nu}(x,y)f(y)dy,$$

$$(f,\,h)_{\lambda,\nu}=\int\limits_{\mathcal{L}^+\times\mathcal{L}^+}E_{\lambda,\nu}(x,y)f(x)\overline{h(y)}dxdy,$$

где

$$E_{\lambda,\nu}(x,y)=c(\lambda,\nu)\Big\{([x,y]+1)^\lambda+(-1)^\nu([x,y]-1)^\lambda\Big\}. \tag{4.7}$$

Назовем ядро $E_{\lambda,\nu}(x,y)$, оператор $Q_{\lambda,\nu}$ и форму $(f,\,h)_{\lambda,\nu}$ *ядром Березина*, *преобразованием Березина* и *формой Березина* соответственно.

Обобщенные функции $\theta_{1-n-\lambda,\nu}$ на Ω переходят в функцию на $\mathcal{L}^+$, тождественно равную единице. Оператор $Q_{\lambda,\nu}$ переводит ее в себя.

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ порождает следующие представления $L_{\lambda,\nu}$ и $M_{\lambda,\nu}$, связанные с границей Ω_0 многообразий $\Omega^\pm$ (*граничные представления*).

Соответственно полярным координатам c,s на $\mathcal{L}^+$ введем на Ω полярные координаты u_0,s, где $s\in S$:

$$u=(u_0,\sqrt{1-u_0^2}\cdot s_1,\ldots,\sqrt{1-u_0^2}\cdot s_{n-1},1).$$

Мера du в этих координатах есть $du=(1-u_0^2)^\gamma du_0ds$, см. (2.20) для γ.

Пусть f – функция из $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. Рассмотрим ее как функцию от полярных координат u_0,s. Рассмотрим ее ряд Тейлора $a_0+a_1u_0+a_2u_0^2+\ldots$ по степеням u_0. Здесь $a_m=a_m(f)$ – функции из $\mathcal{D}(S)$.

Обозначим через $\Sigma_\nu^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1$, пространство обобщенных функций из $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$, имеющих вид

$$\sum_{m=0}^{k} \varphi_m(s)\delta^{(m)}(u_0),$$

где $\varphi_m \in \mathcal{D}(S)$, δ – дельта-функция Дирака на прямой, $\delta^{(m)}$ – ее производные, $m \equiv \nu$. Пусть $\Sigma_\nu(\Omega) = \cup\Sigma_\nu^k(\Omega)$.

Обозначим через $a_k^*(f)$ коэффициенты Тейлора функции $f^* = (1 - u_0^2)^\gamma f$. Мы имеем

$$(1 - u_0^2)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)u_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^*(f)u_0^k. \tag{4.8}$$

Это позволяет выразить $a_k^*(f)$ через $a_k(f)$ и обратно – посредством треугольных матриц с единичной диагональю.

Обобщенная функция $\varphi(s)\delta^{(m)}(u_0)$ действует на функцию $f \in \mathcal{D}_\nu(\Omega)$ следующим образом:

$$\langle \varphi\delta^{(m)}(u_0), f\rangle_\Omega = (-1)^m m! \langle \varphi, a_m^*(f)\rangle_S. \tag{4.9}$$

Обозначим через $L_{\lambda,\nu}$ ограничение представления $R_{\lambda,\nu}$ на $\Sigma_\nu(\Omega)$. Это представление записывается в виде верхней треугольной матрицы с диагональю $T_{2-n-\lambda+m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \equiv \nu$.

Обобщенные функции из $\Sigma_\nu^k(\Omega)$ можно распространить естественным образом на некоторое пространство, более широкое, чем $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. А именно, пусть $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$ – пространство функций f класса C^∞ на $\Omega^\pm$ и Ω_0 четности ν по u_0 и имеющих разложение Тейлора порядка k:

$$f(u) = a_0 + a_1u_0 + \cdots + a_ku_0^k + o(u_0^k),$$

где $a_m \in \mathcal{D}(S)$. Тогда (4.9) сохраняется для $f \in \mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$ с $m \leqslant k$.

Пусть $a(f)$ обозначает столбец из коэффициентов Тейлора $a_m(f)$. Представление $M_{\lambda,\nu}$ действует на этих столбцах:

$$M_{\lambda,\nu}(g)a(f) = a(R_{\lambda,\nu}(f)).$$

Оно записывается в виде нижней треугольной матрицы с диагональю $T_{1-n-\lambda-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \equiv \nu$.

Мы не касаемся здесь вопросов разложения $L_{\lambda,\nu}$ и $M_{\lambda,\nu}$. Заметим только, что, аналогично [11], эти представления разлагаются в прямые суммы неприводимых составляющих для λ общего положения: $\lambda \notin (2-n)/2+\mathbb{N}$ и $\lambda \notin -n/2-\mathbb{N}$ соответственно. Эти разложения даются простыми полюсами преобразований Пуассона и Фурье, см. §6. Полюсы второго порядка дают жордановы клетки.

5. Разложение формы Березина на $\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$

В этом параграфе мы рассматриваем форму Березина $(f,h)_{\lambda,\nu}$ на пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$, заданную ядром Березина (4.7). Мы раскладываем эту форму по инвариантным полуторалинейным формам, отвечающим представлениям T_σ.

Теорема 5.1. *Пусть $f,h\in\mathcal{D}(D)$. Тогда для $\operatorname{Re}\lambda<(2-n)/2+\nu$ и для $\lambda=(2-n)/2+\nu$ мы имеем*

$$(f,h)_{\lambda,\nu}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)\langle F_\sigma f, F_{2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho}d\rho; \quad (5.1)$$

для $(2-n)/2+\nu+2r<\operatorname{Re}\lambda<(6-n)/2+\nu+2r$ и для $\lambda=(6-n)/2+\nu+2r$, $r\in\mathbb{N}$, мы имеем

$$(f,h)_{\lambda,\nu}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}+\sum\frac{M(\lambda,m)}{j(\lambda-m)}\langle A_{\lambda-m}F_{\lambda-m}f, F_{\overline{\lambda}-m}h\rangle_S, \quad (5.2)$$

где $m=\nu+2s$, интеграл обозначает точно такой же интеграл, что и в (5.1), сумма берется по $s=0,1,\ldots,r$; наконец, для $\operatorname{Re}\lambda=(2-n)/2+\nu+2r$, $\lambda\neq(2-n)/2+\nu+2r$ мы имеем

$$(f,h)_{\lambda,\nu}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}+\sum+\frac{1}{2}\cdot\frac{M(\lambda,k)}{j(\lambda-k)}\langle A_{\lambda-k)}F_{\lambda-k}f, F_{\overline{\lambda}-k}h\rangle_S, \quad (5.3)$$

где $k=\nu+2r$, сумма в (5.3) содержит такие же слагаемые, что и в (5.2), но берется по $s=0,\ldots,r-1$ (для $r=0$ сумма отсутствует), множитель $\omega(\sigma)$ дается формулой (2.21),

$$\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)=\frac{\Gamma(2-n-\lambda-\sigma)\Gamma(-\lambda+\sigma)}{\Gamma(2-n-\lambda)\Gamma(-\lambda)}\times$$
$$\times\frac{\cos(\lambda+n/2)\pi+(-1)^\nu\cos(\sigma+n/2)\pi}{\cos(\lambda+n/2)\pi+(-1)^\nu\cos(n/2)\pi}, \quad (5.4)$$

$$M(\lambda,m)=(-2\pi)^{n-1}(2\lambda+n-2-2m)\cdot\frac{\Gamma(\lambda+n-1)\Gamma(\lambda+1)}{m!\Gamma(2\lambda+n-1-m)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\lambda+n-2-m)}{\Gamma(\lambda+1-m)}\times$$
$$\times\frac{\sin\lambda\pi}{\cos(\lambda+n/2)\pi+(-1)^\nu\cos(n/2)\pi}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Форма Березина – это полуторалинейная форма, соответствующая (см. §2) обобщенной функции

$$E_{\lambda,\nu}(x)=c(\lambda,\nu)\left\{(x_n+1)^\lambda+(-1)^\nu(x_n-1)^\lambda\right\}.$$

Следовательно, теорема эквивалентна разложению этой обобщенной функции по сферическим функциям Ψ_σ.

Сферическая функция Ψ_σ зависит только от $x_n=c$: $\Psi_\sigma(u)=R_{\sigma,0}(c)$, последняя функция удовлетворяет уравнению

$$L\,y=\sigma(\sigma+n-2)y, \tag{5.6}$$

где $L=(c^2-1)(d^2/dc^2)+(n-1)c\,(d/dc)$ (радиальная часть оператора Δ, см. (2.1)). Приведем оператор L к самосопряженному виду заменой $y=(c^2-1)^{-\gamma/2}\,z$, см. (2.20) для γ. Тогда уравнение (5.6) превращается в уравнение $\widetilde{L}\,z=\tau(\tau+1)z$, где

$$\widetilde{L}=(c^2-1)\,\frac{d^2}{dc^2}+2c\,\frac{d}{dc}-\frac{\gamma^2}{c^2-1},\quad \tau=\sigma+\gamma.$$

Рассмотрим на полуоси $[1,\infty)$ дифференциальный оператор

$$\widetilde{L}_\alpha=(c^2-1)\,\frac{d^2}{dc^2}+2c\,\frac{d}{dc}-\frac{\alpha^2}{c^2-1},\quad \alpha\in\mathbb{C},$$

с граничным условием $\lim_{c\to1}\,(c-1)^\alpha\left\{\alpha\varphi(c)-(c-1)\varphi'(c)\right\}=0$. Уравнение $\widetilde{L}_\alpha\,z=\tau(\tau+1)z$, $\tau\in\mathbb{C}$, есть уравнение Лежандра [1]. Обозначим через $\langle\langle F,H\rangle\rangle$ скалярное произведение из $L^2(1,\infty)$:

$$\langle\langle F,H\rangle\rangle=\int\limits_1^\infty F(c)\,\overline{H(c)}\,dc.$$

Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ и $|\alpha|<1/2$. Оператор $\widetilde{L}_\alpha$ имеет непрерывный спектр кратности один, лежащий на $(-\infty,-1/4]$. Соответствующее разложение по собственным функциям (равенство Парсеваля) есть

$$\langle\langle F, H\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\alpha,\tau)\langle\langle F, \overline{P_\tau^{-\alpha}}\rangle\rangle \, \langle\langle P_\tau^{-\alpha}, H\rangle\rangle\Big|_{\tau=-1/2+i\rho} d\rho, \qquad (5.7)$$

где $P_\tau^{-\alpha}(c)$ – функция Лежандра первого рода,

$$\Omega(\alpha,\tau) = -\frac{1}{4\pi}(2\tau+1)\cos\tau\pi\cdot\Gamma(\alpha-\tau)\,\Gamma(\alpha+\tau+1).$$

Теперь сопоставим функции $f\in\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$ следующую функцию $(Mf)(c)$ на $[1,\infty)$:

$$(Mf)(c) = \int_{\mathcal{L}^+} f(x)\,\delta(x_n-c)\,dx,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака на прямой. Эта функция имеет вид

$$(Mf)(c) = (c^2-1)^\gamma\,\psi(c), \qquad (5.8)$$

где $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Если Φ – локально интегрируемая функция на $\mathcal{L}^+$, зависящая только от $x_n=c$: $\Phi(x)=F(x_n)$, то

$$\int_{\mathcal{L}^+} \Phi(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_1^\infty F(c)\,\overline{(Mf)(c)}\,dc. \qquad (5.9)$$

Применим (5.7) к функциям

$$F(c) = (c^2-1)^{\alpha/2}\left\{(c+1)^\lambda + (-1)^\nu (c-1)^\lambda\right\},$$
$$H(c) = (c^2-1)^{\alpha/2}\psi(c),$$

где $\psi(c)$ берется из (5.8). Функция $F(c)$ принадлежит $L^2(1,\infty)$ для $\mathrm{Re}(\alpha+\lambda)<-1/2$, $\mathrm{Re}(\alpha+2\lambda)>-1$. Для функции Лежандра $P_\tau^{-\alpha}$ мы возьмем выражение (см. [1], 3.2(3))

$$P_\tau^{-\alpha}(c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^{-\alpha/2} F\left(-\tau,\ \tau+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-c}{2}\right).$$

Интеграл $\langle\langle F, \overline{P_\tau^{-\alpha}}\rangle\rangle$ сходится абсолютно для

$$\mathrm{Re}\,\alpha>-1,\ \mathrm{Re}\,(-\lambda-\alpha+\tau)>0,\ \mathrm{Re}\,(-\lambda-\alpha-\tau-1)>0,$$
$$\mathrm{Re}\,(\lambda+\alpha+1)>0 \qquad (5.10)$$

и вычисляется с помощью формул [1], 2.4(4) и [2], 20.2(10). В результате мы получаем

$$\langle\langle F, \overline{P_\tau^{-\alpha}}\rangle\rangle = 2^{\alpha+\lambda+1}\frac{\Gamma(-\lambda-\alpha-\tau-1)\Gamma(-\lambda-\alpha+\tau)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\lambda-\alpha)}\times$$
$$\times\left[1+(-1)^\nu\frac{\sin\tau\pi}{\sin(\lambda+\alpha)\pi}\right].$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda < (2-n)/2$. Тогда условия (5.10) позволяют взять $\alpha=\gamma$. Пусть $\tau=\sigma+\gamma$, как и раньше. Тогда условия (5.10) с $\operatorname{Re}\tau=-1/2$, или, что то же самое, $\operatorname{Re}\sigma=(2-n)/2$, дают

$$(1-n)/2 < \operatorname{Re}\lambda < (2-n)/2. \tag{5.11}$$

Разложение (5.7) с нашими F и H можно продолжить по α в точку $\alpha=\gamma$. Тогда $\langle\langle P_\tau^{-\alpha}, H\rangle\rangle$ становится равным $(2\pi)^{-\gamma-1}\langle\Psi_\sigma, f\rangle_{\mathcal{L}+}$, см. (5.9) и (2.19), а $\Omega(\alpha,\tau)$ превращается в $(2\pi)^{n-1}\omega(\sigma)$. Окончательно, умножая это разложение на $c(\lambda,\nu)$, мы получаем

$$E_{\lambda,\nu} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\,\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)\,\Psi_\sigma\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho}d\rho, \tag{5.12}$$

где ω и Λ даются формулами (2.21), (5.4). Это разложение выведено для (5.11).

Как функция от σ функция Λ имеет полюсы в точках

$$\sigma=\lambda-k,\ \sigma=2-n-\lambda+l \tag{5.13}$$

и нули в точках

$$\sigma=1-n-\lambda-k,\ \sigma=\lambda+1+l, \tag{5.14}$$

где $k,\, l\in\mathbb{N}$ и $k\equiv\nu$, $l\equiv\nu$.

Следовательно, разложение (5.12) может быть продолжено в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda<(2-n)/2$.

Теперь мы продолжим (5.12) аналитически из этой полуплоскости направо. Когда пара полюсов $\sigma=\lambda-m$ и $\sigma=2-n-\lambda-m$ пересекает линию интегрирования – прямую $\operatorname{Re}\sigma=(2-n)/2$, она дает дополнительное слагаемое D_m. Это слагаемое равно умноженной на 2π разности вычетов подынтегральной функции в этих полюсах, или

$$D_m = 4\pi\operatorname{Res}_{\sigma=\lambda-m}\,\omega(\sigma)\,\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)\cdot\Psi_\sigma = M(\lambda,m)\Psi_{\lambda-m},$$

где $M(\lambda, m)$ дается формулой (5.5).

Пусть пара полюсов попадает на линию $\mathrm{Re}\,\sigma = (2-n)/2$. Если эти полюсы различны, то вклад этой пары равен $(1/2)D_m$. Если эти полюсы совпадают, то они оба равны $(2-n)/2$, так что дополнительное слагаемое исчезает из-за множителя $\sigma + (n-2)/2$ в $\omega(\sigma)$. □

Функция Λ имеет следующие свойства (отражающие эквивалентность T_σ и $T_{2-n-\sigma}$ и свойство (4.5)):

$$\Lambda(\lambda, \nu, 2-n-\sigma) = \Lambda(\lambda, \nu, \sigma), \tag{5.15}$$

$$\Lambda(\lambda, \nu, \sigma)\Lambda(1-n-\lambda, \nu, \sigma) = 1. \tag{5.16}$$

Теорема 5.2. *Для* $-1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < -1/2$ *форма Березина* $(f,h)_{\lambda,\nu}$ *и преобразование Березина* $Q_{\lambda,\nu}$ *ограничены в* $L^2(D, d\mu)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что Λ с $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$ как функция от $\rho \in \mathbb{R}$ ограничена на $\mathbb{R}$. Но это следует из ее поведения на бесконечности:

$$\Lambda(\lambda, \nu, (2-n)/2 + i\rho) \sim \mathrm{const} \cdot |\rho|^{1-n-2\lambda},$$

см. [1], 1.18(6). □

Пусть λ вещественно и $\lambda < 0$. Тогда представление $R_{\lambda,\nu}$, рассматриваемое на $\mathcal{D}(D)$, унитаризуемо относительно формы Березина, взятой с подходящим знаком (*унитарные канонические представления*).

Заметим, что (2.23) можно вывести из (5.1), взяв (5.1) в точке $\lambda = -\gamma - 1$. В самом деле, обобщенная функция $(x_n+1)^\lambda$ регулярна в этой точке, а обобщенная функция $(x_n-1)^\lambda$ имеет простой полюс с вычетом $2^\gamma \Omega_{n-1}\delta$.

6. Преобразования Пуассона и Фурье, связанные с каноническим представлением

Для функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ рассмотрим ее преобразование Пуассона $P_\sigma\varphi$ как ограничение на $\widetilde{\mathcal{L}}^+ = \mathcal{L}^+$ некоторой функции из $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$. Теперь перейдем от $\widetilde{\mathcal{L}}^+$ к Ω. Для этого в (2.2) перепишем $[x,s]$ как $[[\widetilde{x}, \mathring{s}]]$ и затем используем (4.3). Тогда мы получим отображение $P_{\lambda,\nu,\sigma} : \mathcal{D}(S) \longrightarrow C^\infty(\Omega')$, задаваемое формулой

$$(P_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi)(u) = u_0^{1-n-\lambda-\sigma,\nu} \int_S [[u, \mathring{s}]]^\sigma \varphi(s) ds.$$

Оно сплетает $T_{2-n-\sigma}$ с $R_{\lambda,\nu}$. Назовем его *преобразованием Пуассона, связанным с каноническим представлением* $R_{\lambda,\nu}$. Здесь мы рассматриваем $R_{\lambda,\nu}$ как ограничение на $C^\infty(\Omega')$ представления $R_{\lambda,\nu}$, действующего на обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Преобразование Пуассона взаимодействует со сплетающими операторами A_σ и $Q_{\lambda,\nu}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\nu,\sigma}A_\sigma &= j(\sigma)P_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}, \\ Q_{\lambda,\nu}P_{\lambda,\nu,\sigma} &= \Lambda(\lambda,\nu,\sigma)P_{1-n-\lambda,\nu,\sigma}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Первое из этих соотношений следует из (2.5), второе – из формулы (6.6) ниже с помощью (6.4). Теорема 2.5 дает:

Теорема 6.1. *Для K-финитной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ и $\sigma \notin (2-n/2)+\mathbb{Z}$ преобразование Пуассона имеет следующее разложение по степеням u_0:*

$$\begin{aligned} (P_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi)(u) = u_0^{1-n-\lambda-\sigma,\nu} &\sum_{k=0}^{\infty}(C_{\sigma,k}\varphi)(s)\cdot u_0^{2k} \\ +u_0^{-\lambda+\sigma-1,\nu} &\sum_{k=0}^{\infty}(D_{\sigma,k}\varphi)(s)\cdot u_0^{2k}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где u имеет полярные координаты u_0, s, см. §4.

“Ведущие” множители $u_0^{-\lambda-2-\sigma,\nu}$ и $u_0^{-\lambda+\sigma-1,\nu}$ в (6.2) дают полюсы преобразования Пуассона $P_{\lambda,\nu,\sigma}$. Они располагаются в полюсах функции $\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)$, см. (5.13). Если полюс μ принадлежит только одной из серий (5.13), то он простой и $P_{\lambda,\nu,\sigma}$ имеет в нем вычет

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\lambda,\nu,\lambda-k} &= 2\frac{(-1)^k}{k!}j(\lambda-k)\cdot\xi_{\lambda,k},\ k\equiv\nu, \\ \widehat{P}_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+l} &= -2\frac{(-1)^l}{l!}\xi_{\lambda,l}\circ A_{\lambda-l},\ l\equiv\nu, \end{aligned}$$

где $\xi_{\lambda,k}$ – оператор $\mathcal{D}(S)\to\Sigma_\nu^k(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$, $k\equiv\nu$, определенный следуюшим образом:

$$\xi_{\lambda,k}(\varphi) = \sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{k!}{(k-m)!}W_{\lambda-k,m}(\varphi)\cdot\delta^{(k-2m)}(u_0).$$

Он зависит от λ мероморфно – с простыми полюсами в точках $\lambda \in (4-n)/2+\mathbb{N}$, такими, что $\lambda+n/2 \leqslant k \leqslant 2\lambda+n-2$. Он сплетает $T_{2-n-\lambda+k}$ с $L_{\lambda,\nu}$.

Если полюс μ принадлежит обеим сериям (5.13), то $\lambda \in (2-n)/2+\mathbb{N}$ и он второго порядка. Первые лорановские коэффициенты можно написать аналогично [10].

Возьмем вычет обеих частей (6.1) в $\sigma = \lambda - k$, $k \equiv \nu$; мы получим

$$Q_{\lambda,\nu}\xi_{\lambda,k} = \frac{1}{2}(-1)^{\nu} k! j(2-n-\lambda+k) \cdot M(\lambda,k) \cdot P_{1-n-\lambda,\nu,\lambda-k}, \qquad (6.3)$$

где $M(\lambda,k)$ дается формулой (5.5).

Теперь рассмотрим функцию f в (2.3) как ограничение на $\widetilde{\mathcal{L}}^+ = \mathcal{L}^+$ некоторой функции из $\mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$, затем перепишем $[x,s]$ как $[[\widetilde{x},\overset{\circ}{s}]]$ и используем (4.3) и (4.2). Мы получим интеграл по Ω с множителем $1/2$, поскольку отображение $u \mapsto \widetilde{x} = x$ накрывает $\mathcal{L}^+$ дважды. Отбрасывая этот множитель, мы получим оператор $F_{\lambda,\nu,\sigma}:\ \mathcal{D}_\nu(\Omega) \to \mathcal{D}_\varepsilon(S)$, определенный формулой

$$(F_{\lambda,\nu,\sigma}f)(s) = \int_\Omega [[u,\overset{\circ}{s}]]^\sigma u_0^{\lambda-\sigma,\nu} f(u)du.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}\sigma > -1/2$, $\operatorname{Re}(\lambda\pm\sigma) > -1$ и может быть продолжен аналитически по σ и λ до мероморфной функции. Назовем оператор $F_{\lambda,\nu,\sigma}$ *преобразованием Фурье, связанным с каноническим представлением* $R_{\lambda,\nu}$. Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с T_σ.

Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$\langle F_{\lambda,\nu,\sigma}f,\varphi\rangle_S = \langle f, P_{1-n-\overline{\lambda},\nu,\overline{\sigma}}\varphi\rangle_\Omega. \qquad (6.4)$$

Преобразование Фурье взаимодействует со сплетающими операторами A_σ и $Q_{\lambda,\nu}$ следующим образом:

$$A_\sigma F_{\lambda,\nu,\sigma} = j(\sigma)F_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}, \qquad (6.5)$$

$$F_{1-n-\lambda,\nu,\sigma}Q_{\lambda,\nu} = \Lambda(\lambda,\nu,\sigma)F_{\lambda,\nu,\sigma}. \qquad (6.6)$$

Первое из этих соотношений следует из (2.6), второе будет доказано в §7.

Полюсы по σ преобразования Фурье располагаются в нулях (5.14) функции Λ. Если полюс μ принадлежит только одной из серий (5.14), то он простой и $F_{\lambda,\nu,\sigma}$ имеет в нем вычет

$$\widehat{F}_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-k} = 2j(1-n-\lambda-k)\cdot b_{\lambda,k},\ \ k \equiv \nu,$$
$$\widehat{F}_{\lambda,\nu,\lambda+1+l} = -2A_{-\lambda-2-l}\circ b_{\lambda,l},\ \ l \equiv \nu,$$

где $b_{\lambda,k}$ – "граничный" оператор $\mathcal{D}_\nu(\Omega)\to\mathcal{D}(S)$, определяемый через коэффициенты Тейлора (см. §4):

$$b_{\lambda,k}(f) = \sum_{m=0}^{[k/2]} W_{1-n-\lambda-k,k-m}\Big(a_m(f)\Big). \tag{6.7}$$

Оператор $b_{\lambda,k}$ мероморфен по λ с простыми полюсами в точках $\lambda\in -(n+2)/2-\mathbb{N}$, такими, что $-\lambda+(2-n)/2\leqslant k\leqslant 2-\lambda-n$. Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $T_{1-n-\lambda-k}$. Соотношение (6.4) дает соотношение для вычетов:

$$\langle b_{\lambda,k}(f),\varphi\rangle_S = \frac{(-1)^k}{k!}\langle f,\xi_{1-n-\overline{\lambda},k}(\varphi)\rangle_\Omega. \tag{6.8}$$

Операторы $b_{\lambda,m}$ с $m\leqslant k$ можно распространить естественным образом на пространство $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$.

Если полюс μ принадлежит обеим сериям (5.14), то $\lambda\in -n/2-\mathbb{N}$ и он второго порядка. Первые лорановские коэффициенты можно написать аналогично [10].

Формула (6.7) выражает $b_{\lambda,k}(f)$ через коэффициенты Тейлора $a_m(f)$ посредством треугольной матрицы с единичной диагональю. Следовательно, коэффициенты $a_m(f)$ можно выразить через $b_{\lambda,k}(f)$. Вот явные выражения:

$$a_m(f) = \sum_{r=0}^{[m/2]} W_{\lambda+1+m-2r,r}\Big(b_{\lambda,m-2r}(f)\Big); \tag{6.9}$$

эту формулу можно доказать подобно аналогичным формулам в [10, 12]. Для $a_m^*(f)$ имеем

$$a_m^*(f) = \sum_{r=0}^{[m/2]} W^*_{\lambda+1+m-2r,r}\Big(b_{\lambda,m-2r}(f)\Big). \tag{6.10}$$

Здесь $W^*_{\sigma,r}$ – оператор в $\mathcal{D}(S)$, определенный аналогично $W_{\sigma,r}$ с помощью производящей функции:

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^*_{\sigma,k}(\mu_l)p^k = (1-p)^{-l/2}F\left(\frac{\sigma+2-l}{2},\ \frac{\sigma+1-l}{2};\ \sigma+\frac{n}{2};\ p\right). \tag{6.11}$$

По [1], 2.1(23) функция (6.11) есть функция (2.11), умноженная на $(1-p)^{-l-\gamma}$. Вместе с (4.8) это выводит (6.10) из (6.9). В свою очередь, формула (6.10) с (4.9) и (6.8) дает выражение "старого базиса" $\varphi\delta^{(m)}(u_0)$ в $\Sigma_\nu(\Omega)$ через "новый базис" $\xi_{\lambda,k}$:

$$\varphi\delta^{(m)}(u_0) = \sum_{r=0}^{[m/2]} \frac{m!}{(m-2r)!}\, \xi_{\lambda,m-2r}\Big(W^*_{2-n-\lambda+m-2r,r}(\varphi)\Big).$$

Рассмотрим преобразования Пуассона и Фурье в полюсах друг друга: $P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m}$, $P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}$, $F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}$, $F_{\lambda,\nu,\lambda-m}$, где $m \equiv \nu$. Тогда эти преобразования обладают некоторыми специальными свойствами.

Для преобразований Пуассона $P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m}$ и $P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}$ ведущие множители – это p^m и $p^{-2\lambda-n-m,\nu}$. Первый из них – многочлен от u_0. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и возьмем $\operatorname{Re}\lambda < -k-n/2$. Тогда для всякого $m = 0, 1, \ldots, k$ второй ведущий множитель есть $o(u_0^k)$, так что, в частности, образы преобразований $P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m}$ и $P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}$ лежат в $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$, и мы можем применить к ним граничные операторы $b_{\lambda,r}$, $r \leqslant k$. Эти граничные операторы оказываются обратными операторами для преобразований Пуассона – с точностью до множителя или оператора A_σ. А именно,

Теорема 6.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda < -k-n/2$. Тогда для $m \leqslant k$ и $m \equiv \nu$ мы имеем*

$$b_{\lambda,m} \circ P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m} = A_{\lambda+1+m}, \tag{6.12}$$

$$b_{\lambda,m} \circ P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m} = j(\lambda+1+m)\cdot E, \tag{6.13}$$

а для $r, m \leqslant k, r \neq m$, мы имеем

$$b_{\lambda,r} \circ P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m} = 0, \tag{6.14}$$

$$b_{\lambda,r} \circ P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m} = 0. \tag{6.15}$$

Доказательство. Расмотрим (6.12) и (6.14). Композиция $b_{\lambda,r} \circ P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}$ есть оператор $\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(S)$, сплетающий $T_{\lambda+1+m}$ с $T_{1-n-\lambda-r}$. Следовательно, если $r \neq m$, то этот оператор равен нулю. Если $r = m$, то он есть оператор $A_{\lambda+1+m}$ с точностью до множителя. По (6.2) коэффициент для $P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}\varphi$ перед p^m есть $C_{1-n-\lambda-m,0}\,\varphi$, который равен $A_{\lambda+1+m}\varphi$, см. (2.18) и (2.17).

С другой стороны, старший член в $b_{\lambda,m}$ есть коэффициент Тейлора a_m. Следовательно, композиция $b_{\lambda,m} \circ P_{\lambda,\nu,1-n-\lambda-m}$ – это в точности $A_{\lambda+1+m}$. Аналогично доказываются равенства (6.13) и (6.15). $\square$

При условиях теоремы 6.2 мы можем применить обобщенные функции из $\Sigma_\nu^k(\Omega)$ к образам преобразований Пуассона, участвующим в теореме 6.2. Следовательно, в качестве f в (6.8) мы можем взять функцию из этих образов. В результате, используя теорему 6.1, мы получаем следующее действие базисных обобщенных функций из $\Sigma_\nu^k(\Omega)$.

Теорема 6.3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda < -k-n/2$. Тогда для $m \leqslant k$ и $m \equiv \nu$ мы имеем*

$$\langle \xi_{1-n-\lambda,m}(\psi), P_{\overline{\lambda},\nu,1-n-\overline{\lambda}-m}\varphi\rangle_\Omega = (-1)^m m!\,\langle A_{\lambda+1+m}\psi,\varphi\rangle_S,$$
$$\langle \xi_{1-n-\lambda,m}(\psi), P_{\overline{\lambda},\nu,\overline{\lambda}+1+m}\varphi\rangle_\Omega = (-1)^m m!\,j(\lambda+1+m)\langle\psi,\varphi\rangle_S,$$

а для $r,m \leqslant k$, $r \neq m$, мы имеем

$$\langle \xi_{1-n-\lambda,r}(\psi), P_{\overline{\lambda},\nu,1-n-\overline{\lambda}-m}\varphi\rangle_\Omega = 0,$$
$$\langle \xi_{1-n-\lambda,r}(\psi), P_{\overline{\lambda},\nu,\overline{\lambda}+1+m}\varphi\rangle_\Omega = 0.$$

Теперь, используя соотношение (6.4), мы можем распространить преобразования Фурье $F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}$ и $F_{\lambda,\nu,\lambda-m}$ на обобщенные функции ζ из $\Sigma_\nu^k(\Omega)$, $m \leqslant k$. А именно, для $\operatorname{Re}\lambda > (2-n)/2+k$ (мы заменили λ на $1-n-\lambda$) и $m \leqslant k$, $m \equiv \nu$, мы полагаем

$$\langle F_{\lambda,\nu,\lambda-m}\zeta,\varphi\rangle_S = \langle\zeta, P_{1-n-\overline{\lambda},\nu,\overline{\lambda}-m}\varphi\rangle_\Omega,$$
$$\langle F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}\zeta,\varphi\rangle_S = \langle\zeta, P_{1-n-\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\lambda}+m}\varphi\rangle_\Omega.$$

Тогда из теоремы 6.3 следует

Теорема 6.4. *Преобразования Фурье $F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}$ и $F_{\lambda,\nu,\lambda-m}$ являются обратными преобразованиями для $\xi_{\lambda,m}$ – с точностью до множителя или оператора A_σ; более точно, имеют место следующие соотношения – для $m,r \leqslant k$ и $m \equiv r \equiv \nu$:*

$$F_{\lambda,\nu,\lambda-m}\circ\xi_{\lambda,m} = (-1)^m m! A_{2-n-\lambda+m},$$
$$F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}\circ\xi_{\lambda,m} = (-1)^m m!\,j(2-n-\lambda+m)\cdot E,$$
$$F_{\lambda,\nu,\lambda-m}\circ\xi_{\lambda,r} = 0,\ r\neq m,$$
$$F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}\circ\xi_{\lambda,r} = 0,\ r\neq m.$$

Эти формулы показывают, что отображения $F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}$ и $F_{\lambda,\nu,\lambda-m}$, определенные первоначально как отображения в пространство $\mathcal{D}'(S)$ обобщенных функций на S, на самом деле являются отображениями в пространство $\mathcal{D}(S)$.

Наконец, установим следующее свойство. Мы имеем право положить $\sigma = \lambda + 1 + m$ в (6.1): в этой точке преобразование Пуассона $P_{1-n-\lambda,\nu,\sigma}$ имеет полюс, но функция $\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)$ имеет нуль. Раскрывая эту неопределенность, мы получаем для $m \equiv \nu$

$$Q_{\lambda,\nu} P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m} = T(\lambda, m) \cdot \xi_{1-n-\lambda,m} \circ A_{1-n-\lambda-m}, \tag{6.16}$$

где

$$T(\lambda, m) = -\frac{\Gamma(\lambda+n-1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+n+m)} \cdot \frac{\sin(\lambda+n/2)\pi \cdot \tan\lambda\pi}{\cos(\lambda+n/2)\pi + (-1)^\nu \cos(n/2)\pi}. \tag{6.17}$$

7. Разложение канонических представлений

Мы ограничимся общим случаем: λ лежит в полосах

$$I_k = \{\lambda : -n/2 + k < \operatorname{Re}\lambda < (2-n)/2 + k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Случай (A): $\lambda \in I_0$.

Возьмем функции $f \in \mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ и $h \in \mathcal{D}_{\overline{\lambda},\nu}(\mathcal{C})$ и рассмотрим их ограничения $f(x)$ и $h(x)$ на $\mathcal{L}^+$. Поскольку $\lambda \in I_0$, по лемме 4.1 обе функции $f(x)$ и $h(x)$ принадлежат $L^2(\mathcal{L}^+, dx)$. Напишем для них формулу Планшереля (2.22) и перейдем в этой формуле к ограничениям $f(u)$ и $h(u)$ функций f и h на Ω, см. (4.3). Левая часть превращается в $(1/2)\langle f, h\rangle_\Omega$. Компоненты Фурье $F_\sigma f$ и $F_{2-n-\overline{\sigma}} h$ становятся $(1/2)F_{\lambda,\nu,\sigma} f$ и $(1/2)F_{1-n-\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}} h$. Следовательно, мы получаем

$$\langle f, h\rangle_\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\omega(\sigma)\langle F_{\lambda,\nu,\sigma} f, F_{1-n-\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}} h\rangle_S \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho. \tag{7.1}$$

Теперь, используя соотношение (6.4), мы перебросим преобразование Фурье с h на f – как преобразование Пуассона. Мы получим формулу, которая дает разложение функции f, рассматриваемой как обобщенная функция (из $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$):

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\omega(\sigma) P_{\lambda,\nu,2-n-\sigma} F_{\lambda,\nu,\sigma} f \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho. \tag{7.2}$$

Теперь возьмем функции $f \in \mathcal{D}_{1-n-\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ и $h \in \mathcal{D}_{1-n-\overline{\lambda},\nu}(\mathcal{C})$. Тогда для $\lambda \in I_0$ обе функции $f(x)$ и $h(x)$ снова принадлежат $L^2(\mathcal{L}^+, dx)$. Возьмем форму Березина от этих функций. В силу теоремы 5.2 мы можем написать разложение (5.1) этой формы, когда λ принадлежит полосе $I_0^+ : (1-n)/2 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < (2-n)/2$. Переходя к $f(u)$ и $h(u)$, как выше, мы получаем разложение формы $(f,h)_{\lambda,\nu}$ – пока еще для I_0^+:

$$(f,h)_{\lambda,\nu} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\omega(\sigma)\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)\langle F_{\lambda,\nu,\sigma}f, F_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho. \tag{7.3}$$

Сейчас мы в состоянии доказать (6.6). Возьмем (7.1) с $1-n-\lambda$ вместо λ для функций $Q_{\lambda,\nu}f$ и h. Мы получаем

$$\langle Q_{\lambda,\nu}f, h\rangle_\Omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\omega(\sigma)\langle F_{1-n-\lambda,\nu,\sigma}Q_{\lambda,\nu}f, F_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S \Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho, \tag{7.4}$$

где f и h принадлежат $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ и $\lambda \in I_0$. Сравнивая (7.3) с (7.4) и принимая во внимание (4.6), мы получаем (6.6) сначала для I_0^+, а затем по аналитичности для всех возможных λ.

Теперь распространим (7.3) на полосу $I_0^- : -n/2 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant (1-n)/2$. Пусть λ принадлежит этой полосе. Тогда $1-n-\lambda$ принадлежит I_0^+. Напишем (7.3), заменив λ на $1-n-\lambda$, для пары $Q_{\lambda,\nu}f$ и $Q_{\overline{\lambda},\nu}h$. Используя (4.6), (4.5), (6.6) и (5.15), (5.16), мы получаем (7.3) для I_0^-. Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема 7.1. *Пусть $\lambda \in I_0$. Тогда каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ разлагается в прямой интеграл представлений непрерывной серии с кратностью один. А именно, сопоставим всякой функции $f \in \mathcal{D}_\nu(\Omega)$ совокупность ее компонент Фурье $\{F_{\lambda,\nu,\sigma}f\}$ с $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$. Это соответствие G-эквивариантно. Имеет место формула обращения, см.* (7.2), *и разложение формы Березина $(f,h)_{\lambda,\nu}$, см.* (7.3).

Случай (B): $\lambda \in I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Продолжим (7.2) аналитически по λ из полосы I_0 направо – в полосу I_{k+1}. Здесь дополнительные слагаемые дают полюсы преобразования Пуассона. Мы получаем

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{\substack{m=0,\\ m\equiv\nu}}^{k} \pi_{\lambda,m}(f), \tag{7.5}$$

где интеграл означает правую часть (7.2) и

$$\pi_{\lambda,m} = \frac{(-1)^m}{m!}\, j(2-n-\lambda+m)^{-1} \cdot \xi_{\lambda,m} \circ F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}. \tag{7.6}$$

Аналогично аналитическое продолжение (7.3) дает (здесь дополнительные слагаемые происходят из полюсов Λ, они же – полюсы $P_{\lambda,\nu,\sigma}$)

$$(f,h)_{\lambda,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{\substack{m=0,\\ m\equiv\nu}}^{k} \frac{1}{4} M(\lambda,m) \langle F_{\lambda,\nu,\lambda-m} f, F_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\lambda}+m} h\rangle_S, \tag{7.7}$$

где интеграл означает правую часть (7.3).

Операторы (7.6) с $m \leqslant k$ можно распространить на $\Sigma_\nu^k(\Omega)$, поскольку преобразование Фурье $F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}$, входящее в $\pi_{\lambda,m}$, уже распространено, см. § 6. Таким образом, операторы $\pi_{\lambda,m}$ с $m \leqslant k$ определены на пространстве

$$\mathcal{D}_\nu^k(\Omega) = \mathcal{D}_\nu(\Omega) + \Sigma_\nu^k(\Omega).$$

Разложение (7.7) также можно распространить на это пространство. В частности, для обобщенных функций из $\Sigma_\nu^k(\Omega)$ интегралы в (7.5) и (7.7) исчезают.

Обозначим через $V_{\lambda,m}$ образ оператора $\xi_{\lambda,m}$ (или $\pi_{\lambda,m}$).

Теорема 7.2. *Операторы $\pi_{\lambda,m}$, $m \leqslant k$, действующие на пространстве $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$, являются проекторами на пространства $V_{\lambda,m}$, т.е. имеют место соотношения*

$$\pi_{\lambda,m}\pi_{\lambda,m} = \pi_{\lambda,m}, \tag{7.8}$$

$$\pi_{\lambda,m}\pi_{\lambda,r} = 0,\ r \neq m. \tag{7.9}$$

Кроме того, имеют место “соотношения ортогональности”:

$$(\pi_{\lambda,m}(f), \pi_{\overline{\lambda},m}(h))_{\lambda,\nu} = \frac{1}{4} M(\lambda,m) \langle F_{\lambda,\nu,\lambda-m} f, F_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\lambda}+m} h\rangle_S, \tag{7.10}$$

$$(\pi_{\lambda,m}(f), \pi_{\overline{\lambda},r}(h))_{\lambda,\nu} = 0,\ r \neq m. \tag{7.11}$$

Доказательство. Соотношения (7.8) и (7.9) проверяются с использованием теоремы 6.4. Докажем (7.10) и (7.11). По (7.6) и (6.3) мы имеем

$$Q_{\lambda,\nu}\pi_{\lambda,m}f = \frac{1}{2}M(\lambda,m)P_{1-n-\lambda,\nu,\lambda-m}F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}f.$$

Применяя (6.8), мы получаем

$$(\pi_{\lambda,m}(f),\pi_{\overline{\lambda},r}(h))_{\lambda,\nu} = \frac{1}{4}M(\lambda,m)j(2-n-\lambda+r)^{-1}\times$$
$$\times\langle b_{1-n-\lambda,r}P_{1-n-\lambda,\nu,\lambda-m}F_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+m}f,\ F_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\lambda}+r}h\rangle_S.$$

По теореме 6.2 это выражение равно нулю для $r \neq m$ и равно правой части (7.10) для $r = m$ в силу (6.5). □

Мы видим, что разложение (7.7) – это "теорема Пифагора" для разложения (7.5). Таким образом, в случае (B) мы имеем следующую теорему:

Теорема 7.3. *Пусть $\lambda \in I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ нужно дополнить до пространства $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$. На последнем пространстве представление $R_{\lambda,\nu}$ распадается в сумму двух слагаемых: первое разлагается как представление $R_{\lambda,\nu}$ в случае (A), второе разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $T_{2-n-\lambda+m}$ с $m = 0,1,\dots,k$, $m \equiv \nu$. А именно, сопоставим всякой функции f из $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$ совокупность $\{F_{\lambda,\nu,\sigma}f,\ \pi_{\lambda,\nu,m}(f)\}$, где $\sigma = (2-n)/2 + i\rho$ и $m = 0,1,\dots,k$, $m \equiv \nu$. Это соответствие G-эквивариантно. Функция f восстанавливается с помощью формулы обращения (7.5). Кроме того, имеет место "формула Планшереля" (7.7) для формы Березина.*

Для $-n/2 < \lambda < 0$ теоремы 7.3 и 7.1 дают разложение унитарных канонических представлений, см. §5.

Случай (C): $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Продолжим (7.2) аналитически по λ из полосы I_0 налево – в полосу I_{-k-1}. Здесь линию интегрирования $\operatorname{Re}\sigma = (2-n)/2$ пересекают полюсы

$$\sigma = 1-n-\lambda-m,\ \sigma = \lambda+1+m,\ m \leqslant k,\ m \equiv \nu, \qquad (7.12)$$

подынтегальной функции (это полюсы преобразования Фурье $F_{\lambda,\nu,\sigma}$) и дают дополнительные слагаемые. Мы получаем

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{\substack{m=0,\\ m\equiv\nu}}^{k} \Pi_{\lambda,m}(f), \tag{7.13}$$

где интеграл означает правую часть (7.2) и

$$\Pi_{\lambda,m} = j(\lambda+1+m)^{-1} P_{\lambda,\nu,\lambda+1+m} \circ b_{\lambda,m}.$$

Теперь продолжим (7.3). Здесь полюсы (7.12) оказываются полюсами обоих преобразований Фурье. К счастью, функция Λ как функция от σ имеет нули (первого порядка) в полюсах преобразования Фурье. Следовательно, полюсы (7.12) подынтегральной функции являются простыми. После продолжения мы получаем

$$(f,h)_{\lambda,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{\substack{m=0,\\ m\equiv\nu}}^{k} N(\lambda,m)\langle A_{1-n-\lambda-m} b_{\lambda,m} f,\, b_{\overline{\lambda},m} h\rangle_S, \tag{7.14}$$

где интеграл означает правую часть (7.3) и

$$N(\lambda,m) = \frac{1}{2}(-1)^m m!\, j(\lambda+1+m)^{-1}\, T(\lambda,m), \tag{7.15}$$

$T(\lambda,m)$ задается формулой (6.17).

Обозначим через $\mathcal{P}_{\lambda,m}$ образ пространства $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ под действием преобразования $\Pi_{\lambda,m}$. Операторы $\Pi_{\lambda,m}$ с $m \leqslant k$ можно распространить на пространство $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$, поскольку операторы $b_{\lambda,m}$ с $m \leqslant k$ определены на этом пространстве. В частности, можно применить $\Pi_{\lambda,m}$ к $\mathcal{P}_{\lambda,r}$, $r \leqslant k$, и мы вправе рассматривать произведения $\Pi_{\lambda,m}\Pi_{\lambda,r}$, где $m, r \leqslant k$.

Теорема 7.4. *Операторы $\Pi_{\lambda,m}$, $m \leqslant k$, являются проекторами на $\mathcal{P}_{\lambda,m}$, а именно, имеют место соотношения*

$$\Pi_{\lambda,m}\Pi_{\lambda,m} = \Pi_{\lambda,m}, \tag{7.16}$$

$$\Pi_{\lambda,m}\Pi_{\lambda,r} = 0,\ r \neq m. \tag{7.17}$$

Кроме того, имеют место “соотношения ортогональности”:

$$(\Pi_{\lambda,m}(f), \Pi_{\overline{\lambda},m}(h))_{\lambda,\nu} = N(\lambda,m)\langle A_{1-n-\lambda-m} b_{\lambda,m}(f), b_{\overline{\lambda},m}(h)\rangle_S, \tag{7.18}$$

$$(\Pi_{\lambda,m}(f), \Pi_{\overline{\lambda},r}(h))_{\lambda,\nu} = 0,\ r \neq m, \tag{7.19}$$

где $m \equiv \nu$, *а* $N(\lambda, m)$ *дается формулой* (7.15).

Доказательство. Соотношения (7.16), (7.17) проверяются с помощью (6.13) и (6.15). Соотношения (7.18), (7.19) проверяются с помощью (6.16), (6.8), (6.13) и (6.15). □

Формулы (7.18), (7.19) показывают, что (7.14) есть "теорема Пифагора" для разложения (7.13). Таким образом, в случае (C) мы имеем следующую теорему.

Теорема 7.5. *Пусть* $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда представление* $R_{\lambda,\nu}$, *рассматриваемое на пространстве* $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$, *распадается в сумму двух слагаемых. Первое действует на подпространстве функций, для которых их коэффициенты Тейлора* $a_m(f)$ *равны нулю для* $m \leqslant k$, *и разлагается как представление* $R_{\lambda,\nu}$ *в случае* (A), *второе разлагается в прямую сумму неприводимых представлений* $T_{1-n-\lambda-m}$, $m \leqslant k$, $m \equiv \nu$, *действующих на сумме пространств* $\mathcal{P}_{\lambda,m}$. *Имеет место формула обращения, см.* (7.13), *и "формула Планшереля" для формы Березина, см.* (7.14).

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра.* Наука, М. (1965).
2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований,* т. II. Наука, М. (1970).
3. Ф. А. Березин, *Квантование в комплексных симметрических пространствах.* — Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. **39**, No. 2 (1975), 363–402.
4. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы* $SL(2,R)$, *где* R *– кольцо функций.* — Успехи матем. наук **28**, No. 5 (1973), 83–128.
5. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп.* Наука, М. (1965).
6. Л. И. Грошева, *Канонические и граничные представления на пространстве Лобачевского.* — Вестник Тамбовского ун-та **9**, No. 3 (2004), 306–311.
7. В. Ф. Молчанов, *Гармонический анализ на однородных пространствах.* — В сб.: Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр., ВИНИТИ **59** (1990), сс. 5–144.
8. G. van Dijk, S. Hille, *Canonical representations related to hyperbolic spaces.* — J. Funct. Anal. **147** (1997), 109–139.
9. V. F. Molchanov, *Quantization on para-Hermitian symmetric spaces.* — Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2 (1996), vol. 175 (Adv. in Math. Sci.–31), 81–95.
10. V. F. Molchanov, *Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet.* — Acta Appl. Math. **81**, Nos. 1–3 (2004), 191–204.

11. V. F. Molchanov, *Canonical representations on the two-sheeted hyperboloid.* — Indag. Math. **16**, Nos. 3–4 (2005), 609–630.
12. V. F. Molchanov, L. I. Grosheva, *Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane.* — Acta Appl. Math. **79**, Nos. 1, 2 (2003), 59–77.

Molchanov V. F. Canonical representations on two-sheeted hyperboloids.

The two-sheeted hyperboloid $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^n$ can be identified with the unit sphere Ω in $\mathbb{R}^n$ without the equator. Canonical representations of the group $G = \mathrm{SO}_0(n-1,1)$ on $\mathcal{L}$ are defined as the restrictions to G of the representations of the overgroup $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(n,1)$ associated with a cone. They act on functions and distributions on the sphere Ω. We decompose these canonical representations into irreducible constituents and decompose the Berezin form.

Тамбовский государственный
университет им. Г. Р. Державина

E-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Поступило 17 мая 2006 г.