Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

П. Н. Мнев

О СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ СУПЕР-BF МОДЕЛИ

Данная заметка является введением к результатам, касающимся симплициальной супер-BF модели, полученным автором в рамках работы над программой, предложенной А. Лосевым. Эти результаты, также как и более подробные разъяснения, будут опубликованы в отдельной статье. Мы рассматриваем их как шаг в направлении разрешения задачи построения комбинаторной теории Черна–Саймонса, поставленной М. Атьей в [1]. Также мы пропагандируем алгебраический взгляд на симплициальную супер-BF модель как на деформацию алгебры де Рама на многообразии в (еще требующей строгого определения) категории "квантовых L_∞-алгебр".

BF модель является известной моделью топологической квантовой теории поля, упрощенной версией теории Черна–Саймонса. Для калибровочной группы Ли G (соответствующую алгебру Ли обозначим g) и многообразия M размерности D действие BF модели есть

$$S_M(A,B) = \mathrm{tr} \int_M B \wedge (dA + A \wedge A), \tag{1}$$

где A – 1-форма со значениями в g (точнее, связность в главном G-расслоении на M) и B — $(D-2)$-форма со значениями в g. Термин "BF модель" происходит от стандартного обозначения $F = dA + A \wedge A$ для кривизны A, при этом действие записывается как $\mathrm{tr} \int B \wedge F$.

Нас интересует вариант этой модели, где B и A заменены на суперполя. Именно, мы назначаем A и B неоднородными дифференциальными формами со значениями в g:

$$A = A^0 + \cdots + A^D,\ B = B^0 + \cdots + B^D,$$

где A^j — j-формы со значениями в g и B^j — $(D-j)$-формы со значениями в g. Также мы приписываем им внутренние ("духовые") четности таким образом, чтобы полная четность для A

была равна 1, а полная четность для B была равна D (полная четность определяется как сумма внутренней четности и степени дифференциальной формы по модулю 2). Действие снова дается формулой (1), где A и B уже суперполя. Эта модель обладает важным свойством: пространство полей имеет структуру многообразия Баталина–Вилковыского, причем A^j и B^j являются канонически сопряженными координатами на нем, и действие (1) удовлетворяет квантовому мастер-уравнению

$$\Delta_{\mathrm{BV}} e^{\frac{1}{\hbar}S(A,B)} = 0, \tag{2}$$

где Δ_{BV} — нечетный лапласиан

$$\Delta_{\mathrm{BV}} = \sum_{j=0}^{D} \frac{\partial}{\partial A^j}\frac{\partial}{\partial B^j}.$$

Действие (1) можно рассматривать как производящую функцию для структурных констант дифференциала и скобки Ли в дифференциальной градуированной алгебре Ли (DGLA) $g\otimes\Omega(M)$, где $\Omega(M)$ — алгебра де Рама на M. Мастер-уравнение (2) является производящим соотношением для трех основных соотношений в DGLA: тождества $d^2 = 0$, тождества Лейбница и тождества Якоби.

Пусть теперь T — некоторая триангуляция многообразия M. Мы можем представить $\Omega(M)$ в виде суммы двух подкомплексов:

$$\Omega(M) = \Omega_{\mathrm{IR}}(M,T) \oplus \Omega_{\mathrm{UV}}(M,T). \tag{3}$$

То есть дифференциальные формы на M разбиваются в сумму “инфракрасной” и “ультрафиолетовой” частей. Ультрафиолетовые формы определяются как такие формы, интеграл от которых по любому симплексу T равен нулю. Инфракрасные формы являются специальными кусочно-линейными формами, сконструированными из элементарных форм Уитни на симплексах T. Инфракрасная форма однозначно задается набором значений ее интеграла по всем симплексам T. Таким образом, комплекс $\Omega_{\mathrm{IR}}(M,T)$ изоморфен комплексу клеточных коцепей на T.

Разбиение (3) индуцирует разбиение полей A: $A = A_{\mathrm{IR}} + A_{\mathrm{UV}}$, и двойственное разбиение полей B: $B = B_{\mathrm{IR}} + B_{\mathrm{UV}}$. Инфракрасные поля A_{IR} можно рассматривать как клеточные коцепи на T

со значениями в g, а поля B_{IR} — как клеточные цепи на T со значениями в g, причем и цепям, и коцепям приписана определенная внутренняя четность.

Симплициальная супер-BF модель определяется как эффективная теория на триангуляции T, с полями A_{IR} и B_{IR}, причем по ультрафиолетовым степеням свободы взят интеграл. Именно, действие $S_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{IR}; \hbar)$ симплициальной супер-BF модели определено следующим функциональным интегралом:

$$\exp\left(\frac{1}{\hbar}S_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}}; \hbar)\right) = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathcal{D}A_{\mathrm{UV}}\,\mathcal{D}B_{\mathrm{UV}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}S_M(A_{\mathrm{IR}} + A_{\mathrm{UV}}, B_{\mathrm{IR}} + B_{\mathrm{UV}})\right), \quad (4)$$

где $\mathcal{L}$ — некоторое лагранжево подмногообразие в пространстве ультрафиолетовых полей, выполняющее роль фиксации калибровки в формализме Баталина–Вилковыского.

Интеграл (4) можно вычислять пертурбативно в окрестности точки стационарной фазы $A_{\mathrm{UV}} = B_{\mathrm{UV}} = 0$. При этом для (4) имеем

$$S_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}}; \hbar) = S^0_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}}) + \hbar\, S^1_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}),$$

где

$$S^0_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}}) =< B_{\mathrm{IR}}, \sum_{k=1}^{\infty} l_k(A_{\mathrm{IR}}) >$$

и

$$S^1_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(A_{\mathrm{IR}}).$$

Здесь $< \bullet, \bullet >$ — сужение спаривания $\mathrm{tr} \int\limits_M (\bullet \wedge \bullet)$ для гладких форм; l_k и q_k имеют степень k по A_{IR}. Выражения для l_k и q_k могут быть получены с помощью фейнмановской диаграммной техники как значения древесных и однопетлевых диаграмм для (4) соответственно.

Согласно известной теореме из формализма Баталина–Вилковыского, индуцированное действие $S_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}}; \hbar)$ обязано удовлетворять квантовому мастер-уравнению. В частности, $S^0_{M,T}(A_{\mathrm{IR}}, B_{\mathrm{IR}})$ удовлетворяет классическому мастер-уравнению.

Отсюда можно показать, что $S^0_{M,T}$ является производящей функцией для операций L_∞-алгебры на $g \otimes \Omega_{\mathrm{IR}}(M,T)$ (или, другими словами, на комплексе клеточных коцепей на T со значениями в g). Квадратичные соотношения на L_∞-операции следуют из классического мастер-уравнения

$$\{S^0_{M,T}, S^0_{M,T}\}_{\mathrm{BV}} = 0$$

(где $\{\bullet,\bullet\}_{\mathrm{BV}}$ означает анти-скобку Баталина–Вилковыского). Это построение очень похоже на построение из [2], с той разницей, что в нашем случае L_∞-структура индуцируется не на касательном пространстве ко всему пространству полей, а только на касательном пространстве к полям A_{IR}.

Таким образом, про интеграл (4) можно думать двумя способами: с физической точки зрения, он определяет эффективное действие для супер-BF модели в смысле Вильсона. С алгебраической точки зрения, он определяет L_∞-деформацию дифференциальной градуированной алгебры Ли дифференциальных форм на M со значениями в g. Триангуляция T здесь служит параметром деформации. Однопетлевая часть индуцированного действия $S^1_{M,T}$ задает некоторую дополнительную структуру на этой L_∞-алгебре клеточных коцепей на T со значениями в g: она является производящей функцией для последовательности "квантовых операций" $(g \otimes \Omega_{\mathrm{IR}}(M,T))^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ для $k = 2, 3, \ldots$. Эти квантовые операции удовлетворяют набору квадратичных уравнений, связывающих их с L_∞-операциями ("классическими операциями"). Производящим соотношением для этого набора квадратичных соотношений является неклассическая часть мастер-уравнения

$$\Delta_{\mathrm{BV}} S^0_{M,T} + \{S^0_{M,T}, S^1_{M,T}\}_{\mathrm{BV}} = 0.$$

Возможно, эта алгебраическая структура на $g \otimes \Omega_{\mathrm{IR}}(M,T)$ может быть понята как алгебра над некоторым расширением операды L_∞.

Интеграл (4) может быть вычислен в общем случае, если решить задачу для частного случая, когда M — симплекс размерности D и T — тривиальная триангуляция, состоящая из самого M и его граней всех размерностей. Тогда индуцированное действие $S_{M,T}$ для общих M и T может быть построено из действий на симплексах T. Оказывается, что в случае $D = 1$ задача имеет явное точное решение. Причина в том, что на лагранжевом подмногообразии $\mathcal{L}$ интеграл (4) оказывается в этом случае гауссовым. Случай $D > 1$ намного более труден. Нам удалось вычислить некоторые фейнмановские диаграммы для $D > 1$ (тем самым, мы определили отрезок тэйлоровского разложения $S_{M,T}$ по A_{IR}, или, другими словами, нашли некоторые классические и квантовые операции).

Конструкция действия симплициальной супер-BF модели на триангуляции по действиям на отдельных симплексах может быть использована, чтобы определить супер-BF модель на любом полиэдре, а не только на гладких многообразиях.

С точки зрения теории поля, симплициальная супер-BF модель является “хорошей” решеточной регуляризацией непрерывной топологической теории поля, сохраняющей ее основные свойства.

Когомологические операции на M можно получить из супер-BF модели следующим способом. Нужно ввести какую-нибудь метрику на M. Тогда есть разложение Ходжа дифференциальных форм на гармоническую, d-точную и d^*-точную части. И тогда мы можем использовать интеграл типа (4), чтобы определить эффективное действие супер-BF модели на гармонических формах (теперь пространство гармонических форм играет роль $\Omega_{\mathrm{IR}}(M,T)$, а пространство d- и d^*-точных форм — роль $\Omega_{\mathrm{UV}}(M,T)$). Древесная часть этого эффективного действия является производящей функцией для операций Масси на когомологиях $H^*(M)$, а однопетлевая часть — для “квантовых операций” на когомологиях.

С другой стороны, можно получить когомологические операции из симплициальной супер-BF модели на триангуляции T многообразия M. Для этой цели мы используем симплициальные d- и d^*-операторы, чтобы определить разложение Ходжа для $\Omega_{\mathrm{IR}}(M,T)$, и индуцируем эффективное действие на инфракрасных гармонических формах, снова с помощью интеграла типа (4). Однако, теперь пространство, по которому мы интегрируем, конечномерно. Таким образом, мы получаем определение производящей функции для когомологических операций (Масси и квантовых) в терминах конечномерного интеграла.

Пафос здесь в том, что вычисление действия симплициальной супер-BF модели на одном симлексе каждой размерности (с тривиальной триангуляцией), являясь вычислением конкретного функционального интеграла, в некотором смысле универсально: оно определяет действие симплициальной супер-BF модели $S_{M,T}$ для любых M и T. И таким образом оно сводит задачу вычисления когомологических операций на любом многообразии M к задаче вычисления конечномерного интеграла от экспоненты действия симплициальной супер-BF модели на некоторой триангуляции многообразия M.

Вопрос, совпадают ли когомологические операции, индуцированные из $S_{M,T}$ для различных триангуляций T одного и того же многообразия M, и совпадают ли они с операциями, индуцированными из действия непрерывной теории S_M, является глубоко нетривиальным. Он тесно связан с вопросом о перенормировке в супер-BF модели. В точно решаемом случае $D = 1$ можно показать, что перенормировка отсутствует. Для $D > 1$ предположительно перенормируется однопетлевая часть действия. Наличие перенормировки усложняет вопрос, в каком смысле квантовые когомологические операции дают топологические инварианты M.

Можно также изучать вакуумные ожидания произведений вильсоновских петель в супер-BF модели, дающие некоторые инварианты зацеплений на многообразии M. Симплициальная версия супер-BF модели должна давать выражения для этих инвариантов в терминах конечномерных интегралов, зависящих от триангуляции T на M.

Наиболее важные технические результаты, имеющиеся на настоящий момент, включают решение одномерного случая, пертурбативные ответы для действия симплициальной супер-BF модели в старших размерностях и некоторые (пертурбативные) ответы для перенормировки симплициальной супер-BF модели при барицентрическом подразбиении триангуляции.

Литература

1. M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
2. M. Aleksandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz and O. Zaboronsky, *The geometry of the master equation and topological quantum field theory*; `arXiv: hep-th/9502010`.

Mnev P. N. On the simplicial super-BF model.

This note is a brief introduction to the results on the simplicial super-BF model obtained by the author in the framework of the program pro-

posed by A. Losev. These results and more comprehensive explanations will be published elsewhere. We regard them as a step toward solving the problem of constructing combinatorial Chern–Simons theory, proposed by M. Atiyah. We also advertise the algebraic view on the simplicial super-BF model as a deformation of the de Rham algebra on a manifold in the (yet to be defined) category of “quantum L_∞-algebras.”

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pmnev@pdmi.ras.ru

Поступило 27 июня 2006 г.