Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

Г. Л. Литвинов, Г. Б. Шпиз

ТЕОРЕМЫ О ЯДРЕ И ЯДЕРНОСТЬ В ИДЕМПОТЕНТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Светлой памяти Ф. А. Березина посвящается

Введение

Идемпотентная математика основана на замене числовых полей идемпотентными полуполями и полукольцами. Другими словами, обычные арифметические операции заменяются новым набором основных ассоциативных операций (новое сложение $\oplus$ и новое умножение $\odot$), причем выполнены все аксиомы полуполя или полукольца и новое сложение идемпотентно, т.е. $x \oplus x = x$ для любого элемента x из полукольца, см., например, [1–10]. Типичным примером является полуполе $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\}$, известное как алгебра Max-Plus. Это полуполе состоит из всех вещественных чисел и присоединенного элемента $\mathbf{0} = -\infty$, который является нулем в $\mathbb{R}_{\max}$, а операции определены формулами $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и $x \odot y = x + y$. Единичный элемент $\mathbf{1}$ совпадает с обычным нулем. Аналогично определяется полуполе $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$, состоящее из всех вещественных чисел и символа $\mathbf{0} = +\infty$ и наделенное операциями $\oplus = \min$ и $\odot = +$. Разумеется, полуполя $\mathbb{R}_{\max}$ и $\mathbb{R}_{\min}$ изоморфны. Многочисленные нетривиальные примеры идемпотентных полуколец и полуполей можно найти, например, в [3–10].

Линейная алгебра над идемпотентными полукольцами построена в работах многих авторов, начиная с С. К. Клини (S. C. Kleene), Н. Н. Воробьева, Б. А. Карре (B. A. Carré), Р. А. Канингхем-Грина (R. A. Cuningham-Green) и др. Основы идемпотентного анализа и функционального анализа построены в работах В. П. Маслова и его сотрудников, см., например, [1–14]; в частности, важные результаты и приложения идемпотентного

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00824.

анализа получены В. Н. Колокольцовым (см., например, [3–6, 9, 13–15]). Существенное развитие этих идей принадлежит французским математикам М. Акиан (M. Akian), Г. Коэну (G. Cohen), С. Гоберу (S. Gaubert), Ж.-П. Квадра (J.-P. Quadrat) и др., см., например, [9, 15, 16] и обзор [10]. Замечательная работа О. Виро [17] положила начало идемпотентной геометрии, которую сейчас принято называть тропической геометрией. Этот предмет очень популярен, и значительный вклад в его развитие внесли многие авторы (М. Концевич, Г. Михалкин, М. Капранов, И. Итенберг, В. Харламов, Б. Штурмфельс (B. Sturmfels), Е. Шустин и др.). В дальнейшем появились и другие разделы идемпотентной математики, например, идемпотентный интервальный анализ [18, 19]. По поводу дальнейшего развития предмета и его истории см., например, обзор [10].

Математика над идемпотентными полукольцами может рассматриваться как результат деквантования традиционной математики над полями и ее своеобразная "тень". Эта "тень" соотносится с традиционной математикой так же, как классическая физика соотносится с квантовой теорией (подробности см. в [7, 8, 10]). Имеется эвристическое соответствие (в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой теории) между важными, полезными и интересными конструкциями и результатами традиционной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами [7]. При этом "идемпотентный" результат часто является более простым, чем его традиционный прообраз.

Цель статьи состоит в описании идемпотентных аналогов классических теорем о ядре, принадлежащих Л. Шварцу [20] и А. Гротендику (см., например, [21, 22]). Иначе говоря, описываются условия, при которых в идемпотентном анализе линейные операторы допускают интегральные представления (в терминах идемпотентного интеграла В. П. Маслова). Кроме того, определяется понятие ядерного идемпотентного полумодуля, аналогичное понятию ядерного пространства в традиционном анализе (см., например, [21, 22]), и дается довольно явное описание всех полумодулей функций, для которых справедлива теорема о ядре. Используется алгебраический подход к идемпотентному анализу, при котором топологические понятия и результаты моделируются на алгебраическом уровне (в последующих работах будет использован и топологический подход). Статья примыкает к циклу работ по идемпотентному функциональному анализу [8, 11, 12], используются терминология и обозначения, введенные в этих работах. Некоторые из приведенных ниже результатов об идемпотентных полумодулях функций зависят от способа вложения полумодуля в пространство функций; при этом иногда приходится рассматривать нелинейные (в смысле идемпотентной математики) отображения и функционалы. Другие результаты инвариантны относительно подобных вложений и могут быть переписаны в инвариантной форме.

Для некоторых конкретных идемпотентных полумодулей, состоящих из непрерывных или ограниченных функций, теоремы о ядре получены в работах [1–5, 13, 23–25]. Предельным случаем теоремы о ядре является результат об интегральном представлении линейных функционалов; результаты такого рода приведены в [1–6, 8, 12, 13, 23–30]. Обобщение этих результатов и их унификация будут рассмотрены в отдельной статье. В работе [31] сформулирована задача об описании различных подполумодулей в идемпотентном полумодуле ограниченных функций со значениями в $\mathbb{R}_{\min}$, для которых справедлива теорема о ядре, и соответствующих интегральных представлений линейных операторов. В настоящей работе будет рассмотрен весьма общий случай полумодулей над ограниченно полными идемпотентными полукольцами. Некоторые из полученных результатов можно рассматривать как различные версии ответа на вопрос, поставленный в [31]. Основные результаты статьи анонсированы в [32].

1. Идемпотентные полумодули

1.1. Обозначения и основная терминология. В настоящей работе используются терминология и обозначения из работ [8, 11, 12]. Напомним, что *идемпотентной полугруппой* называется аддитивная полугруппа с коммутативным сложением $\oplus$, в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x \oplus x = x$. Любая идемпотентная полугруппа будет рассматриваться как упорядоченное множество относительно стандартного (частичного) порядка: $x \preccurlyeq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Легко видеть, что это определение корректно и $x \oplus y = \sup\{x, y\}$, т.е. любая идемпотентная полугруппа является верхней полурешеткой[1] (см., например, [33]). Для произвольного подмножества X идемпотентной полугруппы положим $\oplus X = \sup X$ и $\wedge X = \inf X$, при условии что соответствующие правые части существуют; в частности, предполагается, что множество X ограничено сверху или снизу соответственно. Идемпотентная полугруппа называется *b-полной* (или *ограниченно полной*), если любое ее ограниченное сверху подмножество (в том числе и пустое) имеет точную верхнюю грань. В частности, любая b-полная идемпотентная полугруппа содержит нуль (обозначаемый $\mathbf{0}$), совпадающий с $\oplus\varnothing$, где $\varnothing$ – пустое множество. Таким образом, любое непустое подмножество в такой полугруппе ограничено снизу нулем $\mathbf{0}$. Гомоморфизм b-полных идемпотентных полугрупп называется *b-гомоморфизмом*, если $g(\oplus X) = \oplus g(X)$ для любого ограниченного сверху подмножества X. *Идемпотентным полукольцом* называется идемпотентная полугруппа, снабженная таким ассоциативным умножением $\odot$ с единицей (обозначаемой $\mathbf{1}$), что выполнены оба соотношения дистрибутивности. Идемпотентное полукольцо называется *b-полным*, если оно является b-полной идемпотентной полугруппой и выполнены "бесконечные" дистрибутивные законы: $k \odot \oplus X = \oplus(k \odot X)$ и $(\oplus X) \odot k = \oplus(X \odot k)$ при любом $k \in K$ и любом ограниченном подмножестве X в K.

Коммутативное идемпотентное полукольцо называется *идемпотентным полуполем*, если любой его ненулевой элемент обратим. Полуполе является b-полным идемпотентным полукольцом тогда и только тогда, когда оно является b-полной идемпотентной полугруппой [8]. Примером b-полного полуполя являтся алгебра $\mathbb{R}_{\max}$ (или $\mathbb{R}_{\min}$), описанная во введении. Другим примером является полуполе $\mathbb{Z}_{\max}$, состоящее из целочисленных элементов полуполя $\mathbb{R}_{\max}$ и элемента $\mathbf{0} = -\infty$, с операциями, индуцированными из $\mathbb{R}_{\max}$.

Если к полуполю $\mathbb{R}_{\max}$ добавить элемент $+\infty$ и доопределить операции $\oplus$ и $\odot$ очевидным образом, мы получим новое идемпотентное полукольцо (но не полуполе) $\widehat{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R}_{\max} \cup \{+\infty\}$; аналогично определяется полукольцо $\widehat{\mathbb{Z}}_{\max} = \mathbb{Z}_{\max} \cup \{+\infty\}$. Эти полукольца являются не только b-полными, но и полными как частично упорядоченные множества (относительно стандартного поряд-

[1] Напомним, что частично упорядоченное множество V называется *верхней полурешеткой*, если для любых элементов x, y из V существует их точная верхняя грань $\sup\{x, y\}$ в V.

ка $\preccurlyeq$), а переход от $\mathbb{R}_{\max}$ и $\mathbb{Z}_{\max}$ к $\widehat{\mathbb{R}}_{\max}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_{\max}$ является нормальным пополнением в смысле [33]. Квадратные матрицы размера $n \times n$ с элементами из b-полного идемпотентного полукольца K образуют b-полное некоммутативное полукольцо $\mathrm{Mat}_n(K)$ относительно операций сложения и умножения матриц, порожденных операциями в K.

В дальнейшем, если противное не оговорено явно, будем все полугруппы, полукольца, полуполя и полумодули считать идемпотентными.

Идемпотентным полумодулем над идемпотентным полукольцом K называется идемпотентная полугруппа V, в которой определено такое (левое) умножение $\odot$ на элементы из K, что для любых $a, b \in K$, $x, y \in V$ выполнены обычные соотношения $a\odot(b\odot x) = (a\odot b)\odot x$, $(a\oplus b)\odot x = a\odot x\oplus b\odot x$, $a\odot(x\oplus y) = a\odot x\oplus a\odot y$, $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$. Полумодуль V над b-полным полукольцом K называется *b-полным*, если он является b-полной полугруппой и выполнены бесконечные дистрибутивные законы: $k \odot \oplus X = \oplus(k \odot X)$ при любом $k \in K$ и любом ограниченном подмножестве $X \subset V$, и $(\oplus Q) \odot v = \oplus(Q \odot v)$ при любом ограниченном подмножестве $Q \subset K$ и любом элементе $v \in V$ (см. [8], определение 4.3).

Гомоморфизм b-полных полумодулей $g : V \to W$ называется *b-гомоморфизмом* или *b-линейным отображением* (*оператором*), если $g(\oplus X) = \oplus g(X)$ для любого ограниченного подмножества $X \subset V$ (более общее определение для случая неполных полумодулей см. в [8]); при этом, разумеется, $g(a \odot x) = a \odot g(x)$ для всех $a \in K$, $x \in V$. Гомоморфизмы со значениями в основном полукольце K, рассматриваемом как полумодуль над самим собой, называются *линейными функционалами*.

В идемпотентной математике b-линейные операторы и функционалы можно рассматривать как аналоги традиционных (полу)непрерывных линейных операторов и функционалов в классическом анализе, см. [8].

Пусть V и W являются b-полными полумодулями над b-полным полукольцом K. Обозначим через $L_b(V, W)$ множество всех b-линейных отображений из V в W. Нетрудно проверить, что $L_b(V, W)$ является идемпотентной полугруппой относительно поточечного сложения операторов; композиция (произведение) b-линейных операторов также является b-линейным оператором, и множество $L_b(V, V)$ является идемпотентным полукольцом относительно указанных операций, см., например, [8]. Следующее утверждение можно трактовать как версию теоремы Банаха–Штейнгауза в идемпотентном анализе.

Предложение 1. *Пусть S – подмножество в $L_b(V, W)$ и для любого элемента $v \in V$ множество $\{g(v) \mid g \in S\}$ ограничено в W; таким образом, элемент $f(v) = \bigoplus_{g \in S} g(v)$ существует в силу b-полноты полумодуля W. Тогда отображение $v \mapsto f(v)$ является b-линейным оператором, т.е. содержится в $L_b(V, W)$, а подмножество S ограничено оператором f.*

Доказательство. Легко проверить, что f является гомоморфизмом $V \to W$. Для любого ограниченного подмножества V в W справедливы равенства $f(\oplus X) = \bigoplus\limits_{g \in S} g(\oplus X) = \bigoplus\limits_{g \in S} \bigoplus\limits_{v \in X} g(v) = \bigoplus\limits_{v \in X} \bigoplus\limits_{g \in S} g(v) = \bigoplus\limits_{v \in X} f(v) = \oplus f(X)$, так что f является b-линейным оператором, что и требовалось. По построению f является точной верхней гранью подмножества S в $L_b(V, W)$. $\square$

Следствие 1. *Множество $L_b(V, W)$ является b-полной идемпотентной полугруппой относительно (идемпотентного) поточечного сложения операторов. Если $V = W$, то $L_b(V, V)$ является b-полным идемпотентным полукольцом относительно операций поточечного сложения и композиции операторов.*

Следствие 2. *Подмножество S ограничено в $L_b(V, W)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $v \in V$ множество $\{g(v) \mid g \in S\}$ ограничено в полумодуле W.*

Указанные следствия легко выводятся из предложения 1 и основных определений.

Подмножество идемпотентного полумодуля называется *подполумодулем*, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на коэффициенты. Подполумодуль b-полного полумодуля называется *b-замкнутым*, если он замкнут относительно суммирования любых ограниченных во всем полумодуле подмножеств, и *b-подполумодулем*, если вложение являяется b-гомоморфизмом. Легко видеть, что любой b-замкнутый подполумодуль является b-подполумодулем. Главное свойство b-подполумодулей состоит в том, что ограничения на них b-линейных операторов и функционалов являются b-линейными.

Подмножество идемпотентного b-полного полумодуля называется *квазиподполумодулем*, если оно замкнуто относительно умножения на коэффициенты и является верхней полурешеткой относительно унаследованного порядка. Квазиподполумодуль всегда будет рассматриваться как полумодуль относительно унаследованного умножения на коэффициенты из K и сложения, определенного формулой $x \oplus y = \sup\{x, y\}$, причем sup берется внутри квазиподполумодуля. Квазиподполумодуль идемпотентного b-полного полумодуля называется $\wedge$-*подполумодулем*, если он содержит $\mathbf{0}$ и замкнут относительно взятия точных нижних граней непустых подмножеств в объемлющем полумодуле. Легко проверить (например, используя лемму 2.1 из [8]), что *любой* $\wedge$-*подполумодуль является* b-*полным полумодулем*.

Отметим, что квазиподполумодуль и даже $\wedge$-подполумодуль могут не быть подполумодулями, поскольку наследуется порядок, но не сложение (см. пример 6 ниже).

Следуя работе [8], идемпотентные полумодули над полуполями будем называть *идемпотентными пространствами*. В идемпотентной математике такие пространства являются аналогами традиционных линейных (векторных) пространств над полями. Соответственно возникают (очевидным образом) понятия b-*пространства*, b-*подпространства*, b-*замкнутого подпространства*, $\wedge$-*подпространства* и т.п.

Многочисленные примеры идемпотентных полумодулей и пространств можно найти в [8]; см. также [3–9, 11, 14–16, 25]. Некоторые примеры указаны ниже, в том числе в разделе 3.

1.2. Функциональные полумодули. Пусть X – произвольное непустое множество и K – идемпотентное полукольцо. Через $K(X)$ обозначается полумодуль всех отображений (функций) из X в K, снабженный поточечными операциями. Через $K_b(X)$ обозначается подполумодуль в $K(X)$, состоящий из всех ограниченных отображений. Если K является b-полным полукольцом, то $K(X)$ и $K_b(X)$ являются b-полными полумодулями, причем $K_b(X)$ является b-подполумодулем, но не b-замкнутым подполумодулем в $K(X)$. Для $x \in X$ будем обозначать через δ_x функционал на $K(X)$, переводящий f в $f(x)$. Легко проверить, что функционал δ_x является b-линейным (на $K(X)$).

Квазиподполумодуль в $K(X)$ будем называть (идемпотентным) *функциональным полумодулем* на множестве X. Идемпотентный функциональный полумодуль в $K(X)$ называется *b-полным*, если он является b-полным полумодулем.

Функциональный полумодуль $V \subset K(X)$ называется *функциональным b-полумодулем*, если он является b-подполумодулем в $K(X)$, и *функциональным $\wedge$-полумодулем*, если он является $\wedge$-подполумодулем в $K(X)$.

В общем случае функционал вида δ_x не является линейным (тем более b-линейным) на функциональном полумодуле. Однако имеет место следующее утверждение, непосредственно следующее из определений.

Предложение 2. *Произвольный b-полный функциональный полумодуль W на множестве X является функциональным b-полумодулем тогда и только тогда, когда любой функционал вида δ_x, $x \in X$, является b-линейным на W.*

Доказательство. Оба утверждения означают, что для любого ограниченного в W множества функций $S \subset W$ выполнено соотношение $(\oplus S)(x) = (\oplus S(x))$ при $x \in X$. $\square$

Пример 1. Полумодуль $K_b(X)$, состоящий из ограниченных отображений произвольного множества X в b-полное идемпотентное полукольцо K, является функциональным $\wedge$-полумодулем и, следовательно, b-полным полумодулем над K; $K_b(X)$ является и b-подполумодулем в полумодуле $K(X)$ всех отображений $X \to K$.

Пример 2. Если множество X конечно и содержит n элементов, то $K_b(X) = K(X)$ является "n-мерным" полумодулем над K и обозначается через K^n. В частности, $\mathbb{R}^n_{\max}$ является идемпотентным пространством над полуполем $\mathbb{R}_{\max}$, а $\widehat{\mathbb{R}}^n_{\max}$ является полумодулем над полукольцом $\widehat{\mathbb{R}}_{\max}$ и пространством над полуполем $\mathbb{R}_{\max}$. Например, полукольцо $\widehat{\mathbb{R}}_{\max}$ можно рассматривать как пространство (полумодуль) над $\mathbb{R}_{\max}$.

Пример 3. Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через $USC(X)$ множество всех полунепрерывных сверху функций со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$. По определению, функция $f(x)$ полунепрерывна сверху, если для любого элемета $s \in \mathbb{R}_{\max}$ множество $X_s = \{x \in X \mid f(x) \geq s\}$ замкнуто в X (см., например, [8], раздел 2.8). Если семейство $\{f_\alpha\}$ состоит из полунепрерывных сверху (например, непрерывных) функций и $f(x) = \inf_\alpha f_\alpha(x)$, то $f(x) \in$

$USC(X)$. Отсюда легко вывести, что $USC(X)$ имеет естественную структуру идемпотентного пространства над $\mathbb{R}_{\max}$ и является функциональным b-пространством и $\wedge$-подпространством на X. Этими же свойствами обладает подпространство в $USC(X)$, состоящее из ограниченных (сверху) функций.

Пример 4. Пусть X – частично упорядоченное множество, K – полуполе $\mathbb{R}_{\max}$ или $\mathbb{Z}_{\max}$. Обозначим через $N(X)$ множество всех невозрастающих функций, определенных на X, со значениями в K. Легко проверить, что $N(X)$ имеет естественную структуру пространства над K и является функциональным b-пространством и $\wedge$-подпространством на X. Этими же свойствами обладает и пространство $N(X) \cap K_b(X)$.

Пример 5. Пусть $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел с выделенной осью $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Обозначим через $N_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ множество функций $\mathbb{C} \to K$, невозрастающих вдоль вещественной оси $\mathbb{R}$, где K – полуполе $\mathbb{R}_{\max}$ или $\mathbb{Z}_{\max}$. Легко проверить, что $N_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ (равно как и $N_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \cap K_b(\mathbb{C})$) имеет естественную структуру пространства над K и является функциональным b-пространством и $\wedge$-подпространством на X.

Пример 6. Заметим, что идемпотентный функциональный полумодуль и даже функциональный $\wedge$-полумодуль на множестве X не обязан быть подполумодулем в $K(X)$. Простейшим примером является функциональное пространство (над $K = \mathbb{R}_{\max}$) $\mathrm{Conc}(\mathbb{R})$ всех вогнутых функций на прямой $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$. Этот полумодуль состоит из функций, имеющих выпуклый подграфик, то есть удовлетворяющих условию $f(ax+(1-a)y) \geqslant af(x)+(1-a)f(y)$ при $0 \geqslant a \geqslant 1$ (операции с $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_{\max}$ определяются очевидным образом). Если $f, g \in \mathrm{Conc}(\mathbb{R})$, то сумма $f \oplus g$ в $\mathrm{Conc}(\mathbb{R})$ имеет в качестве подграфика выпуклую оболочку подграфиков функций f и g и не совпадает с поточечным максимумом этих функций.

2. Интегральные представления линейных операторов

2.1. Интегральные представления линейных операторов в функциональных полумодулях. Пусть W – идемпотентный b-полный полумодуль над b-полным полукольцом K и $V \subset K(X)$ является b-полным функциональным полумодулем. Отображение $A : V \to W$ называется *интегральным* оператором или оператором, допускающим *интегральное представление*, если существует такое отображение $k : X \to W$, называемое *интегральным ядром* (или просто *ядром*) *оператора* A, что

$$Af = \bigoplus_{x \in X} f(x) \odot k(x). \tag{1}$$

Правая часть формулы (1) в идемпотентном анализе часто изображается в форме $\int_X^{\oplus} f(x) \odot k(x)dx$ (см. [1–7]). Относительно ядра k предполагается, что множество $\{f(x) \odot k(x) | x \in X\}$ ограничено в W при всех $f \in V$, $x \in X$. Множество всех таких функций будем обозначать $kern_{V,W}(X)$. В частности, если $W = K$ и A является функционалом, то этот функционал называется *интегральным*. Таким образом, интегральный функционал задается “скалярным произведением” $f \mapsto \int_X^{\oplus} f(x) \odot k(x)\, dx$, где $k(x) \in K(X)$; в идемпотентном анализе такая ситуация является стандартной, см., например, [1–10].

Назовем функциональный полумодуль $V \subset K(X)$ *невырожденным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая функция $g \in V$, что $g(x) = \mathbf{1}$, и *допустимым*, если для любой функции $f \in V$ и произвольной точки $x \in X$, таких, что $f(x) \neq \mathbf{0}$, существует такая функция $g \in V$, что $g(x) = \mathbf{1}$ и $f(x) \odot g \preccurlyeq f$.

Заметим, что над полуполем любой функциональный полумодуль является допустимым (в качестве функции g в этом случае можно взять функцию $f(x)^{-1} \odot f$).

Предложение 3. *Обозначим через X_V подмножество в X, заданное формулой $X_V = \{x \in X | \exists f \in V : f(x) = \mathbf{1}\}$. Если полумодуль V допустим, то ограничение на X_V определяет вложение $i : V \to K(X_V)$ и его образ $i(V)$ допустим и невырожден.*

Если отображение $k : X \to W$ является ядром отображения $A : V \to W$, то отображение $k_V : X \to W$, совпадающее с k на X_V и равное $\mathbf{0}$ на $X - X_V$, также является ядром отображения A.

Отображение $A : V \to W$ является интегральным тогда и только тогда, когда интегрально отображение $i_{-1}A : i(A) \to W$.

Доказательство. Из допустимости V немедленно вытекает, что все функции из V тождественно равны $\mathbf{0}$ на $X - X_V$, откуда немедленно вытекают все требуемые утверждения. □

В дальнейшем все полумодули будут рассматриваться над одним и тем же b-полным идемпотентным полукольцом K. Интегральное представление оператора, если оно существует, не обязано быть единственным. Однако, если полумодуль V невырожден, то множество всех ядер фиксированного интегрального оператора ограничено (в множестве всех ядер, снабженных естественным порядком) и замкнуто относительно взятия точных верхних граней (sup) произвольных подмножеств. В частности, у любого интегрального оператора на невырожденном полумодуле существует единственное максимальное ядро.

Важно отметить, что интегральный оператор не обязан быть b-линейным (и даже просто линейным) за исключением случая, когда V является функциональным b-полумодулем (см. ниже, предложение 4).

Если W является функциональным полумодулем на некотором непустом множестве Y, то интегральное ядро k оператора A естественно отождествляется с функцией на $X \times Y$, заданной формулой $k(x, y) = (k(x))(y)$; эту функцию $k(x, y)$ мы также будем называть *интегральным ядром оператора* A. В результате $kern_{V,W}(X)$ отождествляется с множеством $kern_{V,W}(X, Y)$ всех таких отображений $k : X \times Y \to K$, что для любого $x \in X$ отображение $k_x : y \mapsto k(x, y)$ лежит в W и для любого $v \in V$ множество $\{v(x) \odot k_x | x \in X\}$ ограничено в W. Соответственно, множество всех ядер b-линейных операторов вкладывается в $kern_{V,W}(X, Y)$.

Если V и W являются функциональными b-полумодулями на множествах X и Y, то множество всех ядер b-линейных операторов отождествляется с $kern_{V,W}(X, Y)$ (см. предложение 4 ниже) и имеет место формула, совпадающая с обычным определением интегрального представления оператора

$$Af(y) = \bigoplus_{x \in X} f(x) \odot k(x, y) = \int_X^{\oplus} f(x) \odot k(x, y) dx. \qquad (2)$$

Заметим, что формула (1) может быть переписана в виде

$$Af = \bigoplus_{x \in X} \delta_x(f) \odot k(x). \qquad (3)$$

Предложение 4. *Произвольный b-полный функциональный полумодуль V на непустом множестве X является функциональным b-полумодулем на X (т.е. b-подполумодулем в $K(X)$) тогда и только тогда, когда любой интегральный оператор, определенный на V, является b-линейным.*

Доказательство. Пусть W – произвольный b-полный полумодуль. Если V является функциональным b-полумодулем на X, то в силу предложения 2 каждый оператор $\Delta_{x,w} : V \to W$ вида $f \mapsto \delta_x(f) \odot w$, $x \in X$, $w \in W$, является b-линейным. Поэтому любой интегральный оператор, который по определению является суммой таких операторов, b-линеен в силу предложения 1 и его следствий. С другой стороны, если любой интегральный оператор на V является b-линейным, то b-линейны все функционалы вида δ_x, которые являются интегральными операторами из V в K. Отсюда в силу предложения 2 вытекает, что V является функциональным b-полумодулем на X. Предложение доказано.□

Следующее понятие (определение) является особенно важным для наших целей. Пусть $V \subset K(X)$ является b-полным функциональным полумодулем над b-полным идемпотентным полукольцом K. Будем говорить, что для полумодуля V справедлива *теорема о ядре*, если любое b-линейное отображение этого полумодуля в произвольный b-полный полумодуль над K допускает интегральное представление.

Теорема 1. *Пусть заданы b-полный полумодуль W над b-полным полукольцом K и допустимый функциональный $\wedge$-полумодуль $V \subset K(X)$. Тогда любой b-линейный оператор $A : V \to W$ допускает интегральное представление* (1). *В частности, если W является функциональным b-полумодулем на множестве Y, то оператор A допускает интегральное представление* (2). *Таким образом, для полумодуля V справедлива теорема о ядре.*

Доказательство. Пусть f и x – произвольные элементы из V и X соответственно. Если множество $\{f \in V | f(x) = \mathbf{1}\}$ непусто, то положим $d_x = \wedge\{f \in V | f(x) = \mathbf{1}\}$. В противном случае положим $d_x(x) = \mathbf{1}$ и $d_x(y) = \mathbf{0}$ при любом $y \in X$, $y \neq x$. По построению $f(x) \odot d_x \preccurlyeq f$. Так как полумодуль V допустим и является $\wedge$-полумодулем, то $d_x(x) = \mathbf{1}$. Отсюда непосредственно вытекает, что $f = \bigoplus\limits_{x \in X} f(x) \odot d_x$, то есть функция $x \mapsto d_x$ является ядром тождественного оператора $id : V \to V$. Но тогда $A(f) = \bigoplus\limits_{x \in X} f(x) \odot A(d_x)$, то есть отображение, заданное формулой $k(x) = A(d_x)$ при любых $x \in X$, является ядром оператора A, что и требовалось. □

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 полумодуль V невырожден, то функция $x \mapsto d_x$ является, очевидно, максимальным интегральным ядром тождественного оператора $id : V \to V$.

В самом деле, если в условиях теоремы 1 полумодуль V невырожден, то все функции вида $x \mapsto d_x$ лежат в V. Поэтому если $k : X \to V$ – интегральное ядро тождественного оператора $id : V \to V$, то $d_y = \bigoplus_{x \in X} d_y(x) \odot k(x) \succcurlyeq d_y(y) \odot k(y)$ при любом $y \in X$. Учитывая, что $d_y(y) = \mathbf{1}$, получаем $d_y \succcurlyeq k(y)$ при любом $y \in X$, что и требовалось.

Замечание 2. Примеры допустимых функциональных $\wedge$-полумодулей (и $\wedge$-пространств), о которых говорится в условии теоремы 1, описаны выше, в конце раздела 1. Таким образом, для этих функциональных полумодулей и пространств V над K справедлива теорема о ядре, и любой b-линейный оператор, отображающий V в произвольный b-полный полумодуль W над K, допускает интегральное представление (2). Напомним, что любое функциональное пространство над b-полным полуполем допустимо, см. выше.

2.2. Интегральное представление b-ядерных операторов. Введем важные определения. Отображение b-полных полумодулей $g : V \to W$ называется *одномерным* (или *отображением ранга* 1), если оно имеет вид $v \mapsto \phi(v) \odot w$, где ϕ является b-линейным функционалом на V, а $w \in W$. Отображение g называется *b-ядерным*, если оно является суммой ограниченного множества одномерных отображений. Поскольку одномерное отображение b-линейно (что следует из b-линейности функционала ϕ), *любой b-ядерный оператор b-линеен* (см. следствие 1 выше). Разумеется, b-ядерные отображения тесно связаны с тензорными произведениями идемпотентных полумодулей, см. [11].

Используя предложение 1 и его следствия, легко проверить, что справедливо следующее предложение.

Предложение 5. *Результат композиции (произведения) b-ядерного и b-линейного отображений или b-линейного и b-ядерного отображений является b-ядерным оператором.*

Доказательство. Из определений очевидно, что результат композиции одномерного и b-линейного отображений или b-линейного и одномерного отображений является одномерным отображением. Остается использовать то, что композиция с b-линейный оператором переводит сумму в сумму. $\square$

Теорема 2. *Пусть W является b-полным полумодулем над b-полным полукольцом K. Если в функциональном b-полумодуле $V \subset K(X)$ любой b-линейный функционал является интегральным, то b-линейный оператор $A : V \to W$ допускает интегральное представление в том и только в том случае, когда он является b-ядерным.*

Доказательство. Заметим, что, поскольку V является функциональным b-полумодулем, b-линейны все функционалы вида δ_x при $x \in X$ (см. предложение 2). Поскольку b-линейный функционал является интегральным, всякий b-ядерный оператор представляется в виде суммы одномерных операторов вида $k_w(x)\delta_x \odot w$, где $k_w \in K(X)$, $w \in W$. Поэтому любой b-ядерный оператор имеет вид $\bigoplus\limits_{x\in X, w\in W} k_w(x)\delta_x \odot w$, где $k_w \in K(X)$, то есть допускает интегральное представление с ядром $k(x) = \bigoplus\limits_{w} k_w(x) \odot w$.

С другой стороны, интегральный оператор с ядром $k : X \to W$ имеет вид $\bigoplus\limits_{x\in X} A_x$, где одномерный оператор A_x задается формулой $A_x = \delta_x \odot k(x)$, и таким образом является b-ядерным. $\square$

2.3. Свойство b-аппроксимации и b-ядерные полумодули. Будем говорить, что b-полный полумодуль V обладает *свойством b-аппроксимации*, если тождественный оператор $id : V \to V$ является b-ядерным (о свойстве аппроксимации для локально выпуклых пространств в традиционном анализе см. [21, 22]).

Пусть V – произвольный b-полный полумодуль над b-полным идемпотентным полукольцом K. Назовем этот полумодуль *b-ядерным полумодулем*, если произвольное b-линейное отображение $V \to W$ этого полумодуля в любой b-полный полумодуль W над K является ядерным оператором. Напомним, что в традиционном анализе локально выпуклое пространство является ядерным тогда и только тогда, когда любое линейное непрерывное отображение этого пространства в произвольное банахово пространство является ядерным оператором, см. [21, 22].

Используя предложения 1 и 5, следствие 1 и то соображение, что любое отображение не изменится при умножении на тождественный оператор (справа или слева), из основных определений легко вывести следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть V является произвольным b-полным полумодулем над b-полным полукольцом K. Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *полумодуль V обладает свойством b-аппроксимации;*
(2) *любое b-линейное отображение из V в произвольный b-полный полумодуль W над K является b-ядерным;*
(3) *любое b-линейное отображение из произвольного b-полного полумодуля W над K в полумодуль V является b-ядерным.*

Доказательство. Если тождественный оператор $id : V \to V$ является b-ядерным и $f : V \to W$ является произвольным b-линейным отображением, то в силу равенства $f = f \circ id$ и предложения 5 получаем, что оператор f является b-ядерным. С другой стороны, если любое b-линейное отображение из V в произвольный b-полный полумодуль W над K является b-ядерным, то это относится и к тождественному отображению $id : V \to V$. Поэтому утверждения (1) и (2) эквивалентны.

Эквивалентность утверждений (1) и (3) доказывается аналогично. □

Следствие 3. *Произвольный b-полный полумодуль над b-полным полукольцом K является b-ядерным тогда и только тогда, когда этот полумодуль обладает свойством b-аппроксимации.*

Напомним, что в традиционном анализе любое ядерное пространство обладает свойством аппроксимации, но обратное утверждение неверно.

Некоторые конкретные примеры b-ядерных пространств и полумодулей описаны в примерах 1, 2, 4 и 5 (см. выше, в конце раздела 1). Важные ядерные пространства и полумодули описаны ниже, в разделе 3 (например, липшицевы пространства и полулипшицевы полумодули над коммутативными полукольцами). Нетрудно показать, что идемпотентные пространства $USC(X)$ и $Conc(\mathbb{R})$ (см. примеры 3 и 6) не являются ядерными (хотя для них и справедлива теорема о ядре). Суть дела состоит в том, что они не являются функциональными b-пространствами и соответсвующие δ-функционалы не являются b-линейными (и даже линейными).

2.4. Теоремы о ядре для функциональных b-полумодулей. Пусть $V \subset K(X)$ является b-полным функциональным полумодулем над b-полным полукольцом K. Напомним, что для полумодуля V справедлива *теорема о ядре*, если любое b-линейное отображение этого полумодуля в произвольный b-полный полумодуль над K допускает интегральное представление.

Теорема 3. *Пусть заданы b-полное полукольцо K и непустое множество X. Теорема о ядре справедлива для функционального b-полумодуля $V \subset K(X)$ тогда и только тогда, когда любой b-линейный функционал на V допускает интегральное представление и полумодуль V является b-ядерным, т.е. обладает свойством b-аппроксимации.*

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 2 и предложения 6. □

Следствие 4. *Если для функционального b-полумодуля справедлива теорема о ядре, то этот полумодуль является ядерным.*

Отметим, что возможность интегрального представления функционала означает просто возможность разложить его в сумму функционалов вида δ_x. Следующий пример показывает, что интегральное представление b-линейного функционала не всегда возможно и, более того, зависит от способа вложения полумодуля в пространство функций. В то же время наличие свойства b-аппроксимации инвариантно относительно изоморфизма полумодулей.

Пример 7. Пусть $K = \mathbb{R}_{\max}$, $X = \mathbb{R}$ и функция $f \in K(X)$ определена формулой $f(x) = -x$ при $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через V подполумодуль в $K(X)$, состоящий из всех функций вида $a \odot f \oplus b$ при $a, b \in K$. Легко видеть, что V является b-подполумодулем в $K(X)$ и отображение $(a, b) \mapsto a \odot f \oplus b$ является изоморфизмом b-пространства $\mathbb{R}_{\max} \times \mathbb{R}_{\max}$ на V. Из этого вытекает, что отображение ϕ, переводящее $a \odot f \oplus b$ в b, является b-линейным функционалом. Покажем, что ϕ не имеет интегрального представления.

В самом деле, пусть $k : X \to K$ – ядро функционала ϕ. Для произвольного $v = a \odot f \oplus \mathbf{1} \in V$ и элемента $x \in X$ имеем $0 = \mathbf{1} = \phi(v) = \bigoplus v(x) \odot k(x) \succcurlyeq v(x) \odot k(x) = \max(a - x, 0) + k(x)$, то есть $0 \succcurlyeq \max(a - x, 0) + k(x)$, откуда $k(x) \preccurlyeq -\max(a - x, 0)$. Поскольку число a можно выбрать сколь угодно большим, получаем, что

$k(x) = \mathbf{0}$ для всех $x \in X$, то есть $k = \mathbf{0}$. Но это невозможно (у ненулевого функционала не может быть нулевого ядра). Таким образом, ϕ не имеет интегрального ядра, что и требовалось.

Замечание 3. Описанный в примере 7 полумодуль естественно изоморфен полумодулю $K(\{x, y\})$ функций на двухточечном множестве, причем изоморфизм $K(\{x, y\}) \to V$ задается формулой $v \mapsto (v(x) \odot f \oplus v(y))$. Соответственно, описанный выше функционал ϕ совпадает с δ_y и является интегральным (с ядром δ_y). Таким образом, мы видим, что интегральность не является "внутренним" свойством функционала, а зависит от способа вложения полумодуля в полумодуль функций.

Теорема 3а. *Пусть заданы b-полное полукольцо K и непустое множество X. Теорема о ядре выполнена для функционального b-полумодуля $V \subset K(X)$ тогда и только тогда, когда тождественный оператор $id : V \to V$ является интегральным.*

Доказательство немедленно вытекает из того очевидного факта, что композиция интегрального оператора с любым b-линейным оператором является интегральным оператором. В самом деле, пусть A – b-линейный оператор, отображающий V в некоторый полумодуль W, и $k : X \to V$ – интегральное ядро оператора id. Тогда $f = \bigoplus\limits_{x \in X} f(x) \odot k(x)$ для любой функции $f \in V$, откуда $(Af)(x) = \bigoplus\limits_{x \in X} f(x) \odot A(k(x))$. Таким образом, отображение $x \mapsto A(k(x))$ является ядром оператора A, что и требовалось. □

3. Описание функциональных b-полумодулей, в которых выполнена теорема о ядре

Пусть X – непустое множество и K является идемпотентным полукольцом. Функцию d на $X \times X$ со значениями в полукольце K будем называть *полуметрикой* на X со значениями в K, если

$$d(x, y) = \bigoplus_{z \in X} d(x, z) \odot d(z, y), x, y \in X. \tag{4}$$

Если $d(x, y) = d(y, x)$ для всех элементов $x, y \in X$, то полуметрику будем называть *симметричной*. Если $d(x, x) = \mathbf{1}$ при $x \in X$, то полуметрику будем называть *рефлексивной*. В этом случае условие (4) сводится к неравенству треугольника: $d(x, y) \succcurlyeq d(x, z) \odot d(z, y)$, $x, y, z \in X$.

Пример 8. Пусть $r = r(x, y)$ – метрика на множестве X; тогда функция $d(x, y) = -r(x, y)$ является рефлексивной полуметрикой на X со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$.

Приведем пример несимметричной и нерефлексивной полуметрики на прямой.

Пример 9. Пусть $X = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_{\max}$. Положим $d(x, y) = \mathbf{1}$ при $y < x$ и $d(x, y) = \mathbf{0}$ при $x \leq y$. Тогда $d(x, y)$ является несимметричной полуметрикой, причем $d(x, x) = \mathbf{0}$ при всех $x \in X$.

Введем основные (для этого раздела) определения. Для полуметрики d на X со значениями в b-полном полукольце K определим *b-замкнутые функциональные полумодули* $\mathrm{Lip}(X, d)$ *и* $\mathrm{lip}(X, d)$ *на* X, *полагая*

$$\mathrm{Lip}(X, d) = \{f \in K(X) | f(x) \succcurlyeq d(y, x) \odot f(y) \text{ для всех } y \in X\},$$

$$\mathrm{lip}(X, d) = \{f \in K(X) | f(x) = \bigoplus_{y \in X} d(y, x) \odot f(y)\}.$$

Функциональные полумодули вида $\mathrm{lip}(X, d)$ будем называть *полулипшицевыми*.

Из определения немедленно вытекает, что $\mathrm{lip}(X, d)$ является b-замкнутым подполумодулем в $\mathrm{Lip}(X, d)$. Легко видеть, что в случае рефлексивной полуметрики пространства $\mathrm{lip}(X, d)$ и $\mathrm{Lip}(X, d)$ совпадают. Однако в общем случае это не так. Например, в условиях примера 9 пространство $\mathrm{Lip}(X, d)$ состоит из всех невозрастающих функций на прямой, в то время как $\mathrm{lip}(X, d)$ является пространством всех полунепрерывных снизу[1] функций из $\mathrm{Lip}(X, d)$.

Пример 10. Пусть X – непустое метрическое пространство с фиксированной метрикой r. Обозначим через $\mathrm{lip}(X)$ множество всех функций на X со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющих следующему *условию Липшица*:

$$| f(x) \odot (f(y))^{-1} | = | f(x) - f(y) | \leq r(x, y),$$

где x, y – произвольные элементы из X. Элементами множества $\mathrm{lip}(X)$ являются непрерывные (вещественнозначные) функ-

[1] Полунепрерывные снизу функции со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$ определяются так же, как в примере 3 (см. выше, п. 1.2), но X_s определяется как множество $\{x \in X \mid f(x) \leq s\}$; см. также [8].

ции (не все!) и – по определению – функция, тождественно равная $-\infty = \mathbf{0}$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{lip}(X) = \mathrm{lip}(X, d)$, где $d(x, y) = -r(x, y)$ (см. выше пример 8), так что $\mathrm{lip}(X)$ имеет структуру идемпотентного пространства над полуполем $\mathbb{R}_{\max}$. Назовем пространство $\mathrm{lip}(X)$ *липшицевым* (см. также [8], пример 2.9.12). Это пространство является b-ядерным, и для него справедлива теорема о ядре (см. ниже теорему 4).

Для $x \in X$ обозначим через d_x функцию на X, заданную формулой $d_x : y \mapsto d(x, y)$. В силу условия (4) все функции вида d_x лежат в пространстве $\mathrm{lip}(X, d)$. Обозначим через $\mathrm{lip}_0(X, d)$ *подполумодуль* в $\mathrm{lip}(X, d)$, *порожденный этими функциями* (то есть состоящий из всех их конечных линейных комбинаций).

Предложение 7. *Пусть полуметрика d принимает значения в коммутативном b-полном полукольце K . Любой b-подполумодуль $V \subset \mathrm{lip}(X, d)$, содержащий полумодуль $\mathrm{lip}_0(X, d)$, является в $\mathrm{lip}(X, d)$ нижним идеалом в смысле теории решеток* [33]*. Это означает, что вместе с любой содержащейся в V функцией f полумодуль V содержит все мажорируемые f функции из $\mathrm{lip}(X, d)$. В частности, V замкнут в $\mathrm{lip}(X, d)$ (но не в $K(X)$) относительно взятия точных нижних граней произвольных непустых подмножеств.*

Доказательство. Пусть $f \in V$, $g \in \mathrm{lip}(X, d)$ и $g \preccurlyeq f$. Тогда множество функций $\{g(x) \odot d_x | x \in X\} \subset \mathrm{lip}_0(X, d) \subset V$ ограничено в V, так как все его элементы мажорируются функцией f. Поэтому, учитывая, что V является b-подполумодулем, получаем, что функция g, совпадающая (в силу коммутативности K) с суммой этого множества в $\mathrm{lip}(X, d)$, лежит в V, что и требовалось. $\square$

Теорема 4. *Пусть заданы коммутативное b-полное полукольцо K и непустое множество X. В невырожденном функциональном b-полумодуле $V \subset K(X)$ тогда и только тогда справедлива теорема о ядре, когда существует такая полуметрика d на множестве X, что V является b-подполумодулем в $\mathrm{lip}(X, d)$, содержащим $\mathrm{lip}_0(X, d)$. В частности, если V является b-замкнутым подполумодулем в $K(X)$, то V совпадает с $\mathrm{lip}(X, d)$.*

Доказательство. Если в V справедлива теорема о ядре, то в качестве полуметрики достаточно взять ядро d тождественного отображения id полумодуля V в себя. В самом деле, для произвольного $x \in X$ функция $d_x : y \mapsto d(x, y)$ по определению ядра лежит в V и $d_x = id(d_x) = \bigoplus\limits_{z\in X} d_x(z) \odot d_z$. Поскольку V является функциональным b-полумодулем, последнее можно переписать в виде $d_x(y) = \bigoplus\limits_{z\in X} d(x,z) \odot d(z,y)$ при любом $y \in X$. Таким образом, d является полуметрикой на X и $\mathrm{lip}_0(X,d) \subset V$. Далее, для произвольного $f \in V$ имеем $f = id(f) = \bigoplus\limits_{z\in X} f(z) \odot d_z$, откуда $f(y) = \bigoplus\limits_{z\in X} f(z) \odot d(z,y)$ при любом $y \in X$. Таким образом, $V \subset \mathrm{lip}(X,d)$; здесь используется коммутативность полукольца K (для выполнения равенства $f(z) \odot d(z,y) = d(z,y) \odot f(z)$).

С другой стороны, если V является b-подполумодулем в $\mathrm{lip}(X,d)$, содержащим $\mathrm{lip}_0(X,d)$, то полуметрика по определению $\mathrm{lip}(X,d)$ является ядром тождественного отображения V в себя и лежит в $kern_V(X)$. $\square$

Следствие 5. *Липшицевы пространства ядерны. Невырожденные полулипшицевы полумодули над коммутативными b-полными полукольцами ядерны.*

Отметим, что следствие 5 справедливо и для вырожденных допустимых полулипшицевых полумодулей над коммутативными полукольцами (см. ниже замечание 5).

Замечание 4. Если (в условиях теоремы 4) b-полумодуль V допустим и является одновременно $\wedge$-полумодулем, то полуметрика d, построенная в доказательстве теоремы 4, является рефлексивной. В частности, если b-полумодуль V невырожден, то рефлексивной является полуметрика, совпадающая с максимальным ядром тождественного оператора, построенным в доказательстве теоремы 4.

Замечание 5. Если функциональный b-полумодуль $V \subset K(X)$ вырожден, но допустим (он автоматически допустим, если K является полуполем), то аналог теоремы 4 справедлив для полумодуля, состоящего из всех ограничений функций из V на множество $X_V = \{x \in X | (\exists f \in V) : f(x) = \mathbf{1}\}$, см. предложение 3.

4. Интегральные представления операторов в абстрактных идемпотентных полумодулях

В этом разделе исследуется вопрос о том, когда b-полный идемпотентный полумодуль над b-полным полукольцом изоморфен такому функциональному b-полумодулю, в котором справедлива теорема о ядре.

Пусть V является b-полным идемпотентным полумодулем над b-полным полукольцом K, а ϕ является b-линейным функционалом на V. Назовем этот функционал *δ-функционалом*, если существует такой элемент $v \in V$, что

$$\phi(w) \odot v \preccurlyeq w$$

при любом элементе $w \in V$. Множество всех δ-функционалов b-пространства V будем обозначать через $\Delta(V)$. Будем обозначать через i_Δ естественное отображение $V \to K(\Delta(V))$, заданное формулой

$$(i_\Delta(v))(\phi) = \phi(v), \quad \phi \in \Delta(V).$$

Элемент $v \in V$ назовем *точечным*, если существует такой b-линейный функционал ϕ, что $\phi(w) \odot v \preccurlyeq w$, где $w \in V$. Множество всех точечных элементов полумодуля V будем обозначать через $P(V)$.

Заметим, что если одномерный оператор $\phi \odot v$ входит в разложение тождественного оператора на V в сумму одномерных, то $\phi \in \Delta(V)$ и $v \in P(V)$.

Обозначим id и Id тождественные отображения полумодулей V и $i_\Delta(V)$ соответственно.

Предложение 8. 1) *Если оператор id является b-ядерным оператором, то i_Δ является вложением и оператор Id является интегральным.*

2) *Если оператор i_Δ является вложением и оператор Id является интегральным, то оператор id является b-ядерным.*

Доказательство. Поскольку утверждение 2) очевидно, достаточно проверить утверждение 1). По условию, оператор id является суммой одномерных операторов, то есть имеет вид $id = \bigoplus_{\phi \in \Delta} \phi \odot w_\phi$ при соответствующем выборе элементов $w_\phi \in V$. Но тогда $Id = \bigoplus_{\phi \in \Delta} \delta_\phi \odot i_\Delta(w_\phi)$, то есть Id является интегральным оператором, что и требовалось. □

Из доказанного предложения с учетом теоремы 3а и предложения 6 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Произвольный b-полный идемпотентный полумодуль V над b-полным полукольцом K тогда и только тогда изоморфен функциональному b-полумодулю, в котором справедлива теорема о ядре, когда его тождественное отображение является b-ядерным оператором, то есть когда он является b-ядерным полумодулем.*

Следующее предложение показывает, что вложение i_Δ являтся в некотором смысле универсальным представлением b-ядерного полумодуля в виде функционального b-полумодуля, в котором справедлива теорема о ядре.

Предложение 9. *Пусть K является b-полным полукольцом, X – произвольное непустое множество и $V \subset K(X)$ – функциональный b-полумодуль на X, в котором справедлива теорема о ядре. Тогда определено такое естественное отображение $i : X \to \Delta(V)$, что соответствующее отображение $i_* : K(\Delta(V)) \to K(X)$ является изоморфизмом $i_\Delta(V)$ на V.*

Доказательство. Вложение $i : X \to \Delta(V)$ определяется формулой $i : x \mapsto \delta_x$, $x \in x$. Корректность определения следует из предложения 1. Проверка того, что отображение $i_* : K(\Delta(V)) \to K(X)$ является изоморфизмом $i_\Delta(V)$ на V, тривиальна. □

Замечание 6. Для простоты изложения в статье рассматривались только b-полные полумодули. Значительную часть определний и результатов можно перенести на неполные полумодули, используя процедуру ограниченного пополнения и действуя в духе работы [8].

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Н. Колокольцову и В. П. Маслову за ценные указания и поддержку.

Литература

1. В. П. Маслов, *Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1987.
2. V. P. Maslov, *Méthodes opératorielles.* Mir, Moscow, 1987.
3. В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* М.: Наука, 1994.
4. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and Applications.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
5. V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ (eds.), *Idempotent Analysis.* Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. **13** (1992).
6. J. Gunawardena (ed.), *Idempotency.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

7. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, *Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications* (IHES/M/95/33). Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1995; see also [6, pp. 420–443]; E-print: `arXiv:math.GM/0101021`.
8. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход.* — Мат. заметки **69**, № 5 (2001), 696–729; see also E-print `arXiv:math.FA/0009128` (2000).
9. G. L. Litvinov, V. P. Maslov (eds.), *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics.* Contemp. Math., Vol. **377**, Providence, R.I., 2005.
10. Г. Л. Литвинов, *Деквантовние Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое Введение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **326**, (2005), 145–182; E-print: `arXiv:math.GM/0507014`.
11. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход.* — Мат. заметки **65**, № 4 (1999), 572–585; see also E-print `arXiv:math.FA/0101153`.
12. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход.* — Докл. Акад. Наук **363**, № 3 (1998), 298–300; E-print: `arXiv:math.FA/0012268`.
13. В. Н. Колокольцов, В. П. Маслов, *Общий вид эндоморфизмов в пространстве непрерывных функций со значением в числовом коммутативном полукольце (с операцией $\oplus = \max$).* — Докл. Акад. Наук СССР **295**, № 2 (1987), 283–287.
14. V. N. Kolokoltsov, *Idempotent structures in optimization.* — J. Math. Sci. **104**, No. 1 (2001), 847–880.
15. M. Akian, S. Gaubert, V. Kolokoltsov, *Set coverings and invertibility of functional Galois connections.* — In: [9], 19–52.
16. G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, *Duality and separation theorems in idempotent semimodules.* — Linear Algebra Appl. **379** (2004), 395–422; E-print: `arXiv:math.FA/0212294`.
17. O. Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on a logarithmic paper.* — In: 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona (2000); see also E-print `arXiv:math.AG/0005163`.
18. G. L. Litvinov, A. N. Sobolevskiĭ, *Exact interval solutions of the discrete Bellman equation and polynomial complexity of problems in interval idempotent linear algebra.* — Dokl. Math. **62**, No. 2 (2000), 199–201; E-print: `arXiv:math.LA/0101041`.
19. G. L. Litvinov, A. N. Sobolevskiĭ, *Idempotent interval analysis and optimization problems.* — Reliable Computing **7**, No. 5 (2001), 353–377; E-print: `arXiv:math.SC/0101080`.
20. L. Schwartz, *Théorie des noyaux.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians **1** (1950), pp. 220–230.
21. A. Grothendieck, *Produits tensorielle topologiques et espace nucléairs.* — Mem. Amer. Math. Soc. **16**, Providence, R.I. (1955).
22. Х. Шефер, *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1971.
23. П. И. Дудников, С. Н. Самборский, *Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией.* — Известия АН СССР, сер. матем. **55**, No. 1 (1991), 93–109.

24. М. А. Шубин, *Алгебраические замечания об идемпотентных полукольцах и теорема о ядре в пространствах ограниченных функций.* М: Институт новых технологий, 1990.
25. I. Singer, *Some relations between linear mappings and conjugations in idempotent analysis.* — J. Math. Sci. **115**, No. 5 (2003), 2610–2630.
26. G. Choquet, *Theory of capacities.* — Ann. Inst. Fourier **5** (1955), 131–295.
27. W. Bryc, *Large deviations by the asymptotic value method.* — In: M. Pynsky (ed.), Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Birkhäuser, 1990, pp. 447–472.
28. A. Puhalskii, *Large deviations of semimartingales via convergence of the predictable characteristics.* — Stochastics **49** (1994), 27–85.
29. В. Брейер, О. Гулинский, *Большие уклонения на бесконечномерных пространствах.* М.: МФТИ, Препринт, 1996.
30. O. V. Gulinsky, *The principle of the largest terms and large deviations for a class of nonlinear functionals.* Preprint, 2001.
31. J. Gunawardena, *An introduction to idempotency.* — In: [6], 1–49.
32. Г. Л. Литвинов, Г. Б. Шпиз, *Ядерные полумодули и теоремы о ядре в идемпотентном анализе. Алгебраический подход.* — Докл. Акад. Наук **386**, No. 3, (2002), 300–303; E-print: `arXiv:math.FA/0206026`.
33. Г. Биркгоф, *Теория решеток.* М.: Наука, 1984.

Litvinov G. L., Shpiz G. B. Kernel theorems and nuclearity in idempotent mathematics. An algebraic approach.

In the framework of idempotent mathematics, some analogs for the well-known kernel theorems of L. Schwartz and A. Grothendieck are examined. Idempotent versions of nuclear spaces (in the sense of A. Grothendieck) are described. An algebraic approach is used, so topological concepts and results are simulated by means of algebraic tools.

Независимый московский университет

E-mail: glitvinov@mail.ru, islc@dol.ru

Поступило 12 июня 2006 г.