Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

Е. Е. Горячко

ПРОСТОТА ВЕТВЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $GL(n,q)$ ПРИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

1. Введение

Фиксируем примарное число q и рассмотрим полную линейную группу $GL(n,q)$ степени n над полем $\mathbb{F}_q$. Основной предмет этой статьи – это *параболическое ограничение* конечномерных комплексных представлений группы $GL(n+1,q)$ на группу $GL(n,q)$. Параболическое ограничение определяется с помощью *параболического вложения* α_n между комплексными групповыми алгебрами групп $GL(n,q)$ и $GL(n+1,q)$, которое задается так:

$$\alpha_n : g \longmapsto \frac{1}{q^n} \sum_{u \in (\mathbb{F}_q)^n} \begin{pmatrix} g & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g \in GL(n,q)).$$

В настоящей работе доказана *простота ветвления основной серии представлений групп $GL(n,q)$ при параболических ограничениях*. Это означает, что при параболическом ограничении представления основной серии группы $GL(n+1,q)$ переходят в такие представления группы $GL(n,q)$, разложение которых на неприводимые компоненты свободно от кратностей.

Имеется несколько классических работ, посвященных описанию неприводимых представлений групп $GL(n,q)$, – это, например, статьи [4, 5, 6] и книга [9]. Данные представления и их ветвление при параболических ограничениях описываются с помощью весьма нетривиальной конструкции.

Простота ветвления представлений групп $GL(n,q)$ при параболических ограничениях – важный факт, представляющий самостоятельный интерес и, по-видимому, до сих пор не имеющий простого и ясного доказательства. Все известные доказательства

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-4329.2006.1 для поддержки ведущих научных школ.

этого факта так или иначе используют классификацию всех неприводимых представлений групп $GL(n,q)$. В то же время для симметрических групп S_n независимое доказательство аналогичного утверждения существует, и оно позволяет развить индуктивный подход к теории представлений симметрических групп, как это сделано в [2].

Важность параболического ограничения в теории представлений групп $GL(n,q)$ имеет несколько объяснений. Как известно, группа $GL(n,q)$ есть q-деформация группы S_n, поэтому естественно предположить, что теория представлений групп $GL(n,q)$ должна базироваться на теории представлений групп S_n. Это предположение в определенном смысле оправдывается, ведь ветвление представлений групп $GL(n,q)$ при параболических ограничениях естественным образом обобщает ветвление представлений групп S_n при тождественных ограничениях. Помимо того, описание параболического ветвления представлений групп $GL(n,q)$ позволяет правильно перенести всю эту теорию на случай одной важной бесконечномерной над $\mathbb{F}_q$ группы: речь идёт о группе $GLB(q)$, рассматриваемой в статье [1].

Представления *основной серии* группы $GL(n,q)$ суть такие конечномерные комплексные неприводимые представления этой группы, для которых пространство векторов, неподвижных относительно подгруппы $B(n,q)$ верхнетреугольных матриц над полем $\mathbb{F}_q$, не равно 0. Представления основной серии естественным образом связаны с *алгеброй Гекке* $H(n,q)$. Алгебра $H(n,q)$ состоит из комплексных функций на группе $GL(n,q)$, постоянных на двойных классах смежности группы $GL(n,q)$ по подгруппе $B(n,q)$.

Параболическое вложение α_n между групповыми алгебрами $\mathbb{C}[GL(n,q)]$ и $\mathbb{C}[GL(n+1,q)]$ определяет вложение $\widetilde{\alpha}_n$ между алгебрами Гекке $H(n,q)$ и $H(n+1,q)$. Вложение $\widetilde{\alpha}_n$ легко задается с помощью специальных образующих алгебры $H(n,q)$. Известно (см., например, [8]), что алгебра Гекке имеет следующее задание образующими и соотношениями:

$$\begin{aligned} H(n+1,q) = <\tau_1,\ldots,\tau_n \mid \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i,\ |i-j|\geqslant 2,& \\ \tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}, \tau_i^2 = q + (q-1)\,\tau_i > .& \end{aligned}$$

Для каждого $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ вложение $\widetilde{\alpha}_n$ отображает i-ю образующую алгебры $H(n,q)$ в τ_i – i-ю образующую алгебры $H(n+1,q)$. Значит, вложение $\widetilde{\alpha}_n$ устанавливает изоморфизм между алгеброй $H(n, q)$ и подалгеброй в $H(n+1, q)$, порожденной элементами $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$. Отсюда следует, что мы можем отождествить $H(n, q)$ с данной подалгеброй в $H(n+1, q)$, а вложение $\widetilde{\alpha}_n$ – с тождественным вложением. После таких отождествлений можно рассматривать ограничение конечномерных комплексных представлений алгебры $H(n+1, q)$ на подалгебру $H(n, q)$.

В разделе 3 этой статьи строится небольшая общая теория, связывающая вложения алгебр, идемпотенты в них и представления этих алгебр. Используя эту теорию и замкнутость основной серии представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях (это известный факт, но ссылки на его элементарное обоснование, вероятно, нет, поэтому в разделе 4 дан эскиз доказательства этого утверждения), простоту ветвления основной серии представлений групп $GL(n, q)$ при параболических ограничениях можно свести к простоте ветвления представлений алгебр $H(n, q)$, что и сделано в разделе 5. Таким образом, основной результат данной работы следует из того, что представления алгебры Гекке $H(n+1, q)$ имеют простое ветвление при ограничении на подалгебру $H(n, q)$.

Это утверждение доказывается в разделе 6 с помощью идеи, восходящей к [3]. Эта идея состоит в том, что некоторые свойства ветвления представлений формулируются в терминах специально подобранных алгебр. В частности, имеет место следующий критерий (см. [2]): простота ветвления представлений полупростой алгебры при ограничении на ее полупростую подалгебру равносильна тому, что централизатор второй алгебры в первой коммутативен. Значит, нужно проверить коммутативность централизатора алгебр Гекке $Z(H(n, q), H(n+1, q))$. Этот факт является q-аналогом классического утверждения о коммутативности централизатора групповых алгебр симметрических групп $Z(\mathbb{C}[S_n], \mathbb{C}[S_{n+1}])$; его доказательство опирается на вспомогательную комбинаторную теорию.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и полезные обсуждения в процессе ее решения.

2. Основные обозначения и определения

В этом разделе даются определения основных изучаемых объектов и вводятся обозначения, с которыми нам будет удобно работать.

Примем следующие соглашения: всюду в этой статье “алгебра” есть конечномерная комплексная ассоциативная алгебра с единицей, “вложение алгебр” есть вложение векторных пространств, сохраняющее умножение, но, возможно, не сохраняющее единицу, все возникающие представления алгебр или групп суть конечномерные комплексные представления.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, π – представление алгебры $\mathcal{A}$.

Через V^π обозначим пространство представления π – левый $\mathcal{A}$-модуль, через $\dim\pi = \dim V^\pi$ – размерность представления π.

В дальнейшем нам будет удобно работать не с конкретными представлениями алгебры $\mathcal{A}$, а с классами эквивалентности представлений этой алгебры (т.е. с классами изоморфизма левых $\mathcal{A}$-модулей). Тем не менее многие конструкции, связанные с представлениями, мы будем определять в терминах индивидуальных представлений. Эти построения будут подразумевать то, что формально мы работаем с классами эквивалентных представлений, но для упрощения записи рассматриваем их конкретных представителей.

Определение 1. *Моноид представлений $R(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ – коммутативный моноид, образованный классами эквивалентности представлений этой алгебры относительно операции прямой суммы представлений.*

Это определение корректно из-за того, что при замене в прямой сумме представлений прямых слагаемых на эквивалентные получается представление, эквивалентное исходной прямой сумме. В дальнейшем аналогичные проверки будут столь же тривиальны, поэтому мы будем их опускать.

Определение 2. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ – множество классов эквивалентности неприводимых представлений этой алгебры.*

Пусть $\mathcal{A}$ – полупростая алгебра (например, $\mathcal{A} = \mathbb{C}[G]$ – групповая алгебра конечной группы G – полупростая алгебра по теореме Машке). Ясно, что тогда моноид представлений $R(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ – свободный коммутативный моноид с базисом $\sigma(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – алгебры, $\alpha\colon\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – вложение алгебр, а π – представление алгебры $\mathcal{A}$.

В пространстве V^π рассмотрим подпространство $\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))$; $\pi(\alpha(1))$ – идемпотент в алгебре эндоморфизмов пространства V^π, поэтому это подпространство совпадает с $\{v \in V^\pi \mid \pi(\alpha(1))v = v\}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))$ – $\pi(\alpha(\mathcal{B}))$-инвариантное подпространство в V^π, а также что $\pi(\alpha(1))|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))} = \mathrm{id}$.

Определение 3. *Гомоморфизм ограничения представлений r_α между моноидами представлений $R(\mathcal{A})$ и $R(\mathcal{B})$ определяется так:*

$$r_\alpha\colon \pi \longmapsto r_\alpha(\pi)\colon b \longmapsto \pi(\alpha(b))|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))}.$$

Как было доказано выше, $r_\alpha(\pi)$ – представление алгебры $\mathcal{B}$. Легко видеть, что r_α сохраняет прямые суммы представлений, поэтому r_α – гомоморфизм моноидов. Если α сохраняет единицу, то $\pi(\alpha(1)) = \mathrm{id}$ и $r_\alpha(\pi) = \pi\circ\alpha$.

Пусть n – целое неотрицательное, а q – примарное число.

Через G_n обозначим полную линейную группу $GL(n,q)$, а через B_n – борелевскую подгруппу $B(n,q)$ в этой группе. Через $\mathcal{A}_n$ обозначим групповую алгебру $\mathbb{C}[G_n]$ группы G_n; представления группы G_n и алгебры $\mathcal{A}_n$ будут естественным образом отождествляться. Через $\mathcal{H}_n$ обозначим алгебру Гекке $H(n,q)$ – это алгебра комплексных функций на группе G_n, постоянных на двойных классах смежности G_n по B_n.

Пусть $\alpha_n\colon\mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ – параболическое вложение. Тогда параболическое ограничение представлений $r_{n+1}\colon R(\mathcal{A}_{n+1}) \to R(\mathcal{A}_n)$ – это гомоморфизм ограничения представлений r_α при $\alpha = \alpha_n$.

3. Вложения алгебр, идемпотенты в них и представления этих алгебр

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, e – идемпотент в $\mathcal{A}$.

Рассмотрим алгебру $e\mathcal{A}e = \{eae \mid a\in\mathcal{A}\}$ (единица этой алгебры есть e) и вложение алгебр $e\mathcal{A}e \hookrightarrow \mathcal{A}$, не сохраняющее единицу, если $e\neq 1$.

Определение 4. *Гомоморфизм e-ограничения представлений r^e – гомоморфизм ограничения представлений r_α при $\alpha = e\mathcal{A}e \hookrightarrow \mathcal{A}$.*

Определение 5. *Определим e-спектр $\sigma^e(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ так:*

$$\sigma^e(\mathcal{A}) = \{\pi\in\sigma(\mathcal{A}) \mid r^e(\pi)\neq 0\} = \{\pi\in\sigma(\mathcal{A}) \mid \pi(e)\neq 0\}.$$

Определение 6. *Определим e-моноид представлений $R^e(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ как подмоноид в моноиде представлений $R(\mathcal{A})$, порожденный множеством $\sigma^e(\mathcal{A})$.*

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – алгебры, $\alpha: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – вложение алгебр, а $e_{\mathcal{A}}$ и $e_{\mathcal{B}}$ – идемпотенты в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Будем использовать дополнительные обозначения: $\widetilde{\mathcal{A}} = e_{\mathcal{A}}\mathcal{A}e_{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{B}}\mathcal{B}e_{\mathcal{B}}$.

Определение 7. *Проекция $\widetilde{\alpha}: \widetilde{\mathcal{B}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ вложения алгебр α определяется так:*

$$\widetilde{\alpha}: \widetilde{b} \longmapsto e_{\mathcal{A}}\alpha(\widetilde{b})e_{\mathcal{A}}.$$

Предложение 1. *Пусть алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, вложение α и идемпотенты $e_{\mathcal{A}}$ и $e_{\mathcal{B}}$ удовлетворяют следующим двум дополнительным условиям:*

(Cond1) *$e_{\mathcal{A}} = z\alpha(e_{\mathcal{B}})$ для некоторого центрального идемпотента $z \in \mathcal{A}$;*

(Cond2) *для любого $b \in \mathcal{B}$ имеет место импликация $z\alpha(b) = 0 \Longrightarrow \alpha(b) = 0$.*

Тогда проекция $\widetilde{\alpha}$ – вложение алгебр, сохраняющее единицу.

Это утверждение доказывается с помощью непосредственной проверки. Оно позволяет в предположении условий **(Cond1)** и **(Cond2)** корректно определить гомоморфизм ограничения представлений $r_{\widetilde{\alpha}}: R(\widetilde{\mathcal{A}}) \to R(\widetilde{\mathcal{B}})$.

В силу того, что вложение $\widetilde{\alpha}$ сохраняет единицу, для любого $\widetilde{\pi} \in R(\widetilde{\mathcal{A}})$ верно, что $r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\alpha}$.

Теорема 1. *В предположении условий* **(Cond1)** *и* **(Cond2)** *утверждается, что следующая диаграмма, составленная из моноидов и гомоморфизмов между ними, коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} R^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{r_\alpha} & R(\mathcal{B}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle r^{e_{\mathcal{A}}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle r^{e_{\mathcal{B}}}} \\ R(\widetilde{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{r_{\widetilde{\alpha}}} & R(\widetilde{\mathcal{B}}). \end{array}$$

Доказательство. Нужно доказать, что для всякого $\pi \in R^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$

$$r^{e_{\mathcal{B}}}(r_\alpha(\pi)) = r_{\widetilde{\alpha}}(r^{e_{\mathcal{A}}}(\pi)).$$

Моноид $R^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$ порожден множеством $\sigma^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$, поэтому данное равенство достаточно проверить только для элементов этого множества.

Пусть $\pi \in \sigma^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$; обозначим $\rho = r_\alpha(\pi) \in R(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\pi} = r^{e_{\mathcal{A}}}(\pi) \in R(\widetilde{\mathcal{A}})$. Тогда нужно доказать, что $r^{e_{\mathcal{B}}}(\rho) = r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi})$.

Зафиксируем $\widetilde{b} \in \widetilde{\mathcal{B}}$; тогда $r^{e_{\mathcal{B}}}(\rho)(\widetilde{b}) = \rho(\widetilde{b})|_{\operatorname{Im}\rho(e_{\mathcal{B}})\to\operatorname{Im}\rho(e_{\mathcal{B}})}$. По определению, $\rho(e_{\mathcal{B}}) = \pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))}$. Ясно, что $\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))\operatorname{Im}\pi(\alpha(1)) = \operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))$, поэтому $\operatorname{Im}\rho(e_{\mathcal{B}}) = \operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}})) \leqslant \operatorname{Im}\pi(\alpha(1))$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} r^{e_{\mathcal{B}}}(\rho)(\widetilde{b}) &= \rho(\widetilde{b})|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))} = \\ &= \big(\pi(\alpha(\widetilde{b}))|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(1))}\big)|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))} = \\ &= \pi(\alpha(\widetilde{b}))|_{\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))\to\operatorname{Im}\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим представление $r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi})$. Найдем значение этого представления на элементе $\widetilde{b} \in \widetilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi})(\widetilde{b}) &= \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}(\widetilde{b})) = \pi(\widetilde{\alpha}(\widetilde{b}))|_{\operatorname{Im}\pi(e_{\mathcal{A}})\to\operatorname{Im}\pi(e_{\mathcal{A}})} = \\ &= \pi(z)\pi(\alpha(\widetilde{b}))|_{\operatorname{Im}\pi(z)\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))\to\operatorname{Im}\pi(z)\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}}))}. \end{aligned}$$

Последнее из этих равенств имеет место в силу условия **(Cond1)** и формулы $\widetilde{\alpha}(\widetilde{b}) = z\alpha(\widetilde{b})$, которая следует из этого условия:

$$\widetilde{\alpha}(\widetilde{b}) = e_{\mathcal{A}}\alpha(\widetilde{b})e_{\mathcal{A}} = z\alpha(e_{\mathcal{B}})\alpha(\widetilde{b})\alpha(e_{\mathcal{B}})z = z\alpha(e_{\mathcal{B}}\widetilde{b}e_{\mathcal{B}})z = z\alpha(\widetilde{b}).$$

Элемент z в алгебре $\mathcal{A}$ – центральный идемпотент, π – неприводимое представление этой алгебры, поэтому по лемме Шура $\pi(z)$ есть или 0, или тождественный оператор. При этом если $\pi(z) = 0$, то $\pi(e_{\mathcal{A}}) = \pi(z\alpha(e_{\mathcal{B}})) = \pi(z)\pi(\alpha(e_{\mathcal{B}})) = 0$, но это противоречит тому, что π – элемент $e_{\mathcal{A}}$-спектра $\sigma^{e_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $\pi(z) = \mathrm{id}$, поэтому полученные ранее выражения для $r^{e_{\mathcal{B}}}(\rho)(\widetilde{b})$ и $r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi})(\widetilde{b})$ совпадают при всех $\widetilde{b} \in \widetilde{\mathcal{B}}$, значит, $r^{e_{\mathcal{B}}}(\rho) = r_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\pi})$, что и требовалось доказать. $\square$

4. Замкнутость основной серии

Пусть n – целое неотрицательное, а q – примарное число.

Рассмотрим $e_n = \frac{1}{|B_n|}\sum\limits_{b\in B_n} b$ – идемпотент в алгебре $\mathcal{A}_n$. Ясно, что для всякого π – представления алгебры $\mathcal{A}_n$ – $\operatorname{Im}\pi(e_n)$ совпадает с пространством $\{v \in V^\pi \mid \forall b \in B_n\,(\pi(b)v = v)\}$. Поэтому представления основной серии группы G_n суть в точности такие ее представления, классы эквивалентности которых принадлежат e_n-спектру $\sigma^{e_n}(\mathcal{A}_n)$ алгебры $\mathcal{A}_n$.

Определение 8. *Флаговое многообразие $\mathcal{F}_n$ есть множество*

$$\mathcal{F}_n = \{(V_0, V_1, \ldots, V_n) \mid 0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = (\mathbb{F}_q)^n\}.$$

Элементы множества $\mathcal{F}_n$ называются флагами в $(\mathbb{F}_q)^n$.

Группа G_n естественным образом действует на флаговом многообразии $\mathcal{F}_n$. Легко видеть, что это действие транзитивно.

Определение 9. *Флаговое представление ϕ_n есть представление группы G_n в пространстве $\mathbb{C}^{\mathcal{F}_n}$ комплексных функций на флаговом многообразии $\mathcal{F}_n$, полученное продолжением по линейности действия группы G_n на $\mathcal{F}_n$.*

Следующее утверждение легко доказывается с помощью элементарной теории представлений, поэтому его доказательство опускается.

Предложение 2. *Флаговое представление ϕ_n (точнее, класс эквивалентности представления ϕ_n) принадлежит e_n-моноиду представлений $R^{e_n}(\mathcal{A}_n)$ алгебры $\mathcal{A}_n$, причем разложение ϕ_n на неприводимые представления имеет вид*

$$\phi_n = \sum_{\pi \in \sigma^{e_n}(\mathcal{A}_n)} \dim r^{e_n}(\pi)\pi.$$

Ниже дается эскиз доказательства теоремы о замкнутости основной серии представлений групп G_n при параболических ограничениях. Эта теорема утверждает, что для всякого числа $n \in \mathbb{N}$ представления основной серии группы G_n (т.е. элементы множества $\sigma^{e_n}(\mathcal{A}_n)$) при параболическом ограничении переходят в такие представления группы G_{n-1}, в разложении которых на неприводимые представления участвуют только представления основной серии группы G_{n-1} (т.е. в элементы моноида $R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$). В терминах моноидов представлений теорема о замкнутости имеет следующую простую формулировку.

Теорема 2. $r_n(R^{e_n}(\mathcal{A}_n)) \leqslant R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$.

Доказательство. Докажем, что параболическое ограничение $r_n(\phi_n)$ флагового представления ϕ_n алгебры $\mathcal{A}_n$ принадлежит $R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$. Представление ϕ_n есть сумма с ненулевыми кратностями всех представлений основной серии группы G_n, поэтому отсюда будет следовать, что параболические ограничения этих представлений также принадлежат $R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$.

Используя несложные соображения из геометрии пространств над $\mathbb{F}_q$, можно доказать, что $\dim r_n(\phi_n) = n \dim \phi_{n-1}$. При помощи этого равенства ниже доказывается, что $r_n(\phi_n) = n\phi_{n-1}$.

Положим $V_n^0 = (\mathbb{F}_q)^n$; если $v \in V_n^0$, через v_n обозначим n-ю координату вектора v; и пусть $V_{n-1}^0 = \{v \in V_n^0 \mid v_n = 0\}$ – $(n-1)$-мерное подпространство в V_n^0.

Пусть i – натуральное число от 1 до n, $d = (U_0, \dots, U_{n-1})$ – флаг в пространстве V_{n-1}^0, а v – вектор из $V_n^0 \setminus V_{n-1}^0$. Определим упорядоченный набор из n подпространств в V_n^0: $f_v(i,d) = (U_0, \dots, U_i, U_i + < v >, U_{i+1} + < v >, \dots, U_{n-1} + < v >)$. Легко проверить, что $f_v(i,d)$ – флаг в пространстве V_n^0. Рассмотрим формальную сумму $s(i,d) = \sum\limits_{v \in V_n^0 \setminus V_{n-1}^0} f_v(i,d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{F}_n}$. Легко проверяется, что оператор $\phi_n(\alpha_{n-1}(g))$ действует на вектор $s(i,d)$ так:

$$\phi_n(\alpha_{n-1}(g))s(i,d) = s(i, gd) = s(i, \phi_{n-1}(g)d).$$

Векторы $s(i,d)$, $(i,d) \in \{1, \dots, n\} \times \mathcal{F}_{n-1}$, линейно независимы, поэтому каждое из подпространств $S_i =< s(i,d) \mid d \in \mathcal{F}_{n-1} >$, $i = 1, \dots, n$, в $\mathbb{C}^{\mathcal{F}_n}$ имеет размерность $|\mathcal{F}_{n-1}|$, а их сумма – прямая. Пусть $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$; тогда $\dim S = n|\mathcal{F}_{n-1}| = n \dim \phi_{n-1}$. Из полученной формулы видно, что ограничение оператора $\phi_n(\alpha_{n-1}(1))$ на S есть тождественный оператор, поэтому $S \leqslant \operatorname{Im} \phi_n(\alpha_{n-1}(1)) = V^{r_n(\phi_n)}$. Равенство $\dim r_n(\phi_n) = n \dim \phi_{n-1}$ означает, что размерности этих пространств совпадают, значит, S есть в точности пространство $V^{r_n(\phi_n)}$ представления $r_n(\phi_n)$. Отсюда $S = V^{r_n(\phi_n)}$ есть прямая сумма n подпространств $S_1, \dots, S_n$, в каждом из которых алгебра $\phi_n(\alpha_{n-1}(\mathcal{A}_{n-1}))$ действует так же, как алгебра $\phi_{n-1}(\mathcal{A}_{n-1})$ – в пространстве $\mathbb{C}^{\mathcal{F}_{n-1}} = V^{\phi_{n-1}}$. Итак, $r_n(\phi_n) = n\phi_{n-1} \in R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$, и теорема доказана. □

5. Алгебры Гекке

Пусть G – конечная группа, B – подгруппа в G, $e = \frac{1}{|B|} \sum\limits_{b \in B} b$ – идемпотент в алгебре $\mathcal{A} = \mathbb{C}[G]$.

В такой ситуации тривиальным образом проверяется, что алгебра $e\mathcal{A}e$ есть в точности алгебра $\mathbb{C}[B\backslash G/B]$ функций на группе G, постоянных на двойных классах смежности G по B. Кроме того, алгебра $\mathcal{A}$ полупроста, поэтому, как легко видеть, алгебра $e\mathcal{A}e = \mathbb{C}[B\backslash G/B]$ также полупроста.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{n-1}$, параболическое вложение $\alpha_{n-1}\colon \mathcal{A}_{n-1} \to \mathcal{A}_n$, а также идемпотенты $e_{\mathcal{A}} = e_n$ и $e_{\mathcal{B}} = e_{n-1}$ в $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_{n-1}$ соответственно. Согласно сделанному выше замечанию, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{H}_n$ и $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{H}_{n-1}$ – полупростые алгебры (первая из них совпадает с $e_n\mathcal{A}_n e_n = \mathbb{C}[B_n \backslash G_n / B_n]$, а вторая – с $e_{n-1}\mathcal{A}_{n-1}e_{n-1} = \mathbb{C}[B_{n-1}\backslash G_{n-1}/B_{n-1}]$).

Определение 10. *Проекция $\widetilde{\alpha}_{n-1}$ вложения алгебр α_{n-1} – это проекция $\widetilde{\alpha}$ при $\alpha = \alpha_{n-1}$.*

Предложение 3. *$\widetilde{\alpha}_{n-1}$ – вложение алгебр, сохраняющее единицу.*

По предложению 1 это утверждение следует из того, что алгебры $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_{n-1}$, вложение α_{n-1} и идемпотенты e_n и e_{n-1} удовлетворяют условиям **(Cond1)** и **(Cond2)**. Элемент $z \in \mathcal{A}_n$ определяется как усредненная сумма скалярных матриц из группы G_n. Проверка этих условий почти тривиальна, поэтому доказательство этого утверждения опускается.

Этот факт позволяет корректно определить гомоморфизм ограничения представлений $r_{\widetilde{\alpha}_{n-1}}\colon R(\mathcal{H}_n) \to R(\mathcal{H}_{n-1})$. Обозначим этот гомоморфизм через $\widetilde{r}_n$. Рассмотрим гомоморфизм параболического ограничения представлений $r_n\colon R(\mathcal{A}_n) \to R(\mathcal{A}_{n-1})$. По теореме 2 этот гомоморфизм переводит моноид $R^{e_n}(\mathcal{A}_n)$ в моноид $R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$, поэтому можно рассмотреть его сужение $r_n\colon R^{e_n}(\mathcal{A}_n) \to R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1})$. В силу условий **(Cond1)** и **(Cond2)**, по теореме 1 получаем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R^{e_n}(\mathcal{A}_n) & \xrightarrow{r_n} & R^{e_{n-1}}(\mathcal{A}_{n-1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle r^{e_n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r^{e_{n-1}}} \\ R(\mathcal{H}_n) & \xrightarrow{\widetilde{r}_n} & R(\mathcal{H}_{n-1}). \end{array}$$

Из коммутативности этой диаграммы легко получить следующий факт.

Предложение 4. *Простота ветвления основной серии представлений групп G_n при ограничениях представлений r_n следует из простоты ветвления представлений алгебр $\mathcal{H}_n$ при ограничениях представлений $\widetilde{r}_n$.*

Итак, мы свели задачу о простоте ветвления основной серии представлений полных линейных групп $G_n = GL(n,q)$ к задаче о простоте ветвления представлений алгебр Гекке $\mathcal{H}_n = H(n,q)$.

Предложение 5. *Для $g \in G_{n-1}$ через $\widetilde{B}_{n-1}$ будем обозначать двойной класс смежности $B_{n-1}gB_{n-1} \in B_{n-1}\backslash G_{n-1}/B_{n-1}$, а через $\widetilde{B}_n$ – двойной класс смежности $B_n \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_n \in B_n\backslash G_n/B_n$. Имеет место равенство*

$$\widetilde{\alpha}_{n-1}\Big(\frac{1}{|B_{n-1}|}\sum_{\widetilde{b}\in\widetilde{B}_{n-1}}\widetilde{b}\Big) = \frac{1}{|B_n|}\sum_{\widetilde{b}\in\widetilde{B}_n}\widetilde{b}.$$

Эта формула проверяется с помощью прямого вычисления.

Ниже формулируется теорема о разложении Брюа, устанавливающая биекцию между симметрической группой S_n и множеством $B_n\backslash G_n/B_n$ двойных классов смежности G_n по B_n.

Для $\pi \in S_n$ обозначим через $\widetilde{\pi} \in G_n$ матрицу перестановки π.

Определение 11. *Клетка Брюа, соответствующая перестановке $\pi \in S_n$, есть двойной класс смежности $B_n\widetilde{\pi}B_n$.*

Определение 12. *Множество инверсий $\mathrm{inv}(\pi)$ перестановки $\pi \in S_n$ определяется так:*

$$\mathrm{inv}(\pi) = \{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2 \mid (i<j)\ \&\ (\pi(i) > \pi(j))\}.$$

Определение 13. *Длина $l(\pi)$ перестановки $\pi \in S_n$ есть $|\mathrm{inv}(\pi)|$.*

Теорема о разложении Брюа утверждает, что соответствие $\pi \mapsto B_n\widetilde{\pi}B_n$ является биекцией между S_n и $B_n\backslash G_n/B_n$. При этом порядок клетки Брюа $B_n\widetilde{\pi}B_n$, $\pi \in S_n$, есть $q^{l(\pi)}|B_n|$.

Определение 14. *Определим отображение τ между S_n и $\mathcal{H}_n$:*

$$\tau\colon \pi \longmapsto \frac{1}{|B_n|}\sum_{\widetilde{b}\in B_n\widetilde{\pi}B_n}\widetilde{b}.$$

По теореме о разложении Брюа $\tau(S_n)$ – базис алгебры $\mathcal{H}_n$.

По предложению 5 базис алгебры $\widetilde{\alpha}_{n-1}(\mathcal{H}_{n-1})$ состоит из таких $\tau(\pi)$, $\pi \in S_n$, что π – перестановка, оставляющая на месте число n. Отождествим такие перестановки с соответствующими перестановками из группы S_{n-1}, тогда алгебра $\mathcal{H}_{n-1}$ будет отождествлена с подалгеброй в $\mathcal{H}_n$ с базисом $\tau(S_{n-1})$, а вложение $\widetilde{\alpha}_{n-1}$ – с тождественным вложением $\mathcal{H}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{H}_n$; поэтому для любого $\widetilde{\pi} \in R(\mathcal{H}_n)$ имеет место равенство $\widetilde{r}_n(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\pi}|_{\mathcal{H}_{n-1}}$.

Определение 15. *Определим антиинволюцию* ^{op} *в алгебре* $\mathcal{H}_n$*:*

$$\widetilde{a} = \sum_{g \in G_n} \widetilde{a}_g g \longmapsto \widetilde{a}^{op} = \sum_{g \in G_n} \widetilde{a}_g g^{-1}.$$

Корректность этого определения легко проверяется.

Пусть $p \in \mathcal{H}_n$, $\pi \in S_n$; обозначим через p_π коэффициент перед $\tau(\pi)$ в разложении элемента p по базису $\tau(S_n)$. Тогда выполнено равенство $p = \sum\limits_{\pi \in S_n} p_\pi \tau(\pi)$.

Определение 16. *Определим скалярное произведение* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *в* $\mathcal{H}_n$*:*

$$(p, r) \longmapsto \langle p, r \rangle = \sum_{\pi \in S_n} p_\pi \overline{r_\pi}.$$

Пусть $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\pi \in S_n$; обозначим через σ_i фундаментальную транспозицию $(i\ i+1)$. Имеет место альтернатива: или $(i, i+1) \notin \mathrm{inv}(\pi)$ и $l(\pi\sigma_i) - l(\pi) = 1$, или $(i, i+1) \in \mathrm{inv}(\pi)$ и $l(\pi\sigma_i) - l(\pi) = -1$. Отсюда следует, что разность $l(\pi\sigma_i) - l(\pi)$ может быть равна только 1 или -1. Заметим также, что если $(i, i+1) \in \mathrm{inv}(\pi)$, то $l(\sigma_i \pi \sigma_i) = l(\sigma_i \pi^{-1} \sigma_i) \leqslant l(\sigma_i \pi^{-1}) + 1 = l(\pi\sigma_i) + 1 = l(\pi)$. Импликация $(i, i+1) \in \mathrm{inv}(\pi) \Longrightarrow l(\sigma_i \pi \sigma_i) \leqslant l(\pi)$, которую мы только что доказали, будет использована позднее.

Следующий факт легко выводится из соотношения (см. [7])

$$\tau(\pi)\tau(\sigma_i) = \begin{cases} \tau(\pi\sigma_i), & \text{если } l(\pi\sigma_i) - l(\pi) = 1, \\ q\tau(\pi\sigma_i) + (q-1)\tau(\pi), & \text{если } l(\pi\sigma_i) - l(\pi) = -1. \end{cases}$$

Предложение 6. *Для всех* $p \in \mathcal{H}_n$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *и* $\rho \in S_n$ *выполнены равенства*

$$\langle p\tau(\sigma_i), \tau(\rho) \rangle = \begin{cases} q p_{\rho\sigma_i}, & \textit{если } l(\rho\sigma_i) - l(\rho) = 1, \\ p_{\rho\sigma_i} + (q-1) p_\rho, & \textit{если } l(\rho\sigma_i) - l(\rho) = -1; \end{cases}$$

$$\langle \tau(\sigma_i) p, \tau(\rho) \rangle = \begin{cases} q p_{\sigma_i\rho}, & \textit{если } l(\sigma_i\rho) - l(\rho) = 1, \\ p_{\sigma_i\rho} + (q-1) p_\rho, & \textit{если } l(\sigma_i\rho) - l(\rho) = -1. \end{cases}$$

6. Простота ветвления

Наше доказательство теоремы о простоте ветвления представлений алгебр Гекке $H(n, q)$ (и, как следствие, основного утверждения статьи) опирается на изложенную ниже вспомогательную комбинаторную теорию.

Определение 17. *Определим отношение предпорядка* $\succcurlyeq$ *на симметрической группе* S_n. *Пусть* $\rho, \widetilde{\rho} \in S_n$. *Будем полагать, что* $\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}$, *если и только если для некоторого числа* $r \in \mathbb{N}_0$ *найдутся такие фундаментальные транспозиции* $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_r}$, *принадлежащие подгруппе* S_{n-1} *в* S_n, *что,*

$$\text{полагая } \rho = \rho_0, \sigma_{i_1}\rho_0\sigma_{i_1} = \rho_1, \sigma_{i_2}\rho_1\sigma_{i_2} = \rho_2, \dots, \sigma_{i_r}\rho_{r-1}\sigma_{i_r} = \rho_r,$$
$$\text{имеем } \rho_r = \widetilde{\rho} \text{ и } l(\rho) = l(\rho_0) \geqslant l(\rho_1) \geqslant l(\rho_2) \geqslant \dots \geqslant l(\rho_r) = l(\widetilde{\rho}).$$

Определение 18. *Определим отношение эквивалентности* $\sim$ *на симметрической группе* S_n. *Пусть* $\rho, \widetilde{\rho} \in S_n$. *Будем полагать, что* $\rho \sim \widetilde{\rho}$, *если и только если для некоторого числа* $r \in \mathbb{N}_0$ *найдутся такие фундаментальные транспозиции* $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_r}$, *принадлежащие подгруппе* S_{n-1} *в* S_n, *что,*

$$\text{полагая } \rho = \rho_0, \sigma_{i_1}\rho_0\sigma_{i_1} = \rho_1, \sigma_{i_2}\rho_1\sigma_{i_2} = \rho_2, \dots, \sigma_{i_r}\rho_{r-1}\sigma_{i_r} = \rho_r,$$
$$\text{имеем } \rho_r = \widetilde{\rho} \text{ и } l(\rho) = l(\rho_0) = l(\rho_1) = l(\rho_2) = \dots = l(\rho_r) = l(\widetilde{\rho}).$$

Ясно, что для всяких $\rho, \widetilde{\rho} \in S_n$

$$\rho \sim \widetilde{\rho} \Longleftrightarrow \rho \succcurlyeq \widetilde{\rho} \ \& \ \widetilde{\rho} \succcurlyeq \rho \Longleftrightarrow \rho \succcurlyeq \widetilde{\rho} \ \& \ l(\rho) = l(\widetilde{\rho}).$$

Легко проверить, что $\rho \sim \widetilde{\rho} \Longleftrightarrow \rho^{-1} \sim \widetilde{\rho}^{-1}$.

Определение 19. *Перестановка* $\rho \in S_n$ *называется упорядоченной перестановкой, если* $\rho = (1 \ \ 2 \ \ \dots \ \ i_1)(i_1+1 \ \ i_1+2 \ \ \dots \ \ i_1+i_2) \dots (n-i_s+1 \ \ n-i_s+2 \ \ \dots \ \ n)$ *для* $s \in \{0, \dots, n\}$ *и* $i_1, i_2, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}$, *таких, что* $i_1 + i_2 + \dots + i_s = n$.

Предложение 7. *Для всякой перестановки* $\rho \in S_n$ *существует такая упорядоченная перестановка* $\widetilde{\rho} \in S_n$, *что* $\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. Если $n \in \{0, 1\}$, то доказывать нечего. Докажем требуемое утверждение для $n \geqslant 2$, предполагая, что оно верно для всех чисел меньше n. Для $\rho \in S_n$ определим множество $M(\rho)$ и число $m(\rho)$ так:

$$M(\rho) = \{m \in \{1, \dots, n-1\} \mid \forall i \in \{m, \dots, n-1\} \, (\rho(i) = \rho(i+1))\},$$
$$m(\rho) = \begin{cases} \min M(\rho), & \text{если } M(\rho) \neq \varnothing, \\ n, & \text{если } M(\rho) = \varnothing. \end{cases}$$

Воспользуемся индукцией по $m(\rho)$. Ясно, что если $m(\rho) = 1$, то $\rho = (1 \ \ 2 \ \ \dots \ \ n)$ – упорядоченная перестановка. Докажем требуемое утверждение для всех ρ с $m(\rho) = m \geqslant 2$, предполагая, что оно верно для всех перестановок ρ с $m(\rho)$ меньше m.

Итак, пусть $\rho \in S_n$ – такая перестановка, что $m(\rho) = m$. Это означает, что $\rho(m) = m+1, \dots, \rho(n-1) = n$ и $\rho(m-1) \neq m$. Отсюда получаем, что $\rho^{-1}(m) \notin \{m-1, m, \dots, n-1\}$. Таким образом, возникают два случая: либо $\rho^{-1}(m) = n$, либо $\rho^{-1}(m) \leqslant m-2$. Разберем эти случаи.

Если $\rho^{-1}(m) = n$, то $\rho(n) = m$, а $\rho = \rho_0(m \;\; m+1 \;\; \dots \;\; n)$, где ρ_0 – перестановка, оставляющая на месте числа $m, \dots, n$. Естественным образом отождествим перестановку ρ_0 с соответствующей перестановкой из группы S_{m-1}; тогда по предположению индукции по n существует такая упорядоченная перестановка $\widetilde{\rho}_0 \in S_{m-1}$, что $\rho_0 \succcurlyeq \widetilde{\rho}_0$. По определению предпорядка $\succcurlyeq$ для некоторых фундаментальных транспозиций $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r} \in S_{m-2}$ имеем: $\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_1} \rho_0 \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_r} = \widetilde{\rho}_0$. Элементы подгруппы S_{m-2} коммутируют с $(m \;\; m+1 \;\; \dots \;\; n)$ в S_n, значит, $\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_1} \rho \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_r} = \widetilde{\rho}_0(m \;\; m+1 \;\; \dots \;\; n)$. Ясно, что условие невозрастания длин перестановок, возникающих после каждого сопряжения фундаментальной транспозицией, также выполнено, поэтому получаем, что $\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}_0(m \;\; m+1 \;\; \dots \;\; n) = \widetilde{\rho}$, причем $\widetilde{\rho}$ – упорядоченная перестановка.

Теперь рассмотрим второй случай: $\rho^{-1}(m) \leqslant m-2$. Предположим, что $\rho(\rho^{-1}(m)+1) \in \{m+1, \dots, n\}$; тогда $\rho^{-1}(m)+1 \in \{m, \dots, n-1\}$, что противоречит тому, что $\rho^{-1}(m) \leqslant m-2$. Отсюда $\rho(\rho^{-1}(m)+1) \leqslant m = \rho(\rho^{-1}(m))$, поэтому $(\rho^{-1}(m), \rho^{-1}(m)+1) \in \mathrm{inv}(\rho)$. Пользуясь импликацией, доказанной перед предложением 6, имеем $l(\sigma_{\rho^{-1}(m)} \rho \sigma_{\rho^{-1}(m)}) \leqslant l(\rho)$. Отсюда в силу того, что $\sigma_{\rho^{-1}(m)} \in S_{n-1}$, получаем $\rho \succcurlyeq \sigma_{\rho^{-1}(m)} \rho \sigma_{\rho^{-1}(m)} = \rho_1$. При этом $(\rho_1)^{-1}(m) = \sigma_{\rho^{-1}(m)} \rho^{-1} \sigma_{\rho^{-1}(m)}(m) = \rho^{-1}(m)+1$, и, кроме того, $(\rho_1)^{-1}(m+1) = m, \dots, (\rho_1)^{-1}(n) = n-1$. Продолжая действовать аналогично, мы получаем цепочку $\rho \succcurlyeq \rho_1 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq \rho_k$, где $k = m-1-\rho^{-1}(m)$. В этой цепочке для всякого $j \in \{1, \dots, k\}$ $(\rho_j)^{-1}(m) = \rho^{-1}(m)+j$, а значения $(\rho_j)^{-1}(m+1), \dots, (\rho_j)^{-1}(n)$ не зависят от j и равны $m, \dots, n-1$ соответственно. Последняя в этой цепочке перестановка ρ_k удовлетворяет равенствам $(\rho_k)^{-1}(m) = m-1$, $(\rho_k)^{-1}(m+1) = m, \dots, (\rho_k)^{-1}(n) = n-1$. Отсюда $m-1 \in M(\rho_k)$, а $m(\rho_k) \leqslant m-1$, и, значит, к ρ_k можно применить предположение индукции по $m(\rho)$: существует такая упорядоченная перестановка $\widetilde{\rho}_k \in S_n$, что $\rho_k \succcurlyeq \widetilde{\rho}_k$, – но тогда и

$\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}_k$. □

Для перестановки $\rho \in S_n$ число циклов в ее цикловой записи обозначим через $s(\rho)$.

Определение 20. *Перестановка $\rho \in S_n$ – уменьшаемая перестановка, если существует такая фундаментальная транспозиция $\sigma_i \in S_{n-1}$, что имеет место неравенство $l(\rho) > l(\sigma_i \rho \sigma_i)$.*

Предложение 8. *Для всякой перестановки $\rho \in S_n$ выполнено неравенство $l(\rho) \geqslant n - s(\rho)$. При этом если $l(\rho) > n - s(\rho)$, то существует такая уменьшаемая перестановка $\widetilde{\rho} \in S_n$, что $\rho \sim \widetilde{\rho}$; если же $l(\rho) = n - s(\rho)$, то $\rho \sim \rho^{-1}$.*

Доказательство. По предложению 7 существует такая упорядоченная перестановка $\widetilde{\rho} \in S_n$, что $\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}$; тогда $l(\rho) \geqslant l(\widetilde{\rho})$. Перестановки ρ и $\widetilde{\rho}$ сопряжены в S_n, значит, $s(\rho) = s(\widetilde{\rho})$. Ясно, что $l((1\ 2\ \dots\ n)) = n-1$, поэтому $l(\rho) \geqslant l(\widetilde{\rho}) = n - s(\widetilde{\rho}) = n - s(\rho)$. При этом если $l(\rho) > n - s(\rho)$, то $l(\rho) > l(\widetilde{\rho})$, поэтому в цепочке перестановок $\rho_0, \dots, \rho_r$, определяющих отношение предпорядка $\rho \succcurlyeq \widetilde{\rho}$, должна найтись такая перестановка ρ_k, что $l(\rho) = l(\rho_0) = \ldots = l(\rho_k)$ и $l(\rho_k) > l(\rho_{k+1})$. Тогда ρ_k – искомая уменьшаемая перестановка, $\sim$-эквивалентная ρ.

Пусть теперь $l(\rho) = n - s(\rho)$; тогда $\rho \sim \widetilde{\rho}$, поэтому $\rho^{-1} \sim \widetilde{\rho}^{-1}$. Докажем, что $\widetilde{\rho} \sim \widetilde{\rho}^{-1}$, тогда требуемое утверждение также будет доказано.

Рассмотрим длинный цикл $(1\quad 2\quad \dots\quad i_1) = \rho_1$ как элемент группы S_{i_1}. В классе сопряженности в этой группе, состоящем из длинных циклов, имеется ровно одна упорядоченная перестановка – ρ_1, отсюда $\rho_1^{-1} \succcurlyeq \rho_1$, но $l(\rho_1) = l(\rho_1^{-1})$, значит, $\rho_1 \sim \rho_1^{-1}$. Аналогично, $\sim$-эквивалентны с обратными циклы $(i_1+\ldots+i_{j-1}+1\ \ i_1+\ldots+i_{j-1}+2\ \ \dots\ \ i_1+\ldots+i_j) = \rho_j$, $j = 1, \dots, s$. По тем же причинам, что и в доказательстве первого случая в предложении 7, получаем, что указанные $\sim$-эквивалентности определяют глобальную $\sim$-эквивалентность: $\widetilde{\rho} = \rho_1 \ldots \rho_s \sim \rho_1^{-1} \ldots \rho_s^{-1} = \rho_s^{-1} \ldots \rho_1^{-1} = \widetilde{\rho}^{-1}$. □

Теорема 3. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ представления алгебры Гекке $\mathcal{H}_n$ имеют простое ветвление при ограничении на подалгебру $\mathcal{H}_{n-1}$.*

Доказательство. Воспользуемся указанным во введении критерием простоты ветвления представлений. Согласно этому критерию, нам требуется доказать, что централизатор $Z(\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n) = \{p\in\mathcal{H}_n \mid \forall\pi\in S_{n-1}\ (p\tau(\pi)=\tau(\pi)p)\}$ коммутативен.

Пусть $p\in\mathcal{H}_n$, $i\in\{1,\dots,n-1\}$. Тогда $p\tau(\sigma_i)=\tau(\sigma_i)p$, если и только если $\langle p\tau(\sigma_i),\tau(\rho)\rangle = \langle\tau(\sigma_i)p,\tau(\rho)\rangle$ для всякого $\rho\in S_n$. При помощи формул из предложения 6 легко проверить, что это условие оказывается равносильным следующему условию:

$$p_\rho = \begin{cases} qp_{\sigma_i\rho\sigma_i}+(1-q)p_{\rho\sigma_i}, & \text{если } l(\sigma_i\rho\sigma_i)-l(\rho)=2,\\ p_{\sigma_i\rho\sigma_i}, & \text{если } l(\sigma_i\rho\sigma_i)-l(\rho)=0,\\ 1/q\cdot p_{\sigma_i\rho\sigma_i}+(1-1/q)p_{\rho\sigma_i}, & \text{если } l(\sigma_i\rho\sigma_i)-l(\rho)=-2.\end{cases} \qquad (\triangle)$$

Коммутативность алгебры $Z(\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n)$ следует из того, что каждый ее элемент p ^{op}-самосопряжен: $p=p^{op}$; действительно, тогда для $p_1,p_2\in Z(\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n)$ $p_1p_2 = p_1^{op}p_2^{op} = (p_2p_1)^{op} = p_2p_1$. Ясно, что $p=p^{op} \iff \forall\rho\in S_n\ (p_\rho = p_{\rho^{-1}})$.

Пусть $p\in Z(\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n)$ и $\rho\in S_n$. Докажем, что $p_\rho=p_{\rho^{-1}}$. Воспользуемся индукцией по $l(\rho)$. Если $l(\rho)\in\{0,1\}$, то $\rho=\rho^{-1}$, поэтому $p_\rho=p_{\rho^{-1}}$. Докажем требуемое утверждение для всех перестановок ρ с $l(\rho)=l\geqslant 2$, предполагая, что оно верно для всех перестановок ρ с $l(\rho)$ меньше l.

Для всякой фундаментальной транспозиции $\sigma_i\in S_{n-1}$ верно, что $p\tau(\sigma_i)=\tau(\sigma_i)p$. Используя условие $(\triangle)$, отсюда получаем, что если $l(\rho)=l(\sigma_i\rho\sigma_i)$, то $p_\rho=p_{\sigma_i\rho\sigma_i}$; значит, если $\rho_1\sim\rho_2$, то $p_{\rho_1}=p_{\rho_2}$. Воспользуемся предложением 8: если $l=l(\rho)=n-s(\rho)$, то $\rho\sim\rho^{-1}$, поэтому $p_\rho=p_{\rho^{-1}}$, и все доказано; если же $l=l(\rho)>n-s(\rho)$, то существует такая уменьшаемая перестановка $\widetilde{\rho}\in S_n$, что $\rho\sim\widetilde{\rho}$, тогда $p_\rho=p_{\widetilde{\rho}}$ и $p_{\rho^{-1}}=p_{\widetilde{\rho}^{-1}}$, значит, доказываемое утверждение равносильно тому, что $p_{\widetilde{\rho}}=p_{\widetilde{\rho}^{-1}}$. Заменяя ρ на $\widetilde{\rho}$, будем считать, что исходная перестановка ρ – уменьшаемая, и докажем, что $p_\rho=p_{\rho^{-1}}$. По определению, существует такая фундаментальная транспозиция $\sigma_i\in S_{n-1}$, что $l(\rho)>l(\sigma_i\rho\sigma_i)$. Отсюда $l(\sigma_i\rho\sigma_i)-l=-2$ и $l(\rho\sigma_i)=l-1$, поэтому из условия $(\triangle)$ и предположения индукции имеем

$$p_\rho = 1/q\cdot p_{\sigma_i\rho\sigma_i}+(1-1/q)p_{\rho\sigma_i} = 1/q\cdot p_{\sigma_i\rho^{-1}\sigma_i}+(1-1/q)p_{\sigma_i\rho^{-1}}.$$

Но одновременно $l(\rho^{-1})-l(\sigma_i\rho^{-1}\sigma_i) = l-l(\sigma_i\rho\sigma_i)=2$, поэтому, согласно условию $(\triangle)$, получаем

$$p_{\sigma_i\rho^{-1}\sigma_i} = qp_{\rho^{-1}}+(1-q)p_{\sigma_i\rho^{-1}} = q(p_{\rho^{-1}}-(1-1/q)p_{\sigma_i\rho^{-1}}).$$

Собирая вместе полученные равенства, мы видим, что $p_\rho = p_{\rho^{-1}}$. Это завершает доказательство индукционного перехода и всей теоремы. $\square$

Литература

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Об одной бесконечномерной группе над конечным полем.* — Функц. анал. и его прил. **32**, No. 3 (1998), 3–10.
2. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, *Новый подход к теории представлений симметрических групп.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 57–98.
3. И. М. Гельфанд, *Сферические функции на симметрических римановых пространствах.* — Докл. Акад. Наук СССР **70**, No. 1 (1950), 5–8.
4. С. И. Гельфанд, *Представления полной линейной группы над конечным полем.* — Мат. сб. **83**, No. 1 (1970), 15–41.
5. Д. К. Фаддеев, *Комплексные представления полной линейной группы над конечным полем.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **46** (1974), 64–88.
6. J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **80**, No. 2 (1955), 402–447.
7. N. Iwahori, *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field.* — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **10**, Sec. I (1964), 215–236.
8. L. Solomon, *The Bruhat decomposition, Tits system and Iwahori ring for the monoid of matrices over a finite field.* — Geom. Dedic. **36**, No. 1 (1990), 15–49.
9. A. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups. A Hopf Algebra Approach.* Lect. Notes in Math. **869** (1981).

Goryachko E. E. The simplicity of branching of the principal series representations of the groups $GL(n,q)$ under the parabolic restrictions.

We consider the parabolic restriction of representations of the group $GL(n+1,q)$ to the group $GL(n,q)$. The branching of representations under this restriction is simple. We present a direct proof of this fact in the case of the so-called principal series representations. This statement is reduced to the commutativity of the centralizer of the Hecke algebras $Z(H(n,q), H(n+1,q))$; we prove it using an auxiliary combinatorial theory.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: lipides@mail.ru

Поступило 25 мая 2006 г.