Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 331, 2006 г.

А. М. Вершик

О Ф. А. БЕРЕЗИНЕ И ЕГО РАБОТЕ ПО ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ГРУПП ТОКОВ

В этом году исполнилось бы 75 лет замечательному человеку и математику Феликсу ("Алику") Александровичу Березину (1931–1980). Его трагическая и ранняя кончина не дала ему возможности увидеть, как велико влияние его идей и работ на современную математику и математическую физику. Не довелось ему и воспользоваться нынешней открытостью границ и возможностью широкого общения с научным миром – чего он ожидал, но во что почти не верил и от отсутствия чего очень страдал. Его научная судьба, как и судьбы многих ученых советского времени, не соответствовала его дарованию и результатам его творчества. Кроме очевидных и чисто советских поводов, затруднявших его путь, были и другие. Его независимость, особость, делали его "неудобным" для любого начальства и даже для некоторых коллег по работе. Несмотря на множество учеников, популярный семинар и достаточно широкую известность в стране, он по своему характеру был скорее "одиноким волком" и "мэтром", чем лидером группы.

Начало было очень впечатляющим и удачным, он был любимым учеником И. М. Гельфанда, и вместе с Р. А. Минлосом они стали первыми из молодых последователей Гельфанда в теории представлений, только начинавшейся всерьез в начале 50-х гг. Я помню, как на конференции по функциональному анализу чуть позже И.М. хвалил его работы и гордился им. Несколько важных работ было сделано ими вместе, и тут что-то произошло, и отношения кардинально испортились. Большинство близких к ним людей считало, что причина – ошибка в их совместной работе. Ошибка или даже несколько, действительно, были в одной из их работ, но это была поучительная ошибка, из тех, что сами по себе составляют непременную и даже полезную составляющую научного прогресса. Примеров тому очень много.

Гораздо позже, уже в 70-х, когда я дружил с Аликом и активно работал с И.М., я откровенно говорил с обоими, и ни тот, ни другой не считали, что в этом и была причина разлада; вполне возможно, что для недовольства и раздражения Гельфанда допущенная ошибка была лишь поводом, так, во всяком случае, оба говорили мне. Я неоднократно пытался убедить каждого из них в том, что надо наладить отношения, и это будет ко всеобщей пользе. Печально, но оба почти в одинаковых выражениях говорили о своем нежелании восстановить отношения и о принципиальной невозможности даже самого общения.

Для Березина этот разлад означал многое – вместо столь важной в его положении поддержки в проектах и начинаниях он столкнулся с непониманием и скептицизмом. Его работа начала 60-х по грассманову анализу, в которой он заложил основы того, что сейчас называют суперматематикой, долго лежала в "Успехах" без движения и в конце концов с многолетним запозданием (может, и к счастью) вышла отдельной книжкой. Что касается защиты докторской диссертации, которая должна была произойти лет на десять раньше, чем это случилось, его положения на мех-мате (профессором он так и не стал), то причины этого общие – широко известный круг ученых был жертвой этих порядков. Ведь сейчас невозможно поверить, что добрая половина сейчас уже всемирно известных советских математиков не могли годами найти возможность подать и защитить ту или иную диссертацию, а если кому и удалось ее защитить, то еще дольше надо было ждать утверждения и получения звания и пр.пр.

Роль Ф. А. Березина в математическом сообществе тех лет чрезвычайно высока. Одной фразой – она состоит в том, что именно он, глубоко и самостоятельно изучив теоретическую физику (тогдашнюю квантовую теорию поля, статфизику и др.), *первый из своего поколения математиков начал популяризировать ее и систематически привлекать к ней активных математиков Москвы, Ленинграда и других городов страны.* Почти все мои друзья-математики в нашем и смежных поколениях, стоящие близко к теоретической физике, находились определенное время под сильным влиянием Березина (Л. Д. Фаддеев, Р. А. Минлос, Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай, А. С. Шварц и многие физики-теоретики). Его семинар 60-70-х гг. был притягательным для десятков математиков и теорфизиков всей страны. Об этом следовало бы написать подробно тем, кто непосредственно испытал это влияние в те годы. Мне известны лишь воспоминания Р. А. Минлоса и А. С. Шварца, в которых пишется об этой роли Березина.

Нужно помнить, насколько непохожи отношения математиков и теоретических физиков в предвоенные годы и первые десятилетия после войны на то, что мы видим сейчас. Перелом наступил в шестидесятых годах, и роль Березина здесь очень значительна. Хорошо известно, что И. М. Гельфанд еще ранее очень интересовался физикой, писал работы на физические темы и, как и Алик, посещал одно время семинар Ландау, но последствия этого в его школе не шли дальше самой общей информированности о событиях. И.М. передавал мне удачную формулировку А. Б. Мигдала о том, что он ходил к физикам, как народники к мужику (иначе говоря, с одной стороны, из уважения и желания чуть-чуть поучиться, а с другой — поучить их грамоте). Не знаю, насколько это mot точно, но Алик заведомо в основном учился и "выучился на физика", как мало кто из профессиональных математиков. Он иногда говорил: "Когда я думаю, как физик, ... ". К физике он относился очень почтительно, язвительно высмеивал математиков, которые "хотели сделать (т.е. закончить) физику", и считал, что вряд ли это вообще возможно.

Мое первое знакомство с Аликом произошло в начале 60-х годов. Он часто приезжал в Ленинград и любил к нам приезжать. Он дружил с О. А. Ладыженской, имел тесный научный контакт с М. С. Бирманом, Л. Д. Фаддеевым. А позже я часто приглашал его делать доклады на заседаниях нашего Математического общества. Наш первый разговор в 63-м или 64-м году был о фоковском пространстве, которое я тогда только что для себя открыл. Дело в том, что в кандидатской диссертации я по инициативе В. А. Рохлина разбирался в структурах пространства L^2 по бесконечномерной гауссовой мере, и, в частности, В.А. просил явно задать в нем структуру унитарного кольца, для того чтобы изучать спектры и другие инварианты гауссовских ("нормальных") динамических систем и т.д. В то время заинтересованность в нормальных динамических системах и гауссовых мерах – их геометрии, спектре и других свойствах – была всеобщей. Идеи А. Н. Колмогорова, работы С. В. Фомина, И. В. Гирсанова и, главное, знаменитые работы К. Ито – вот то, что на эту тему было мне тогда известно. Но о связи с фоковским пространством никто из нас и авторов этих работ не знал. Почти в это же время вышли лекции Н. Винера по нелинейной теории случайных процессов, где было описано пространство нелинейных функционалов по гауссовой (винеровской) мере, кстати, не без существенных ошибок, но и в его книге не было ни слова о вторичном квантовании. Я помню, что на конференции в Вильнюсе А. Н. Колмогоров спрашивал меня, что же нового в книге Винера. Первым, кто объяснил, что такое "столбики" Фока мне и Я. Г. Синаю, был Л. Д. Фаддеев. Я бросился читать статьи В. А. Фока 32-го года, в которых формулировались идеи вторичного квантования, и с тех пор рассматриваю эту конструкцию как одно из самых серьезных достижений физико-математики XX века. И вот после прочтения работы Фока и состоялась моя первая встреча с Березиным. Мой собственный скромный вклад в этот вопрос состоял в выводе формул умножения многомерных полиномов Эрмита, с помощью которых можно было и установить структуру унитарного кольца, и дать разложения функционалов по обобщенным полиномам Эрмита, и т.д., что в свою очередь можно использовать для анализа нормальных систем и соответствующих операторов. Сейчас это пространство, носящее много имен (Фок–Винер–Ито–Кук– ...), стало общеизвестным; ему посвящено несколько книг (например, книга Б. Саймона). Березин тоже много писал о нем, но предпочитал аналитическую (баргмановскую), а не вероятностную модель фоковского пространства.

После той первой беседы на фоковскую тему мы стали встречаться всякий раз, когда я ездил в Москву или когда он приезжал в Ленинград, и обсуждать разные математические и нематематические темы. В частности, нас обоих интересовали фон неймановские конструкции факторов, C^*- и W^*-алгебры, представления коммутационных и антикоммутационных соотношений, аппроксимации (мало кто помнит сейчас, что именно он инициировал теорию аппроксимаций динамических систем, которую успешно развивали в 60-х гг. его ученик А. Степин и ученик Я. Синая А. Каток) и особенно меры и интегрирование в функциональных пространствах, которое было одно время его коньком и которым я тоже очень интересовался в те годы. Помню наши долгие беседы в Кацивели (Крым) летом 1966 года во время летней школы, в которых он развивал свое понимание аппроксимаций и теории факторов, и особенно в Чимгане в 1975 году, в

Звенигороде и под Минском в 1979 во время нашей, увы, последней встречи, где мы говорили о представлениях групп токов, о чем я скажу подробнее ниже, и о ситуации в науке и обществе, о чем я вспоминал в [12].

Одной из самых важных для Березина математических тем была *математическая теория квантования*; этой темой он занимался с разных позиций непрерывно – можно сказать, всю жизнь. В математическую теорию квантования Ф. А. Березин внес неоценимый вклад. Я надеюсь, что найдутся более компетентные в этом вопросе специалисты, которые подробно и связно опишут березинский подход к квантованию и его эволюцию. Сюда входит и геометрическое квантование (квантовая механика); и метод орбит, к которому он имел самое непосредственное отношение; и деформационное квантование, представленное известной серией его статей, в которых он старался включить в рассмотрение и дифференциальные уравнения, и теорию комплексных многообразий; и вторичное квантование и теория фоковского пространства и преобразований Боголюбова; и, наконец, чисто алгебраический подход (работы с киевским математиком Г. Кацом). И, конечно же, к квантованию прямо относится его любимое детище – грассманова теория и суперматематика.

Здесь я остановлюсь лишь на одной из тем, которая интересовала нас в 70-х гг. А именно, я хочу рассказать о задаче, которой занимались мы с И. М. Гельфандом и М. И. Граевым и над которой также работал и Алик, – задаче о представлениях групп токов или о непрерывном тензорном произведении представлений. Он пришел к ней также от задач квантования, и в его понимании она примыкает к упомянутому циклу работ. Ей посвящены две его статьи – "Непрерывные прямые произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара" [1] в "Трудах Московского математического общества" и ее английская версия [2] в Report Math. Phys.

Я должен начать с краткой истории наших работ с И. М. Гельфандом и М. И. Граевым, посвященным так называемым интегралам представлений или группам токов. Весной 1972 года в конце своего довольно долгого визита в Москву я встречался с И.М. и рассказывал ему о различных своих занятиях. Как мне показалось, они заинтересовали его – речь шла об асимптотической статистике подстановок, динамических системах и, может быть, не помню точно, о C^*-алгебрах; ни слова о теории представлений групп сказано не было, хотя я в то время усиленно изучал ее. Простившись с И.М., я уже собирался уезжать в Ленинград, как вдруг в последний день он весьма сложным способом нашел меня у моих московских друзей и попросил приехать к нему. Когда мы с ним встретились (И.М. пригласил также М. И. Граева), он рассказал о задаче, которую по его словам он давно ставил разным людям, но, в силу сказанного выше, вряд ли обсуждал ее с Березиным. Это задача о том, существует ли неприводимое представление группы функций на многообразии со значениями, скажем, в группе $SL(2, R)$ с поточечным умножением ("группы токов со значениями в $SL(2, R)$"), инвариантное относительно какой-либо транзитивно действующей на многообразии группы (так называемый "мультипликативный интеграл представлений")? Например, существует ли неприводимое представление группы токов на окружности, инвариантное относительно вращений? В течение полугода этот вопрос был решен положительно, и в январе 73-го года я отправил письмо И. М. Гельфанду с решающим аргументом, после чего и началась моя совместная с ним и М. И. Граевым работа, приведшая к длинной серии публикаций, посвященных этой и близким темам.

В декабре 1972 года в Ленинград приехал Алик – он был приглашен для докладов на Обществе и на семинаре Смирнова–Ладыженской, и мы долго разговаривали с ним; в частности, я рассказал и об этой задаче. Как раз тогда я готовил письмо И. М. Гельфанду с вычислением того, что позже было названо каноническим состоянием. Березин очень оживился и сказал, что тоже думал об этой задаче, но совсем по-другому. Через некоторое время он написал на эту тему две работы; они были опубликованы гораздо позже – в конце 70-х гг., и мы с ним в дальнейшем о них по существу не говорили. Тогда я не стал разбираться в этих статьях, так как интерес к этой теме у меня уже прошел. В них есть формальная ссылка на нашу работу, но без всяких комментариев. К сожалению, и здесь у него остался осадок, который я старался снять, но, увы, в дело опять вмешались непростые взаимоотношения его с И.М. Здесь не место подробно говорить об этом, и я перейду к математической сути дела.

Случилось так, что недавно, после долгого перерыва, мы вместе с М. И. Граевым вернулись к этим задачам, имея в виду ряд новых идей, и я решил, что нужно наконец как следует понять, что же было сделано на эту тему Березиным и как это соотносится с нашими старыми работами. С запозданием я разобрался с этим.

В наших работах 1973–74 гг. были описаны когомологии простых групп Ли ранга 1 со значениями в замечательном неприводимом унитарном представлении. Это представление, называемое сейчас особым ("приклеенным" к единичному), играет в построении групп токов решающую роль. В нашей первой работе [3] рассматривалась только группа и алгебра Ли $SL(2,R)$, $sl(2,R) = su(1,1)$, а в работе [4] – все группы $U(n,1)$, $O(n,1)$. Исходной точкой наших построений было так называемое каноническое состояние на группе – производная сферической функции в точке, приклеенной к единичному представлению, или, по-другому, квадрат нормы нетривиального коцикла. А исторически первая конструкция неприводимого представления группы токов была аппроксимативной – предельный переход от дополнительных серий по образцу построения интеграла Лебега. Но уже вслед за этим при подготовке к печати нашей первой работы мы поняли, что фактически открытое нами представление группы токов реализуется в фоковском пространстве, а именно, в экспоненте, построенной по прямому интегралу особых представлений, но не просто как экспонента линейного действия, а подправленная коциклом (прямым интегралом коцикла исходной группы). Это есть, как выяснилось вскоре, частный случай общей экспоненциальной конструкции Х. Араки, появившейся несколькими годами раньше, и поэтому новизна в нашей работе была заключена не столько в конструкциях, хотя мы рассматривали не только фоковскую, но и некоторые новые конструкции, а в определении канонического состояния и открытии нетривиальных когомологий, нетривиального коцикла полупростых групп ранга 1, которые не были до тех пор известны.

Что касается нетривиального коцикла, то, как вскоре мы с моим аспирантом С. Карпушевым доказали в [8], он может существовать только в особых представлениях, и я выдвинул гипотезу, которую несколько лет назад доказал в усиленном виде И. Шалом [13], о том, что если у группы нет свойства Каждана (единичное представление не изолировано в пространстве неприводимых унитарных представлений), то неприводимое представление с нетривиальными первыми когомологиями (т.е. особое представление) обязательно существует; при этом нетривиальность когомологий понимается даже в более сильном смысле: группа сильных когомологий — это фактор-группа группы коциклов по замыканию подгруппы кограниц.

Помню, что незадолго до приезда Березина в декабре 1972 года к нам приехал А. Кириллов, и я ему также рассказывал обо всем этом. Он напомнил мне о свойстве Каждана, столь популярном сейчас и малоизвестном тогда и имевшем прямое отношение к теме, а также о своей работе [9]. А. Березин, как он сам мне сказал позже, никак не связывал эти вопросы, хотя сама по себе идея деформаций представлений и алгебр была ему близка.

Для полупростых групп Ли $SU(n,1)$, $O(n,1)$, $n = 1,2,\ldots$, – единственных, у которых такие когомологии есть и были явно вычислены в [4] – стало возможным провести построение мультипликативного интеграла. Березин рассмотрел в [1, 2] часть этих групп – универсальные накрывающие группы движений комплексного шара или комплексного пространства Лобачевского. Внимательно посмотрев сейчас довольно трудно написанную статью Березина [1], я убедился, что, хотя Березин и не выписывал коцикла, он проделал на конкретном уровне ту же работу: построил непосредственно нужную реализацию пространства Фока как экспоненту по интегралу особых представлений группы $SU(n,1)$, а коцикл возник у него автоматически из-за способа определения нормы. Правда, доказательство неприводимости у него более рутинно – у нас оно следовало из некоторой общей теоремы о каноническом состоянии. Более того, понятие канонического состояния, введенное в [3], как оказалось, фактически использовалось и Березиным, но в другом определении, и ему было позже посвящено много работ – В. Ф. Молчанова (ученика Ф. А. Березина), Г. Ван Дейка и их учеников.

Таким образом, Ф. А. Березин предложил свое независимое построение мультипликативного интеграла представлений для группы движений комплексного пространства Лобачевского, которое приводит к одной из конструкций [3, 4], а именно к фоковской модели.

Мимоходом упомяну, что позже, в начале 80-х, появились совершенно новые конструкции – так называемые коммутативные модели мультипликативного интеграла: сначала для $SL(2,R)$ – в [10] (см. также [14, 7], где рассмотрена с вероятностной точки зрения коммутативная модель для $SL(2,R)$); а теперь — в наших недавних работах [5, 11, 6], где мы заново и подробно рассмотрели эти вопросы. В частности, коммутативная модель изучается для общего случая $SO(n,1)$, $SU(n,1)$, и при этом построение нужного представления сводится к построению представления его максимальной параболической подгруппы; пока это проделано для самих групп, а не для групп токов. Этот прием сильно упрощает конструкцию и привносит совершенно новые связи (случайные процессы Леви, бесконечномерные лебеговы меры и др.)

Возвращаясь к работам Березина, я хочу на этом примере отметить характерные черты работ Алика, хотя и не берусь утверждать, что мои наблюдения имеют общий характер. Прежде всего – и это роднит его с его руководителем – он конкретен и не был большим любителем общих конструкций, хотя и знал, насколько они бывают иногда полезны. Во-вторых, он обладал замечательным чутьем, что также сближает его с И.М. В примере, о котором идет речь, это чутье проявилось особенно ярко, поскольку он не имел общей картины мультипликативных интегралов и не знал, что существование непрерывного тензорного произведения налагает очень специальные и конкретные условия на группу и ее представление. Но если соответствующая общая теорема неизвестна, а скорее всего было именно так, то надо было угадать, что довольно тяжелые выкладки приведут в конце концов к цели. Впрочем, его умение считать и упорство в счете было хорошо известно. Но, может быть, особенно важная черта творчества Березина – в умении видеть перспективу и проявить настойчивость в проведении той или иной выбранной им программы; его программа грассманова анализа и суперматематики – одно из лучших проявлений этой прозорливости.

Литература

1. Ф. А. Березин, *Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара.* — Труды Моск. мат. общества **36** (1978), 275–293.
2. Ф. А. Березин, *Representations of the infinite direct product of universal coverings of isometry groups of the complex ball.* — Rep. Math. Phys. **9**, No. 1 (1976), 15–30.
3. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы*

SL(2, R), *где R – кольцо функций.* — Успехи мат. наук **28**, No. 5 (1973,), 83–128.

4. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления группы G^X и когомологии.* — Функц. анал. и прилож. **8**, No. 3 (1974), 67–68.
5. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Коммутативная модель представления группы $O(n,1)^X$ и обобщенная мера Лебега в пространстве распределений.* — Функц. анал. и прилож. **39**, No. 2 (2005), 1–12.
6. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n,1)$ и $U(n,1)$.* — Успехи мат. наук **61**, No. 5 (2006).
7. А. М. Вершик, М. Йор, Н. В. Цилевич, *О тождестве Маркова–Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса.* — Записки научн. семин. ПОМИ **283** (2001), 21–36.
8. А. М. Вершик, С. И. Карпушев, *Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции.* — Мат. сб. **119**, No. 4 (1982), 521–533.
9. C. Delaroche, A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés.* — Seminaire Bourbaki, Expose 243.
10. I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups.* — In: Representations of Lie Groups and Lie Algebras, A. A. Kirillov (ed.), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985, pp. 121–179.
11. M. I. Graev, A. M. Vershik, *The basic representation of the current group $O(n,1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure.* — Indag. Math. **16**, No. 3/4 (2005).
12. V. P. Maslov, M. A. Shubin, A. M. Vershik, N. D. Vvedenskaya, *Alik Berezin in the recollections of friends.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **175** (1996), 225–236.
13. Y. Shalom, *Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group.* — Ann. Math. **152** (2000), 113-182.
14. N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, *An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process.* — J. Funct. Anal. **185** (2001), 274–296.

Vershik A. M. On F. A. Berezin and his work on representations of current groups.

We tell about F. A. Berezin and his outstanding role in the development of mathematical physics. We discuss the connections between Berezin's work on representations of current groups with values in the universal covering of the group of motions of the complex ball and the works by Vershik, Gelfand, and Graev on the multiplicative integral of representations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 31 мая 2006 г.